Milan Merkle

Matematička analiza

Pregled teorije i zadaci

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНВ. БР. 27673
БИБЛИОТЕКА

GrosKNJIGA
Beograd, 1994.

Autor

Dr Milan Merkle,
vanredni profesor

Elektrotehnički fakultet
Bulevar Revolucije 73, 11000 Beograd.

Recenzenti

Dr Dobrilo Tošić,
redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu.

Dr Arif Zolić,
docent Matematičkog fakulteta u Beogradu.

Izdavač

Grosknjiga
S.J. Vukotića 5, Beograd.

Za izdavača
Milovan Stojadinović

Glavni i odgovorni urednik
Miloje Drinjaković

ISBN 86–485–0004–4

Tiraž 1000 primeraka.

Štampa

Zavod za grafičku tehniku Tehnološko–metalurškog fakulteta,
Karnegijeva 4, Beograd.

© 1994 Milan J. Merkle. Reprodukovanje (fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način) ili ponovno objavljivanje sadržaja ove knjige – u celini ili u delovima – nije dozvoljeno bez prethodne izričite saglasnosti i pismenog odobrenja autora.

Predgovor

U početku zamišljena kao zbirka od nekoliko stotina zadataka, ova knjiga je, postajući obimnija, više puta menjala svoj izgled i koncepciju.

Moja konačna namera bila je da svaki student (uključujući i one sa skromnijim predznanjem) može da se pripremi za pismeni deo ispita koristeći samo ovu knjigu. Zato ona sadrži, nadam se, dovoljan broj formula, tablica, teorema i definicija raznih pojmova. U njoj se mogu naći i dokazi jednog broja važnih teorema.

Glave 1–7 napisane su rukovodeći se pomenutim ciljem. One sadrže, pored teorijskih jedinica, 1200 zadataka, uglavnom detaljno rešenih ili sa rezultatima. Neki zadaci su teorijske prirode (na primer, dokazi teorema) i njihovi brojevi su uokvireni. Detaljna podela gradiva na odeljke i pododeljke omogućava svakom korisniku da izabere materijal koji će proučavati.

Da bi knjiga zadovoljila i potrebe znatiželjnijih studenata, kao i nastavnika koji bi u njoj nalazili materijal za dopunu predavanjima i za ispite, osma glava sadrži oko 400 zadataka i problema različite težine.

Broj zadataka je, zapravo, znatno veći od 1573, koliko ih je numerisano, jer su zadaci za uvežbavanje podeljeni na delove a),b),c) itd. Ovo je učinjeno radi racionalizacije prostora.

Knjiga u potpunosti zadovoljava zahteve programa predmeta Matematika 2, koji se predaje studentima prve godine Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Pored studenata Elektrotehnike, knjigu mogu koristiti i studenti Matematike, Fizike i drugih prirodnih nauka, kao i studenti drugih tehničkih fakulteta.

U stvaranju ove knjige značajnu ulogu imala je računarska tehnologija. Tekst je pisan i pripremljen za štampu u LaTeXu. Grafici funkcija nacrtani su najpre u *EasyPlot*u, a zatim su dorađeni pomoću programa *Corel Draw*. Rešenja većine zadataka proverena su korišćenjem programa *Derive* i *Mathematica*. "Trodimenzionalni" crteži urađeni su iz programa *Mathematica*.

Iako je urađeno sve što se obično radi da bi se minimizirao broj grešaka koje su neizbežne u matematičkom tekstu, autor može samo da tvrdi da je otklonio sve uočene greške. Biću zahvalan svakom čitaocu koji mi ukaže na greške bilo koje prirode.

*

* *

Početak rada na ovoj knjizi bio bi mnogo teži da nije bilo studenata prve godine Specijalne grupe iz Matematike 2, generacija 1991. Oni su sa oduševljenjem rešavali ispitne zadatke i tako me snabdeli materijalom od preko 100 rešenih zadataka. Zahvaljujem se VLADIMIRU BALTIĆU, ŽELJKI BUTUROVIĆ, DEJANU ĐONINU, ALEKSANDRI KOPŠI, DARKU MARINOVU, VELIBORU MARKOVSKOM, BOŠKU NIKOLIĆU, MILUTINU NIKOLIĆU, MINI NAKIĆENOVIĆ, KATARINI NIKOLAJEVIĆ, VELJKU PAPIĆU.

Posebno se zahvaljujem studentu ANTONIJU RADOJEVIĆU, koji je sâm rešio oko 100 zadataka.

Moje kolege, mr MIRKO JOVANOVIĆ i dr SLOBODAN SIMIĆ, priložili su jedan broj svojih originalnih zadataka za knjigu, što je doprinelo njenom kvalitetu i zanimljivosti.

Najdragoceniju pomoć dobio sam od prvih kritičkih čitalaca rukopisa. Oni su zaslužni za to što u tekstu nema onoliko grešaka koliko je moglo da ih bude.

Radnu verziju knjige pročitali su, u celini, dr LJILJANA PETROVIĆ, dr DOBRILO TOŠIĆ, dr ARIF ZOLIĆ i mr NENAD CAKIĆ. Zahvaljujući njihovim primedbama i sugestijama, neki zadaci su dobili lepša rešenja, a mnoge reči su postavljene na pravo mesto.

Neke delove radne verzije čitali su i po njima držali nastavu i TATJANA MADŽAREVIĆ, BOJANA MIHAILOVIĆ, NENAD TOŠIĆ i BRANKO MALEŠEVIĆ. Od njih sam takođe dobio niz korisnih sugestija.

Korice je oblikovao arh ZORAN BADNJEVIĆ, a slike u tekstu doradio je na *Corel Drawu* dipl.ing IVAN FIŠER. U završnoj pripremi za štampu pomogli su mi dr MIHAILO MITRINOVIĆ i DRAGOSLAV M. MITRINOVIĆ. Zahvaljujem im se što su doprineli lepšem izgledu knjige.

Milan Merkle
Elektrotehnički fakultet,
pp. 816, 11001 Beograd.

U Beogradu, aprila 1994.

Sadržaj

Obavezno pročitati ..... *xi*

1 Uvod u analizu 1

1.1 Osobine realnih brojeva 1
1.1.1 Kardinalni broj skupa (1) **1.1.2** Algebarski i transcendentni brojevi (5) **1.1.3** Poredak u skupu realnih brojeva (6) **1.1.4** Neke osobine prirodnih brojeva (12)

1.2 Osobine realnih funkcija 14
1.2.1 Osnovne osobine funkcija (14) **1.2.2** Razni načini definisanja funkcija (22) **1.2.3** Polinomi, stepena i racionalna funkcija (23) **1.2.4** Neke važne formule (24)

1.3 Kompleksni brojevi i trigonometrijske funkcije 25
1.3.1 Kompleksni brojevi (25) **1.3.2** Trigonometrijske funkcije (27)
1.3.3 Inverzne trigonometrijske funkcije (38)

1.4 Eksponencijalna i logaritamska funkcija 47
1.4.1 Eksponencijalna i logaritamska funkcija (47) **1.4.2** Hiperboličke funkcije (51) **1.4.3** Elementarne funkcije (53)

1.5 Kompleksne funkcije* 54
1.5.1 Eksponencijalna i sa njom povezane funkcije (54) **1.5.2** Višeznačne funkcije (58)

2 Granični procesi 61

2.1 Granične vrednosti nizova 61
2.1.1 Nizovi i njihove granične vrednosti (61) **2.1.2** Beskonačne granične vrednosti (66) **2.1.3** Stolzova teorema (76)

2.2 Monotoni nizovi 81
2.2.1 Granična vrednost monotonog niza (81) **2.2.2** Broj e (84) **2.2.3** Nalaženje granične vrednosti monotonog i ograničenog niza (87)

2.3 Podnizovi 94
2.3.1 Podnizovi i njihove granične vrednosti (94) **2.3.2** Najmanja i najveća granična vrednost podniza (96) **2.3.3** Tačka nagomilavanja (99)

2.4 Kompletnost 101
2.4.1 Cauchyjev niz (101) **2.4.2** Kompletan skup (104) **2.4.3** Banachov stav o nepokretnoj tački (105) **2.4.4** Banachov kriterijum konvergencije nizova i metod iteracije (106)

2.5 Granične vrednosti funkcija 114
2.5.1 Granična vrednost funkcije (114) **2.5.2** Neprekidna funkcija (116) **2.5.3** Beskonačne granične vrednosti (118) **2.5.4** Osobine graničnih vrednosti (121) **2.5.5** Simboli O, o i $\sim$. Beskonačno male veličine (136)

2.6 Neprekidnost i ograničenost funkcija 142
2.6.1 Vrste prekida (142) **2.6.2** Osobine neprekidnih funkcija (144) **2.6.3** Infimum i supremum funkcije (145) **2.6.4** Uniformna neprekidnost (147)

3 Diferencijalni račun funkcija jedne promenljive 151

3.1 Izvod i diferencijal 151
3.1.1 Definicija izvoda (151) **3.1.2** Logaritamski izvod (162) **3.1.3** Levi i desni izvod. Beskonačan izvod (164) **3.1.4** Geometrijska interpretacija izvoda (168) **3.1.5** Diferencijal funkcije (170)

3.2 Teoreme o srednjoj vrednosti u diferencijalnom računu i njihove primene 178
3.2.1 Teoreme o srednjoj vrednosti (178) **3.2.2** Prekidi izvoda (180) **3.2.3** Uniformna neprekidnost funkcija (183) **3.2.4** Kontrakcija i Lagrangeova teorema (183) **3.2.5** L'Hospitalovo pravilo (185)

3.3 Izvodi i diferencijali višeg reda 190
3.3.1 Izvod reda n (190) **3.3.2** Leibnizova formula (198) **3.3.3** Diferencijal reda n (200)

3.4 Taylorova formula 203
3.4.1 Taylorov polinom i ostatak (203) **3.4.2** Procena ostatka u Taylorovoj formuli (209) **3.4.3** Teorema o jedinstvenosti Taylorovog polinoma. Potencijalni razvoji (216) **3.4.4** Nalaženje graničnih vrednosti pomoću potencijalnih razvoja (223) **3.4.5** Taylorova formula za polinome (228)

3.5 Monotonost i konveksnost 229
3.5.1 Monotonost (229) **3.5.2** Konveksnost i nejednakosti (233)

3.6 Ispitivanje funkcija 239
3.6.1 Asimptote (239) **3.6.2** Ispitivanje funkcija (241)

4 Integralni račun 281

4.1 Neodređeni integral: Osnovni metodi integracije 281
4.1.1 Primitivna funkcija (281) **4.1.2** Smena promenljive (288) **4.1.3** Transformacije podintegralne funkcije (293) **4.1.4** Parcijalna integracija (299)

4.2 Neke važne klase integrala 303
4.2.1 Integracija racionalnih funkcija (303) **4.2.2** Integracija nekih iracionalnih funkcija (318) **4.2.3** Integracija trigonometrijskih funkcija (322)

4.3 Određeni integral 334
4.3.1 Definicija određenog integrala (334) **4.3.2** Izračunavanje određenih integrala (340) **4.3.3** Smena promenljive (344) **4.3.4** Parcijalna integracija (352) **4.3.5** Diferenciranje integrala po granici integracije (354) **4.3.6** Nesvojstveni integral (356) **4.3.7** Teoreme o srednjoj vrednosti (363) **4.3.8** Rekurentne formule za izračunavanje određenih integrala (369) **4.3.9** Neelementarne funkcije (379) **4.3.10** Primene određenih integrala (384)

5 Redovi 395

5.1 Brojni redovi 395
5.1.1 Definicija reda (395) **5.1.2** Pozitivni redovi (407) **5.1.3** Brojni redovi sa članovima proizvoljnog znaka (420) **5.1.4** Apsolutna konvergencija (424)

5.2 Funkcionalni redovi 430
5.2.1 Uniformna konvergencija niza funkcija (430) **5.2.2** Uniformna konvergencija redova (434) **5.2.3** Stepeni redovi (444) **5.2.4** Maclaurinov red (450)

6 Metrički prostori i funkcije više promenljivih 471

6.1 Metrički prostori 471
6.1.1 Definicija metričkog prostora (471) **6.1.2** Otvoreni i zatvoreni skupovi (475) **6.1.3** Konvergencija u metričkom prostoru (482) **6.1.4** Preslikavanja metričkih prostora (488) **6.1.5** Normirani prostor (491)

6.2 Funkcije više promenljivih 493
6.2.1 Granične vrednosti funkcija više promenljivih (493) **6.2.2** Parcijalni izvodi i diferencijabilnost (499) **6.2.3** Diferenciranje složenih funkcija (504)

7 Diferencijalne jednačine 517

7.1 Uvodni pojmovi i diferencijalne jednačine prvog reda 517
7.1.1 Diferencijalne jednačine i njihova rešenja (517) **7.1.2** Rešavanje nekih diferencijalnih jednačina prvog reda (519) **7.1.3** Jednačine Lagrangea i Clairauta (536) **7.1.4** Riccatijeva jednačina (537) **7.1.5** Diferencijalna jednačina u totalnom diferencijalu (539)

7.2 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda 544
7.2.1 Linearne diferencijalne jednačine i metodi njihovog rešavanja (544) 7.2.2 Eulerova diferencijalna jednačina (560)

8 Razni zadaci 563

8.1 Nizovi 563

8.2 Funkcije i izvodi 577
8.2.1 Granične vrednosti funkcija (577) 8.2.2 Neprekidnost i uniformna neprekidnost (582) 8.2.3 Izvodi (584) 8.2.4 Taylorova formula (592) 8.2.5 Teoreme o srednjoj vrednosti (593) 8.2.6 Ispitivanje funkcija (595) 8.2.7 Polinomi (600) 8.2.8 Funkcionalne jednačine (600)

8.3 Integrali 603

8.4 Redovi 619
8.4.1 Opšte osobine redova (619) 8.4.2 Pozitivni redovi (621) 8.4.3 Redovi proizvoljnog znaka (627) 8.4.4 Uniformna konvergencija nizova (630) 8.4.5 Funkcionalni redovi (632) 8.4.6 Stepeni redovi (636) 8.4.7 Beskonačni proizvodi* (642)

8.5 Nejednakosti 644

8.6 Diferencijalne jednačine 653
8.6.1 Diferencijalne jednačine prvog reda (653) 8.6.2 Diferencijalne jednačine višeg reda (655) 8.6.3 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova (667)

8.7 Razni zadaci 673
8.7.1 Granične vrednosti (673) 8.7.2 Izvodi (675) 8.7.3 Funkcije, integrali i redovi (677) 8.7.4 Wallisova i Stirlingova formula. Izračunavanje broja π(684) 8.7.5 Cantorov skup* (688)

Spisak ilustracija 693

Literatura 695

Indeks 697

Obavezno pročitati

S obzirom na obim izložene materije, svaki korisnik treba, u skladu sa svojim potrebama, da napravi put kroz ovu knjigu. To neće biti teško, jer je sadržaj podeljen na male jedinice, od kojih se neke mogu preskočiti, a neke detaljnije izučavati.

Prvu glavu treba obavezno bar pregledati i upoznati se sa njenim sadržajem, jer se u njoj nalazi veliki broj definicija, teorema i formula koje su preduslov za razumevanje ostalih delova knjige. U ovoj glavi date su, između ostalog, sve uobičajene trigonometrijske formule, kao i definicije raznih pojmova iz Algebre, zajedno sa jednim brojem zadataka koji imaju za cilj da osveže zaboravljeno ili nedovršeno znanje iz srednje škole.

Ako treba naći neki pojam, najpre ga treba potražiti u sadržaju, pa zatim u indeksu pojmova na kraju knjige, jer se u indeksu uglavnom ne ponavljaju pojmovi iz sadržaja.

Indeks je, po pravilu, uređen po imenicama u pojmovima. Na primer, pojam "neparna funkcija" naći će se pod "funkcija", a ne pod "neparna". Na stranici teksta na kojoj se po prvi put pojavljuje, pojam je štampan **masnim slovima**.

Mnogi sadržaji pojavljuju se na više mesta. Na primer, granične vrednosti funkcija uvode se u glavi 2, da bi se ponovo pojavile u glavi 3, gde je čitalac već naoružan L'HOSPITALovim pravilom i TAYLOROvom formulom. Da bi se olakšao posao čitaocu koji želi da koristi prečice za stizanje do cilja, na kraju odeljaka i pododeljaka pojavljuje se poseban znak za nastavak, koji upućuje na mesto u knjizi gde se ista materija obrađuje.

Odeljak 1.5 posvećen je kompleksnim funkcijama, što ne pripada standardnom kursu Analize, ali može da posluži za dopunski rad sa studentima. Ista primedba odnosi se i na pododeljak 8.7.5 o Cantorovom skupu. Naslovi ovih odeljaka označeni su zvezdicom.

Na sledeće dve stranice nalazi se spisak simbola koji se koriste u tekstu, kao i spisak matematičkih oznaka. Njih treba takođe obavezno pročitati. ►►

Simboli u tekstu

! Važno (na margini). Označava važne formule i tvrđenja.

¡ Klizavo (na margini). Ovim znakom obeležavaju se mesta gde se lako i često greši.

♣ Ideja (na margini). Ovim znakom obeležavamo mesta na kojima se u zadacima uvodi nova ideja.

►► 8.4.5 Nastavak u 8.4.5. Znači da se tekst iz iste materije može naći u 8.4.5. Koristi se na kraju odeljaka ili pododeljaka.

169. Zadatak teorijske prirode (na primer, dokaz neke teoreme).

• Označava definiciju u teorijskom delu.

√ Označava teoremu ili formulu u teorijskom delu.

□ Znak za kraj dokaza, teoreme ili rešenja.

Matematičke oznake

N Skup prirodnih brojeva.

Q Skup racionalnih brojeva.

Z Skup celih brojeva.

R Skup realnih brojeva.

C Skup kompleksnih brojeva.

$\emptyset$ Prazan skup.

$\{x \mid P(x)\}$ Skup svih x (iz nekog skupa) koji imaju osobinu P. Na primer, $\{x \mid 1 < x < 2\}$ je skup svih brojeva između 1 i 2.

(a, b) Interval (otvoreni interval), skup $\{x \mid a < x < b\}$.

$[a, b]$ Segment (zatvoreni interval), skup $\{x \mid a \leq x \leq b\}$.

$(a, b]$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x \mid a < x \leq b\}$.

$[a, b)$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x \mid a \leq x < b\}$.

$x \mapsto f(x)$ Oznaka za funkciju koja x preslikava u $f(x)$, na primer, funkcija $x \mapsto \sin x$.

$[x]$ Ceo deo broja x. Na primer, $[3.67] = 3$, $[-8.01] = -9$. Simbol $[\cdots]$ u tekstu označava samo ovu funkciju i ne koristi se u značenju zagrada.

$\operatorname{sgn} x$ Znak broja x, signum. Ako je $x > 0$, tada je $\operatorname{sgn} x = 1$, za $x < 0$ je $\operatorname{sgn} x = -1$ i $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

NZS (m, n) Najmanji zajednički sadržalac prirodnih brojeva m i n.

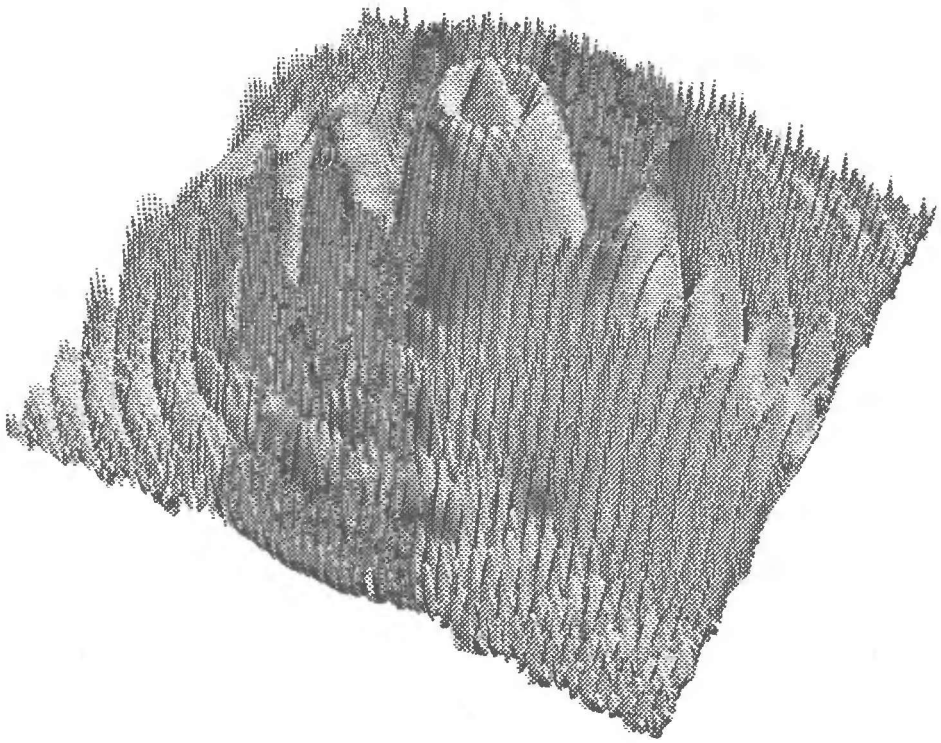
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$.

$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Ostale matematičke oznake objašnjene su na mestima gde se po prvi put pojavljuju i mogu se naći u indeksu.



Beskonačnost! Nijedno drugo pitanje nije tako duboko pokrenulo ljudski duh.
David Hilbert

Glava 1

Uvod u analizu

Veći deo materije koja se izlaže u ovoj glavi biće korišćen u kasnijim delovima knjige. Za sadržaje u odeljcima 1.2 (realne funkcije), 1.3 (kompleksni brojevi i trigonometrijske funkcije) i donekle u 1.4 (eksponencijalna i logaritamska funkcija), pretpostavlja se da su čitaocu poznati odranije, iz srednje škole ili iz kursa Algebre. Stoga izlaganje nije uvek metodičko, za razliku od ostalih delova knjige, već ima za cilj da čitaoca snabde neophodnim definicijama, teoremama i formulama, uz izvestan broj odabranih zadataka.

1.1 Osobine realnih brojeva

1.1.1 Kardinalni broj skupa

U matematičkoj analizi izučavaju se skupovi sa beskonačno mnogo elemenata. Jedan od prvih problema koje imamo sa beskonačnim skupovima je njihovo poređenje. Dva konačna skupa poredimo tako što **prebrojavamo** *elemente oba skupa, tj. svakom elementu dodeljujemo redom prirodne brojeve* $1, 2, \ldots$*; skup kome smo dodelili više prirodnih brojeva ima i više elemenata. Kod beskonačnih skupova možemo samo da imitiramo postupak prebrojavanja na sledeći način:*

- *Kažemo da skupovi* A *i* B *imaju isti* **kardinalni broj** *i pišemo* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$*, ako postoji bijektivno preslikavanje*[1] *koje svakom elementu jednog skupa dodeljuje jedan i samo jedan element drugog skupa.*[2]
- *Ako postoji bijekcija koja preslikava skup* A *na neki pravi podskup skupa* B*, a ne postoji bijekcija koja preslikava skup* B *na skup* A *ili neki njegov*

[1] Definicija bijektivnog preslikavanja data je u 1.2.1 na strani 14.

[2] Ovom definicijom se ne definiše sam kardinalni broj, već samo relacije $=, <, >$ između kardinalnih brojeva. Ideja je, zapravo, da se porede beskonačni skupovi po „količini" elemenata, na sličan način kao konačni.

podskup, kažemo da skup A ima manji kardinalni broj od skupa B (odnosno da skup B ima veći kardinalni broj od skupa A).

- *Skupove koji imaju kardinalni broj koji je ili konačan, ili je jednak kardinalnom broju skupa prirodnih brojeva, nazivamo* **prebrojivim skupovima** *ili* **skupovima sa prebrojivo mnogo elemenata.** *Za beskonačne prebrojive skupove kažemo da imaju kardinalni broj $\aleph_0$ (čita se* **alef nula**).
- *Ako skup A ima isti kardinalni broj kao skup realnih brojeva, kažemo da je* card $A = c$.
- *Ako skup A sadrži n ($n \in \mathbf{N}$) elemenata, kažemo da je* card $A = n$.

1. Dokazati da skupovi celih, parnih, neparnih i prirodnih brojeva imaju isti kardinalni broj.

Rešenje. Preslikavanja definisana pomoću

$$n \mapsto 2n \quad \text{i} \quad n \mapsto 2n+1 \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

su očigledno bijekcije skupa $\mathbf{Z}$ u skup parnih, odnosno neparnih brojeva. Prema tome, skupovi parnih, neparnih i celih brojeva imaju isti kardinalni broj. Za $n \in \mathbf{N}$, preslikavanje

$$2n \mapsto n\,, \quad 2n+1 \mapsto -n$$

je bijekcija skupa $\mathbf{N}$ u skup $\mathbf{Z}$; stoga skup N ima isti kardinalni broj kao skup $\mathbf{Z}$, pa zaključujemo da svi pomenuti skupovi imaju kardinalni broj $\aleph_0$.

2. Ako su A i B skupovi sa konačnim brojem elemenata, tada postojanje bijekcije između A i B znači da je broj elemenata skupova A i B jednak. Izvesti odavde da ne postoji nijedna bijekcija između konačnog skupa i nekog njegovog pravog podskupa. Pokazati na primeru da to ne važi za beskonačne skupove, tj. da beskonačan skup i neki njegov pravi podskup mogu da imaju isti kardinalni broj.

Primedba. Ova osobina je često izvor raznih prividnih paradoksa, koji se protive uobičajenoj intuiciji vezanoj za konačne skupove. Jedan takav paradoks je izložen u sledećem zadatku.

3. Zamislimo da imamo beskonačno mnogo kuglica numerisanih brojevima $1, 2, 3, \ldots$ i jednu praznu kutiju.

a) U 1 minut do 12 sati uzimamo kuglice sa brojevima $1-10$, stavljamo ih u kutiju, a iz kutije izvlačimo kuglicu broj 10. U 1/2 minuta do 12 stavljamo u kutiju kuglice $11-20$, a izvlačimo kuglicu 20. U 1/4 minuta do 12, stavljamo kuglice $21-30$ i izvlačimo kuglicu 30. Postupak nastavljamo do 12 sati (pretpostavljamo da je stavljanje i izvlačenje kuglica trenutno). Koliko će kuglica biti u kutiji u 12 sati?

b) Ponovimo eksperiment sa malom izmenom: U 1 minut do 12 stavljamo kuglice $1-10$, a izvlačimo kuglicu 1. U $1/2$ minuta do 12 stavljamo kuglice $11-20$, a izvlačimo kuglicu 2. U $1/4$ minuta do 12 stavljamo kuglice $21-30$, a izvlačimo kuglicu 3. Koliko će sada biti kuglica u kutiji u 12 sati?

Rezultat. **a)** Beskonačno mnogo. **b)** Nijedna.

4. Neka je A skup sa beskonačno mnogo elemenata i neka je $B = A \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$, gde je $n \in \mathbf{N}$. Dokazati da je card A = card B.

Rešenje. Očigledno je dovoljno dati dokaz za $n = 1$, jer se do proizvoljnog $n \in \mathbf{N}$ tada dolazi indukcijom. Neka je A dati skup sa beskonačno mnogo elemenata i neka je $B = A \cup \{b\}$. Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_k \ldots$ proizvoljan niz elemenata skupa A. Definišimo preslikavanje f skupa B u skup A pomoću

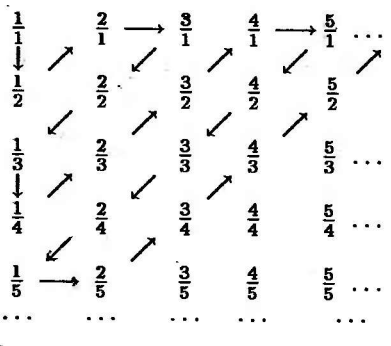
$$f(b) = x_1\,, \quad f(x_k) = x_{k+1}\ (k = 1, 2, \ldots) \qquad f(x) = x\ (x \neq x_1, x_2, \ldots)$$

Funkcija f je očigledno bijekcija, pa je card A = card B.

5. Neka je A skup sa beskonačno mnogo elemenata i neka je B skup za koji je card $B = \aleph_0$. Dokazati da je tada card $A \cup B$ = card A.

6. Dokazati da je skup racionalnih brojeva prebrojiv.

Rešenje. Posmatrajmo sledeću tabelu:



U prvoj vrsti su svi racionalni brojevi koji u imeniocu imaju 1, u drugoj oni koji u imeniocu imaju 2, itd. Dakle, svi racionalni brojevi su upisani u tabelu. Ako tabelu obilazimo putem koji je označen strelicama, obići ćemo sve brojeve. Na ovom putu možemo da preskočimo brojeve koji se ponavljaju; na primer 1 se pojavljuje kao $\frac{1}{1}, \frac{2}{2} \ldots$. Na taj način je uspostavljena bijekcija izmedju skupa racionalnih brojeva i skupa prirodnih brojeva: Prvom racionalnom broju na označenom putu dodeljujemo broj 1, drugom broj 2, itd ... Odavde zaključujemo da je $\mathbf{Q}$ prebrojiv skup.

7. Dokazati da skup tačaka intervala $(0,1)$ nije prebrojiv.

Rešenje. Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz realnih brojeva iz intervala $(0,1)$. Neka je a_n n-ta cifra u decimalnom zapisu broja x_n. Definišimo niz $\{b_n\}$ sa $b_n \equiv a_n + 1 (\mathrm{mod}\ 10)$; na primer, ako je $a_n = 2$, tada je $b_n = 3$; ako je $a_n = 9$, tada je $b_n = 0$. Neka je

$$0.a_1a_2a_3\ldots$$

decimalni zapis nekog broja a. Tada je $a \in (0,1)$, ali se broj a razlikuje od svih brojeva u nizu $\{x_n\}$, jer je njegova cifra na n-tom mestu različita od cifre na n-tom mestu broja x_n. Dakle, nijedan niz $\{x_n\}$ ne sadrži sve realne brojeve iz $(0,1)$, čime je dokazano da skup tačaka intervala $(0,1)$ nije prebrojiv.

8. Dokazati da svi intervali oblika (a,b) ili $[a,b]$ imaju kardinalni broj c.

Rešenje. Neka je

$$f(x) = \frac{b-a}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) + a\,.$$

Funkcija f je bijekcija kojom se $(-\infty, +\infty)$ preslikava u (a,b). Dakle, proizvoljan interval (a,b) ima isti kardinalni broj kao $\mathbf{R}$, tj. kardinalni broj c. Na osnovu zadatka 4, segment $[a,b]$ i interval (a,b) imaju isti kardinalni broj.

9. Dokazati da skup iracionalnih brojeva ima kardinalni broj c.

10. Dokazati da je prebrojiva unija prebrojivih skupova takođe prebrojiv skup.

11. Dokazati da je prebrojiv skup svih intervala (a,b), sa racionalnim a, b.

12. Dokazati da je prebrojiv skup svih polinoma sa racionalnim koeficijentima.

13. Dokazati: Ako je A prebrojiv skup, tada je i $A^n = A \times A \times A \times \cdots \times A$ prebrojiv skup.

14. Dokazati da skup svih nizova čiji su elementi **a)** prirodni brojevi, **b)** proizvoljni realni brojevi, ima kardinalni broj c.

15. Dokazati da skup svih nizova čiji elementi pripadaju skupu $\{0,1\}$ ima kardinalni broj c.

Rešenje. Svaki realan broj x iz intervala $(0,1)$ može se predstaviti u binarnom zapisu:

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots\,, \qquad a_i \in \{0,1\}\,, i = 1,2,\ldots$$

Za svako $x \in (0,1)$ postoji, prema tome, jedan niz $a_1, a_2, \ldots$ koji je sastavljen od nula i jedinica i obrnuto, svakom takvom nizu odgovara jedan realan broj $x \in [0,1]$. Ovaj niz je jedinstven za svako x, sem u prebrojivo mnogo slučajeva u kojima jednom broju x odgovaraju dva niza. (Na primer, broju $1/2$ odgovaraju nizovi $1,0,0,\ldots$ i $0,1,1,\ldots$). Na osnovu zadatka 5, skup svih nizova nula i jedinica i skup $(0,1)$ imaju isti kardinalni broj, a to je c.

16. Dokazati da skup svih nizova čiji elementi pripadaju datom konačnom skupu ima kardinalni broj c.

Uputstvo. Slično kao u zadatku 15, posmatrati zapis broja $x \in (0,1)$ u brojnom sistemu sa osnovom N, gde je N broj elemenata konačnog skupa koji se pominje u postavci zadatka.

17. Dokazati da skup svih funkcija koje preslikavaju interval $[0,1]$ u skup $\{0,1\}$ ima kardinalni broj veći od c.

1.1.2 Algebarski i transcendentni brojevi

- *Za realan broj x kažemo da je* **algebarski broj** *ako postoji neki polinom P sa* **celim** *koeficijentima tako da je $P(x) = 0$.*
- *Realan broj koji nije algebarski naziva se* **transcendentnim brojem**.

18. a) Dokazati da je svaki racionalan broj algebarski. b) Dokazati da skupovi algebarskih i racionalnih brojeva imaju isti kardinalni broj, tj. $\aleph_0$.

Rešenje. a) Neka je $x = p/q$ dati racionalan broj, gde su p, q celi brojevi. Tada je $P(x) = 0$, gde je $P(x) = qx - p$ polinom sa celim koeficijentima, što po definiciji znači da je x algebarski broj.

19. Dokazati da je $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ algebarski, ali nije racionalan broj.

Rešenje. Ako je $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, tada je $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, tj. $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$, odakle se, posle kvadriranja, dobija

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0\,. \tag{1}$$

Prema tome, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je algebarski broj, jer je koren jednačine (1) sa celim koeficijentima. Prema teoremi o racionalnim nulama polinoma (videti 1.2.3), jednačina (1) može da ima racionalan koren oblika p/q samo ako je $p, q \in \{-1, 1\}$, odakle zaključujemo da njen koren $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nije racionalan broj.

Primedba. Iako su svi racionalni brojevi algebarski (zadatak 18), svi algebarski brojevi nisu racionalni, kao što pokazuje ovaj zadatak.

20. Dokazati da su svi brojevi oblika $\sqrt{n}$ algebarski brojevi, gde je $n \in \mathbf{N}$.

21. Dokazati da skup transcendentnih brojeva ima kardinalni broj c.

1.1.3 Poredak u skupu realnih brojeva

Definišemo simbole ∞ *(ili* $+\infty$*) i* $-\infty$ *na sledeći način:*

- $$(\forall x \in \mathbf{R}) \ -\infty < x < +\infty.$$

Usvajamo pravila:

$$-\infty < +\infty \ ,$$

$$\infty + \infty = \infty \ , -\infty - \infty = -\infty \ , a \pm \infty = \pm\infty \quad (a \in \mathbf{R}),$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \ , -\infty \cdot \infty = \infty \cdot -\infty = -\infty \ , a \cdot \pm\infty = \pm(\operatorname{sgn} a) \cdot \infty \quad (a \neq 0).$$

Ostale operacije sa uvedenim simbolima nisu dozvoljene. Na primer, izrazi ∞/∞ *ili* $\infty - \infty$ *nemaju smisla.*

Skup $\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *označavaćemo sa* $\bar{\mathbf{R}}$.

Za realan broj a *kažemo da je* **konačan** *ako želimo da istaknemo da je* $a \neq \pm\infty$.

Neka je A *dati skup realnih brojeva.* **Minimum** *i* **maksimum** *skupa* A *definišemo pomoću*

- $$\min\{x \mid x \in A\} = a \iff a \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, a \leq x,$$
- $$\max\{x \mid x \in A\} = b \iff b \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, b \geq x.$$

Za skup od dva elementa koristimo i oznake $\max(a, b)$, *odnosno* $\min(a, b)$.

Umesto termina minimum i maksimum, koriste se i termini **minimalni element**, *odnosno* **maksimalni element** *skupa.*

Važan deo navedenih definicija je uslov $a \in A$, *odnosno* $b \in A$. *Minimum i maksimum ne moraju uvek da postoje. Na primer, interval* $(0, 1)$ *nema ni minimum ni maksimum.*

Ako ne postoje minimum ili maksimum, uslovi pripadanja skupu se odbacuju, i tražimo a *i* b *van skupa* A.

- *Kažemo da je* $a \in \bar{\mathbf{R}}$ **donja granica** *skupa* A, *ako za svako* $x \in A$ *važi* $a \geq x$. *Za skup koji ima konačnu donju granicu kažemo da je* **ograničen odozdo** *(ili ograničen sa donje strane).*
- *Za* $b \in \bar{\mathbf{R}}$ *kažemo da je* **gornja granica** *skupa* A, *ako za svako* $x \in A$ *važi* $x \leq b$. *Za skup koji ima konačnu gornju granicu kažemo da je* **ograničen odozgo** *(ili ograničen sa gornje strane).*

- *Za skup realnih brojeva A kažemo da je* **ograničen skup** *ako ima konačnu donju i gornju granicu. Skup A je ograničen ako i samo ako postoji pozitivan realan broj M tako da za svako $x \in A$ važi $|x| \leq M$.*

Brojevi a i b u navedenim definicijama mogu da budu realni brojevi ili $\pm\infty$. Svaki skup $A \subset \mathbf{R}$ ima jednu donju granicu $-\infty$ i jednu gornju granicu $+\infty$.

Ako je A dati skup realnih brojeva, definišemo **infimum** *kao najveću donju granicu i* **supremum** *kao najmanju gornju granicu skupa A. Ako su infimum, odnosno supremum konačni, tada važi:*

- $\inf A = a \iff (\forall x \in A)\ (x \geq a) \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ (x < a + \varepsilon)$
- $\sup A = b \iff (\forall x \in A)\ (x \leq b) \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ (x > b - \varepsilon)$

U slučaju da u skupu postoji minimalni element, on je jednak infimumu, a ako postoji maksimalni element, on je jednak supremumu.

U zasnivanju teorije realnih brojeva, polazi se od aksiome kompletnosti skupa realnih brojeva:

- **Aksioma kompletnosti.** *Ako skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ podelimo na dva* **neprazna** *skupa A i B tako da*

$$A \cup B = \mathbf{R}\ ,\ A \cap B = \emptyset\ ,$$

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a \leq b\ ,$$

tada ili u skupu A postoji maksimum ili u skupu B postoji minimum.

Iz navedene aksiome izvodi se sledeća osobina skupa $\mathbf{R}$:

- ✓ *Ako neprazan skup $A \subset \mathbf{R}$ ima konačnu gornju granicu, onda A ima konačan supremum. Ako neprazan skup $A \subset \mathbf{R}$ ima konačnu donju granicu, onda A ima konačan infimum.*

22. Dokazati da za realne brojeve a, b, c, d važe nejednakosti

a) $\max(a+b, c+d) \leq \max(a, c) + \max(b, d)$,

b) $\min(a+b, c+d) \geq \min(a, c) + \min(b, d)$.

Rešenje. Iz $a \leq \max(a, c)$ i $b \leq \max(b, d)$ imamo da je $a + b \leq \max(a, c) + \max(b, d)$. Na isti način, iz $c \leq \max(a, c)$ i $d \leq \max(b, d)$ dobijamo $c + d \leq \max(a, c) + \max(b, d)$, što zajedno sa prethodnom nejednakošću daje nejednakost a). Nejednakost b) se dokazuje analogno.

23. Naći infimum i supremum skupova

$$A=(-1,1)\,,\ B=[-1,1]\,,\ C=(0,+\infty)\,,\ D=(-\infty,0)\,,\ E=\left\{\frac{1}{n}\;\middle|\; n\in\mathbf{N}\right\}.$$

Rezultat. $\inf A=\inf B=-1$, $\sup A=\sup B=1$, $\inf C=0$, $\sup C=+\infty$, $\inf D=-\infty$, $\sup D=0$, $\inf E=0$, $\sup E=1$.

24. Naći infimum i supremum praznog skupa.

Rešenje. Kako prazan skup nema elemenata, implikacija

$$(\forall x)\ x\in A\Rightarrow x\geq a$$

je formalno tačna za svaki realan broj a. Prema tome, svaki realan broj je donja granica skupa $\emptyset$. Odavde sledi da je infimum skupa $\emptyset$ jednak $+\infty$ (najveća donja granica).
Slično tome, $\sup\emptyset=-\infty$.

25. Dokazati da za svaki neprazan skup A važi $\inf A\leq\sup A$.

Rešenje. Kako je $\inf A$ donja granica, a $\sup A$ gornja granica skupa A, ako postoji neko $x\in A$ tada je

$$\inf A\leq x\leq\sup A\,,$$

odakle se dobija traženo tvrđenje.

26. Neka su A i B neprazni skupovi realnih brojeva. Definišimo skup $A+B$ pomoću

$$A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}\,.$$

Dokazati da je $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

27. Neka su A i B neprazni skupovi nenegativnih realnih brojeva. Neka je

$$AB=\{xy\mid x\in A,y\in B\}\,.$$

Dokazati da je $\sup AB=\sup A\cdot\sup B$.
Da li tvrđenje važi ako su elementi skupova A ili B negativni ?

28. Neka je $A\subset\mathbf{R}$ dati skup i neka je $-A=\{-x\mid x\in A\}$. Dokazati da je

$$\sup(-A)=-\inf A\,,\inf(-A)=-\sup A\,.$$

29. Skicirati funkciju $x \mapsto [x]/x$, a zatim ispitati da li je

$$\sup\left\{\frac{[x]}{x} \;\middle|\; x < -1\right\} = \frac{1}{2}, \quad \inf\left\{\frac{[x]}{x} \;\middle|\; x > 1\right\} = \frac{1}{2}.$$

30. Dokazati da je za svako $\varepsilon > 1$, skup

$$S_\varepsilon = \left\{x \;\middle|\; \frac{[x]}{x} < \varepsilon\right\}$$

neograničen sa gornje i sa donje strane.

Rešenje. Za svako $x \in \mathbf{R}$ imamo da je $[x] \leq x$, odakle se za $x > 0$ dobija da je $[x]/x \leq 1$. Prema tome, za svako $\varepsilon > 1$, svi pozitivni realni brojevi pripadaju skupu S_ε, pa ovaj skup nije ograničen sa gornje strane.

Za svako $x \in \mathbf{R}$ važi da je $[x] > x - 1$. Ako je $x < 0$, deljenjem ove nejednakosti sa x dobijamo $[x]/x < 1 - 1/x$. Kako je, za $\varepsilon > 1$ i za $x < 0$,

$$1 - \frac{1}{x} < \varepsilon \iff x < -\frac{1}{\varepsilon - 1},$$

svi realni brojevi iz skupa $(-\infty, -1/(\varepsilon - 1))$ pripadaju skupu S_ε, koji, prema tome, nije ograničen ni sa donje strane.

31. Polazeći od aksiome kompletnosti realnih brojeva, dokazati da između svaka dva realna broja postoji bar jedan realan broj.

32. Nejednakost trougla. Dokazati: Ako su x i y realni brojevi, tada je

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako su x, y istog znaka, ili ako je $x = 0$ ili $y = 0$.

Primedba. Nejednakost trougla važi i za vektore. Ako je $|\cdot|$ oznaka za modul vektora, tada važi

(1) $$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

Ako su $\vec{x}$ i $\vec{y}$ vektori dve stranice trougla, orijentisani tako da se $\vec{y}$ nastavlja na $\vec{x}$, tada je $\vec{x} + \vec{y}$ vektor treće stranice trougla. Nejednakost (1) tada tvrdi da dužina jedne stranice trougla nije veća od zbira dužina ostale dve.

33. Ako su $x_1, \ldots, x_n$ realni brojevi, i $n \in \mathbf{N}$, dokazati da važi

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНВ. БР. 27.673
БИБЛИОТЕКА

34. Dokazati da za svaka dva realna broja x, y, važi

$$|x+y| \geq \big||x|-|y|\big| .$$

35. Neka su $x, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Dokazati:

$$|x-y_1-y_2-\cdots-y_n| \geq |x|-|y_1|-|y_2|-\cdots-|y_n| .$$

36. Dokazati implikaciju

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \Rightarrow |x-a_1|+\cdots+|x-a_n| \geq a_n - a_1 ,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, x$ realni brojevi, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$.

Rešenje. Pretpostavimo da važe nejednakosti sa leve strane implikacije koju treba dokazati. Razlikovaćemo tri slučaja, u zavisnosti od položaja tačke x:
(i) Ako je $x \geq a_n$, tada je

$$|x-a_1|+\cdots+|x-a_n| \geq |x-a_1| = x-a_1 \geq a_n - a_1 .$$

(ii) Za $a_1 < x < a_n$ imamo

$$|x-a_1|+\cdots+|x-a_n| \geq |x-a_1|+|x-a_n| = x-a_1+a_n-x = a_n-a_1 .$$

(iii) Ako je $x \leq a_1$, tada je

$$|x-a_1|+\ldots+|x-a_n| \geq |x-a_n| = a_n - x \geq a_n - a_1 .$$

37. Bernoullijeva nejednakost. Dokazati: Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi istog znaka[1] i veći od -1, tada važi

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n . \tag{1}$$

Iz ovoga izvesti da za svako $x > -1$ i svako $n \in \mathbf{N}$ važi:

$$(1+x)^n \geq 1+nx , \tag{2}$$

pri čemu jednakost važi samo za $n = 1$ ili za $x = 0$.

Rešenje. Dokazaćemo nejednakost (1) matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ važi jednakost. Pretpostavimo da (1) važi za neko $n \in \mathbf{N}$. Ako pomnožimo levu i

[1] Nejednakost važi i ako su neki od brojeva $x_1, \ldots, x_n$ jednaki nuli.

desnu stranu sa $1+x_{n+1}>0$, pri čemu x_{n+1} ima isti znak kao i brojevi $x_1,\dots,x_n$, dobijamo

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\ &=1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+\underbrace{(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1}}_{>0}\\ &>1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}\,,\end{aligned}$$

čime je dokazano da (1) važi i za $n+1$. Na osnovu principa matematičke indukcije, zaključujemo da (1) važi i za svaki prirodan broj n.

Nejednakost (2) se dobija iz (1) za $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$.

Iz navedenog dokaza može se videti i kada nastupa jednakost u (1). Naime, ako je nejednakost stroga ($>$) za neko n, ona će biti stroga i za $n+1$ ako je

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1}>0\,,$$

a to se, u slučaju kada su svi x_i jednaki x, svodi na $x\neq 0$. Kako je za $n=2$ nejednakost stroga za svako $x\neq 0$, a svodi se na jednakost za $x=0$, sledi da se, za $n\geq 2$, nejednakost svodi na jednakost ako i samo ako je $x=0$. Ako je $n=1$, jednakost važi za svako x.

38. Nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine. Neka su a i b dati nenegativni brojevi, $a\leq b$. Dokazati nejednakost

$$a\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq b\,,$$

pri čemu jednakosti važe ako i samo ako je $a=b$.

Rešenje. Nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine se dokazuje kvadriranjem:

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\iff 2ab\leq(a+b)^2\iff 0\leq(a-b)^2\iff\top\,.$$

39. Dokazati da za proizvoljne nenegativne brojeve $x_1,\dots,x_n$ važi

(1) $$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leq\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\,.$$

Primedba. Izraz sa leve strane nejednakosti (1) naziva se **geometrijska sredina**, a izraz sa desne strane je **aritmetička sredina** za n datih brojeva.

Videti i zadatak 607.

40. Ako je $x_1, \ldots, x_n > 0$, dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} .$$

! **Primedba.** Izraz sa leve strane gornje nejednakosti naziva se **harmonijska sredina** brojeva $x_1, \ldots, x_n$. Iz zadataka 39 i 40 proizilazi da je uvek $HS \leq GS \leq AS$, gde su HS, GS, AS respektivno oznake za harmonijsku, geometrijsku i aritmetičku sredinu n datih pozitivnih brojeva.

Rešenje. Uvedimo oznake $y_i = 1/x_i, i = 1, \ldots, n$. Ako su x_i pozitivni, data nejednakost se može napisati u obliku

$$\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} ,$$

a ovo je nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, iz zadatka 39.

1.1.4 Neke osobine prirodnih brojeva

41. Dokazati da se svaki prirodan broj n može napisati u jednom od oblika

$$2k, \quad 4k-1, \quad 4k+1 ,$$

ili u jednom od oblika

$$3k, \quad 6k-1, \quad 6k+1, \quad 6k-2, \quad 6k+2 ,$$

gde je k nenegativan ceo broj.

Rešenje. Svaki prirodan broj može se predstaviti u jednom od oblika $4m, 4m+1, 4m+2, 4m+3$, gde je m nenegativan ceo broj. Brojevi $4m$ i $4m+2$ imaju oblik $2k$, za neko k. Broj $4m+3$ može se napisati u obliku $4(m+1)-1 = 4k-1$. Ovim je dokazan prvi deo tvrđenja. Drugi deo se dokazuje analogno.

42. Dokazati da se svaki prirodan broj n može predstaviti u sistemu sa osnovom b ($b \in \mathbf{N}$), tj. da za neki nenegativan ceo broj j važi

(1) $$n = a_j b^j + a_{j-1} b^{j-1} + \ldots + a_1 b + a_0 ,$$

gde su $a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $i = 0, 1, \ldots, j$.

Rešenje. Daćemo dokaz indukcijom po j. Posmatrajmo intervale oblika

$$A_j = [1, b^{j+1}), \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

Svaki prirodan broj n pripada nekom od intervala A_j. Ako $n \in A_0$, tvrđenje je tačno, jer tada $n \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve

prirodne brojeve u intervalu A_j, tj. da se svako $n \in A_j$ može napisati u obliku (1). Ako $n \in A_{j+1} \setminus A_j$, tada deljenjem n sa b^{j+1} zaključujemo da je

$$n = a_{j+1}b^{j+1} + k, \qquad a_{j+1} \in \{1, 2, \ldots b-1\}$$

za neko $k \in A_j$. Prema pretpostavci, k ima reprezentaciju oblika (1), tako da je

$$n = a_{j+1}b^{j+1} + a_j b^j + a_{j-1}b^{j-1} + \cdots + a_1 b + a_0 .$$

Na osnovu principa matematičke indukcije, tvrđenje važi za prirodne brojeve u svakom intervalu A_j; dakle, za sve prirodne brojeve.

43. Odrediti brojeve A, B, C, tako da za svaki prirodan broj n važi jednakost

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = \frac{An+B}{2^n} + C .$$

Rešenje. Za $n = 1, 2, 3$ iz (1) dobijamo redom:

$$\frac{1}{2} = \frac{A+B}{2} + C, \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{2A+B}{4} + C, \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3A+B}{8} + C.$$

Rešavanjem ovog sistema nalazimo $A = -1$, $B = -2$, $C = 2$.

Ovim još nije dokazano da (1) važi za svako $n \in \mathbf{N}$. Ali, ako je tvrđenje zadatka tačno, onda A, B, C moraju biti jednaki dobijenim vrednostima. Dokazaćemo tvrđenje matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno, jer smo tako i odredili A, B, C. Pretpostavimo da je tačno za neko $n \in \mathbf{N}$, tj,

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = \frac{-n-2}{2^n} + 2 .$$

Odavde imamo da je

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{-n-2}{2^n} + 2 + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{-(n+1)-2}{2^{n+1}} + 2,$$

čime je dokazano da (2) važi za svaki prirodan broj n.

44. a) Dokazati da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva. b) Konstruisati jedan niz x_n čiji su svi članovi prosti brojevi[1].

Rešenje. Dajemo dokaz za deo a). Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji samo konačno mnogo prostih brojeva. Neka su to brojevi (uređeni po veličini, od najmanjeg do najvećeg) $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tada broj $x = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ nije deljiv ni sa jednim prostim brojem sem sa 1; prema tome, x je prost broj. Međutim, kako je očigledno $x > p_n$, tada je x prost broj koji nije jednak ni jednom od prostih brojeva $p_1, \ldots, p_n$, što je kontradikcija sa pretpostavkom.

[1]Prema navodu u knjizi *Ž. Mijajlović, Z. Marković, K. Došen, Hilbertovi problemi i logika, Matematička biblioteka 48 (1986), str. 101*, stari problem nalaženja niza svih prostih brojeva rešen je 1976. godine, tako što je konstruisan algebarski izraz sa 26 koeficijenata, čijim variranjem po skupu prirodnih brojeva dobijamo sve proste brojeve (ali ne u njihovom prirodnom redosledu).

1.2 Osobine realnih funkcija

1.2.1 Osnovne osobine funkcija

Neka je f funkcija koja preslikava skup D u skup $\mathbf{R}$, tj. za svaku tačku $x \in D$ postoji jedna i samo jedna realna vrednost funkcije $f(x)$.

- *Skup D se naziva* **domen** *ili* **oblast definisanosti** *funkcije f.*
- *Ako za svako $x, y \in A \subset D$ važi*

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

kažemo da je funkcija f **monotono neopadajuća funkcija** *na skupu A. Ako je $f(x) < f(y)$ za svako $x < y$, kažemo da je f* **monotono rastuća funkcija**. *Analogno se definišu pojmovi* **monotono nerastuća** *i* **monotono opadajuća** *funkcija. Često ćemo izostavljati reč "monotono", pa ćemo reći da je f rastuća, opadajuća i sl.*

- *Ako postoji realan broj $T \neq 0$ takav da za svako $x \in D$ važi*

$$f(x+T) = f(x),$$

kažemo da je f **periodična funkcija**, *a broj T nazivamo* **period funkcije** *f. Ako je f periodična sa periodom T, tada je i kT period funkcije f, gde je k proizvoljan ceo broj.*

- **Slika** *skupa $A \subset D$ definiše se sa*

$$f(A) = \{f(x) | \, x \in A\}.$$

- **Inverzna slika** *skupa B definiše se sa*

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

- *Neka je funkcija f definisana na skupu A. Ako je $f(A) = B$ i ako se različiti elementi iz A preslikavaju u različite elemente iz B, kažemo da je funkcija f* **bijekcija** *ili* **bijektivno preslikavanje**.
- *Ako je funkcija f bijekcija skupa A na skup B, tada se može definisati* **inverzna funkcija** *f^{-1}, čiji je domen B:*

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) \qquad (x \in B, y \in A).$$

- *Za funkciju f definisanu na simetričnom domenu D (tj. na skupu koji zajedno sa tačkom x sadrži i tačku $-x$), kažemo da je* **parna funkcija** *ako je $f(-x) = f(x)$ za svako $x \in D$. Ako za svako $x \in D$ važi $f(-x) = -f(x)$, kažemo da je funkcija f* **neparna funkcija**. *Grafik parne funkcije je osno simetričan u odnosu na y-osu, dok je grafik neparne funkcije centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.*

- *Funkcija f je* **ograničena** *na skupu $A \subset D$ ako je skup $f(A)$ ograničen.*
- **Jednakost funkcija.** *Za funkcije f i g kažemo da su jednake i pišemo $f = g$ ako imaju isti domen D, i ako je, za svako $x \in D$, $f(x) = g(x)$. Na primer, funkcije $f_1(x) = x^2 - x$ i $g_1(x) = x(x-1)$ su jednake. Funkcije $f_2(x) = x^2/x$ i $g_2(x) = x$ nisu jednake, jer f_2 nije definisana za $x = 0$, dok g_2 jeste, pa ove dve funkcije nemaju isti domen.*
- *Neka su $A_1, \ldots, A_n$ dati neprazni skupovi. Ako je funkcija f definisana na skupu $D = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ sa*

$$f(x) = g_i(x) \quad (x \in A_i) \qquad i = 1, 2, \ldots$$

tada kažemo da je funkcija f **deo po deo jednaka** *funkcijama $g_1, \ldots, g_n$.*

- *Ako je funkcija f definisana na skupu A i ako je $B \subset A$, tada za funkciju g koja je definisana na skupu B pomoću jednakosti $g(x) = f(x)$ kažemo da je dobijena od funkcije f* **restrikcijom domena.**
- *Ako je funkcija g definisana na skupu A i ako je funkcija f definisana na skupu $g(A)$, tada se na skupu A može definisati funkcija h pomoću $h(x) = f(g(x))$. Za funkciju h tada kažemo da je* **kompozicija funkcija** *f i g, u oznaci $h = f \circ g$.*

Kvadratni koren. *Funkcija $x \mapsto x^2$ nema inverznu funkciju na $\mathbf{R}$, jer se realni brojevi x i $-x$ preslikavaju u x^2. Međutim, ako ovu funkciju posmatramo samo na skupu nenegativnih brojeva, možemo da definišemo inverznu funkciju, koju nazivamo kvadratni koren:*

- $$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x \wedge y \geq 0 .$$

Iz ove definicije sledi da je

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x , & \text{za } x \geq 0 , \\ -x , & \text{za } x < 0 . \end{cases}$$

45. Ispitati periodičnost i odrediti najmanji period funkcija

a) $f(x) = A\cos cx + B\sin cx$ $(c \neq 0)$,

b) $g(x) = \sin x^2$.

Rešenje. Iz jednakosti

$$\cos cx = \cos(cx + 2\pi) = \cos c(x + 2\pi/c) ,$$

zaključujemo da je najmanji period funkcije $x \mapsto \cos cx$ jednak $2\pi/c$. Isto važi i za funkciju $x \mapsto \sin cx$, pa je $2\pi/c$ najmanji period funkcije f.

Funkcija g nije periodična. Naime, jednakost $\sin(x+T)^2 = \sin x^2$ implicira da je $2xT + T^2 = 2k\pi$. ili $2x^2 + 2xT + T^2 = \pi + 2k\pi$, ali nijedna od ovih jednakosti ne može da važi za svako $x \in \mathbf{R}$ sa fiksiranim T.

46. Da li su periodične (i sa kojim periodom) funkcije:

a) $f_1(x) = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x$,

b) $f_2(x) = \operatorname{tg} x/2 - \operatorname{tg} x/3$,

c) $f_3(x) = \sin^2 x$,

d) $f_4(x) = \sin x + \sin x\sqrt{2}$,

e) $f_5(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$?

Rezultat. Periodi prve tri funkcije su, redom: 2π, 6π, π. Funkcije f_4 i f_5 nisu periodične.

47. Nacrtati grafike funkcija

$$f(x) = [x], \qquad g(x) = x - [x].$$

Koja od ovih funkcija je periodična i sa kojim periodom?

Rezultat. Funkcija g je periodična, sa periodom 1.

48. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\ , \\ \frac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x} & \text{za ostale vrednosti } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Neka je, za neko $a \in \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) + f(ax)$. Dokazati da je funkcija g periodična ako i samo ako $a \in \mathbf{Q}$.

Rešenje. Primetimo najpre da je funkcija f periodična sa osnovnim (najmanjim) periodom π, što proizilazi iz činjenice da je funkcija $x \mapsto \operatorname{tg} x$ periodična sa osnovnim periodom π.

Neka je $a = p/q$, gde su p i q celi brojevi. Dokažimo da je tada funkcija g periodična sa periodom q. Zaista,

$$g(x+q\pi) = f(x+q\pi) + f\left(\frac{p}{q}(x+q\pi)\right) = f(x) + f\left(\frac{px}{q} + p\pi\right)$$
$$= f(x) + f\left(\frac{p}{q}x\right) = f(x) + f(ax) = g(x)\ .$$

Obrnuto, pretpostavimo da je funkcija g periodična sa periodom $T \neq 0$. Tada je $g(T) = g(0)$, odakle se dobija

(1)
$$f(T) + f(aT) = 2f(0) = 1\ .$$

Kako je $\operatorname{tg}^2 x \geq 0$ za svako $x \in \mathbf{R}$, imamo da je $0 \leq f(x) \leq 1/2$ za svako $x \in \mathbf{R}$, pa je (1) moguće ako i samo ako je $f(T) = f(aT) = 1/2$, tj. ako i samo ako je $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} aT = 0$. Znajući rešenja jednačine $\operatorname{tg} x = 0$, zaključujemo da je $T = q\pi$ i $aT = p\pi$, za neko $p, q \in \mathbf{Z}$, odakle je $a = p/q$, što je i trebalo dokazati.

49. Dokazati da se svaka funkcija definisana na $\mathbf{R}$ može predstaviti kao zbir jedne parne i jedne neparne funkcije.

50. Da li uvek važi a) $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$, b) $f^{-1}(f(A)) = A$?

Rezultat. Jednakost a) ne mora da važi ako A nije podskup skupa $f(D)$, gde je D domen funkcije f. Na primer, za $f(x) = x^2$ i $A = [-1, 1]$ imamo da je $f\left(f^{-1}(A)\right) = [0, 1] \neq A$. Jednakost b) ne mora da važi ako f nije bijekcija na svom domenu. Na primer, ako je $f(x) = x^2$ i $A = [0, 1]$, tada je $f^{-1}(f(A)) = [-1, 1] \neq A$.

51. Ako je f realna funkcija i ako je $A \subset \mathbf{R}$, tada je

$$f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Dokazati.

52. Nacrtati grafik funkcije

$$y = H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0\,, \\ 1/2 & t = 0\,, \\ 1 & t > 0\,. \end{cases}$$

Zatim nacrtati grafike funkcija

$$y = H(t-a) \quad (a > 0)\,, \qquad y = H(t-a) - H(t-b) \quad (b > a > 0)\,,$$

$$y = H(t-a)H(t-b) \quad (b > a > 0)\,, \qquad y = H(\sin t)\,.$$

Primedba. Funkcija H se naziva HEAVISIDEovom funkcijom. Ova funkcija se nekad definiše i bez $1/2$ u nuli, tj. $H(t) = 0$ za $t < 0$ i $H(t) = 1$ za $t \geq 0$.

53. Odrediti domen funkcije

$$y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$

54. Rešiti nejednačinu

$$x \leq 3 - \frac{1}{x-1}\,.$$

Rešenje. Data nejednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leq 0\,.$$

Za $x = 2$ važi jednakost. Ako je $x \neq 2$, poslednja nejednakost je ekvivalentna sa $1/(x-1) < 0$, tj. $x < 1$. Prema tome, data nejednačina je zadovoljena za $x \in (-\infty, 1) \cup \{2\}$.

55. Ako je $x < a$, za koje x i a važi a) $\frac{1}{x} > \frac{1}{a}$, b) $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$?

Rezultat. Ako je $x < a$ i ako su x i a istog znaka, tada je $1/x > 1/a$. Ako je $x < 0, a > 0$, tada je $1/x < 1/a$. Nacrtati sliku.

56. Za razne vrednosti $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ rešiti nejednačinu po x:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{a} .$$

Rezultat. Ako je $a > 0$, tada $x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty)$. Ako je $a < 0$, tada $x \in (a, 0)$.

57. Rešiti nejednačinu

$$\frac{2}{x+2} < \frac{1}{x-3} .$$

Rešenje. Prebacivanjem izraza sa desne strane na levu i svođenjem na zajednički imenilac, dobijamo ekvivalentnu nejednačinu

$$\frac{x-8}{(x+2)(x-3)} < 0 .$$

Označimo sa $y(x)$ izraz na levoj strani poslednje nejednačine. Funkcija y može da menja znak samo u tačkama $-2, 3$ i 8; na osnovu znaka pojedinih faktora možemo da napravimo tablicu znaka funkcije y:

$x \in$	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, 8)$	$(8, +\infty)$
$x-8$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
y	$-$	$+$	$-$	$+$

Iz tablice vidimo da svi brojevi $x \in (-\infty, -2) \cup (3, 8)$ zadovoljavaju datu nejednačinu.

58. Neka su funkcije $u(x), v(x)$ i $f(x)$ monotono rastuće na $\mathbf{R}$. Ako za neko $x \in \mathbf{R}$ važi $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, dokazati da je tada

$$u(u(x)) \leq f(f(x)) \leq v(v(x)) .$$

59. Naći $f(f(x)), g(g(x)), f(g(x))$ i $g(f(x))$, ako je

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1/x$,

c) $f(x) = \begin{cases} 0 , & \text{za } x \leq 0 , \\ x , & \text{za } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 , & \text{za } x \leq 0 , \\ -x^2 , & \text{za } x > 0 \end{cases}$

60. Neka je

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} .$$

Dokazati da je f neparna, monotono rastuća i ograničena funkcija. Zatim dokazati da je

(1) $$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ puta}} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} .$$

Rešenje. Funkcija f je neparna, jer je

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x) .$$

Kako je

$$f(x)^2 = \frac{x^2}{1+x^2} < \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1 ,$$

korenovanjem dobijamo da je $|f(x)| < 1$, pa je f i ograničena funkcija.

Dokažimo sada da je f rastuća funkcija. Kako je f neparna funkcija, dovoljno je dokazati da je monotono rastuća za pozitivne vrednosti argumenata. Neka su $x, y \geq 0$. Tada je

$$\begin{aligned} f(x) < f(y) &\iff \frac{x^2}{1+x^2} < \frac{y^2}{1+y^2} \\ &\iff x^2(1+y^2) < y^2(1+x^2) \iff x^2 < y^2 \\ &\iff x < y \qquad (\text{za } x, y \geq 0) , \end{aligned}$$

odakle sleduje da je f monotono rastuća funkcija.

Jednakost (1) možemo da dokazati metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$, (1) se svodi na

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} ,$$

što je tačno, jer je funkcija f tako i definisana. Pretpostavimo da jednakost (1) važi za neko $n \in \mathbf{N}$. Tada je

$$\begin{aligned} \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n+1 \text{ put}} &= f(\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ puta}}) \\ &= f\left(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right) \quad (\text{po pretpostavci}) \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} , \end{aligned}$$

čime je dokazano da (1) važi za svako $n \in \mathbf{N}$.

61. Odrediti one vrednosti parametra a za koje jednačina

$$x|x+2a|+1-a=0$$

ima jedinstveno (tj. jedno i samo jedno) rešenje. [$a<(\sqrt{5}-1)/2$ ili $a>1$]

62. Date su funkcije

$$f(x)=2x+|x|, \qquad g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|.$$

a) Da li su ove funkcije monotone na $\mathbf{R}$?

b) Dokazati da je $f(g(x))=x$ za svako $x \in \mathbf{R}$. Da li su f i g uzajamno inverzne funkcije?

63. Neka je

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q} \\ -x, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

Dokazati da je $f(f(x))=x$ za svako $x \in \mathbf{R}$, tj. da je funkcija f sama sebi inverzna.

64. Za razne vrednosti parametra a rešiti jednačinu

$$|x|+|x-1|+|x-2|=a\,.$$

Rezultat. Za $a<2$ nema rešenja. Za $2<a<3$ rešenja su $a-1$ i $3-a$; za $a>3$, rešenja su $\pm 1+a/3$. (Nacrtati grafik funkcije $y=|x|+|x-1|+|x-2|$ i tražiti preseke sa pravom $y=a$.)

65. Neka su $a(x)$ i $b(x)$ **nenegativne** funkcije realne promenljive x. Neka je D presek domena funkcija f i g. Dokazati:

$$a(x)>b(x) \iff a(x)^2>b(x)^2 \wedge x \in D\,,$$

$$a(x)>-b(x) \iff x \in D\,,$$

$$-a(x)>b(x) \iff x \in \emptyset\,,$$

$$-a(x)>-b(x) \iff a^2(x)<b^2(x) \wedge x \in D\,.$$

Primedba. Navedene ekvivalencije se koriste pri rešavanju nejednačina kvadriranjem. Iz njih proizilazi da je kvadriranje potrebno (i dozvoljeno) samo ako su obe strane nejednačine istog znaka.

66. Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x^2+x-2} > x\,.$$

$[\, x \in (-\infty,-2] \cup (2,+\infty)\,]$

67. Naći sve realne brojeve x za koje važi

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0\,.$$

$[\, x \in \{-1\} \cup [2,+\infty).\,]$

68. Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2+12x+11}\,.$$

$[\; 2 \leq x \leq 3\;]$

69. Dokazati da je

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

ceo broj i odrediti ga. $[\,-10\,]$

70. Sledećim nizom formula se "dokazuje" da je $1=-1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 1,\\ \sqrt{1\cdot 1} &= \sqrt{(-1)\cdot(-1)},\\ \sqrt{1}\cdot\sqrt{1} &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1},\\ 1\cdot 1 &= i\cdot i,\\ 1 &= -1\,. \end{aligned}$$

Objasniti.

Rešenje. Prelaz sa druge na treću jednakost nije ispravan. Naime, $\sqrt{(-1)\cdot(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1}$, jer je $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ samo ako su oba broja nenegativna.

1.2.2 Razni načini definisanja funkcija

Funkcija $x \mapsto y = f(x)$ može da bude zadata na jedan od sledećih načina:

- **Eksplicitno**, *u obliku $y = f(x)$,*
- **Implicitno**, *u obliku jednačine $F(x, y) = 0$, gde je F data funkcija dve promenljive,*
- **Parametarski**, *u obliku sistema jednačina $x = u(t), y = v(t)$, gde su u i v date funkcije, a t je parametar čiji je domen dat.*

Na primer, eksplicitno zadata funkcija $y = \sqrt{1 - x^2}$ može se zadati implicitno u obliku $x^2 + y^2 = 1$ ($|x| \leq 1, y \geq 0$) ili parametarski u obliku $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

71. Naći $f(x)$ ako je $f(1/x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

Rešenje. Ako stavimo $t = 1/x$, dobijamo $f(t) = 1/t + \sqrt{1 + 1/t^2}$. Posle formalne smene $t = x$ dobijamo izraz za $f(x)$.

72. Ako je $f(x + 1/x) = x^2 + 1/x^2$, naći $f(x)$.

73. Nacrtati geometrijska mesta tačaka (x, y) u ravni za koje važi:

$$\text{a)}\ \min(x, y) = 1\ ,\ \text{b)}\ \min(|x|, |y|) = 1\ ,\ \text{c)}\ \max(|x|, |y|) = 1\ .$$

Da li su ovim graficima definisane funkcije $x \mapsto y(x)$? Ako jesu, odrediti njihove domene.

74. Koja kriva se opisuje jednačinom

$$x^2 + y^2 - 3xy = 0\ ?$$

Koliko funkcija $x \mapsto y$ je definisano ovom jednakošću?

75. Za date $a, b > 0$, koja kriva je definisana sa

$$x = a\cos t\ ,\ y = b\sin t \qquad t \in [0, 2\pi\ ?$$

Ako se promeni skup vrednosti parametra t, ovim jednačinama se može definisati jedna funkcij

1.2.3 Polinomi, stepena i racionalna funkcija

Polinomi. *Polinom (ili realni polinom) stepena n je funkcija P definisana sa*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0), \tag{1}$$

gde su $a_0, \ldots, a_n$ realni brojevi. Stepen polinoma P označavamo sa $\operatorname{dg} P$.

√ *Svaki polinom P stepena n ima tačno n realnih ili kompleksnih korena (ili nula), tj. postoji n rešenja jednačine $P(x) = 0$. Ako su $z_1, \ldots, z_n$ koreni polinoma P stepena n, pri čemu neki od ovih brojeva mogu biti međusobno jednaki, tada važi faktorizacija*

$$P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)\,. \tag{2}$$

- *Ako je z koren polinoma P, tada kažemo da je to* **koren reda k** *ako se u faktorizaciji (2) član $(x - z)$ pojavljuje k puta.*

Prema tome, svakom realnom korenu x_i reda r_i u jednakosti (2) odgovara faktor $(x - x_i)^{r_i}$. Ako je $z \in \mathbf{C}$ kompleksan koren reda s polinoma P, tada je i $\bar{z}$ koren istog reda tog polinoma. Na taj način, svakom paru $z = a + ib, \bar{z} = a - ib$ korena reda r u (2) odgovaraju dva člana čiji je proizvod jednak

$$(x - a - ib)^r (x - a + ib)^r = (x^2 - 2ax + (a^2 + b^2))^r = (x^2 + px + q)^r\,,$$

gde je $p^2 - 4q < 0$. Odavde se dobija sledeći rezultat:

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2}\cdots(x - x_k)^{r_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}\cdots(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}$$

√ **Teorema o racionalnim korenima polinoma.** *Ako polinom (1) ima racionalan koren $x = p/q$, tada $p|a_0$, $q|a_n$.*

Racionalna funkcija. *Ovo je funkcija oblika*

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}\,,$$

pri čemu su koeficijenti $a_0, \ldots, a_m$ i $b_0, \ldots b_n$ dati realni brojevi, $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$; m i n su prirodni brojevi ili nule.

Stepena funkcija. *Pod stepenom (ili potencijalnom) funkcijom podrazumeva se preslikavanje definisano sa*

$$x \mapsto x^a\,,\ x > 0\,,\ a \in \mathbf{R}\,.$$

Ova funkcija je za proizvoljno $a \in \mathbf{R}$ (koje se naziva **eksponent** *stepene funkcije) definisana za pozitivne vrednosti argumenta x. U specijalnom slučaju, ako je $a = m/(2n+1), m, n \in \mathbf{Z}$, tada je ova funkcija definisana i za $x \leq 0$.*

Primetimo da mi, u stvari, ovim nismo definisali stepenu funkciju. Na primer, iako znamo šta znači i kako se izračunava x^3 za dato x, za sada ne možemo precizno da kažemo šta se podrazumeva pod izrazom $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$. O ovim pitanjima biće više rečeno u 1.4.3 i u 5.2.4.

1.2.4 Neke važne formule

Ako je $n \in \mathbf{N}$, $a, b, x \in \mathbf{C}$, *tada važi:*

✓ $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \textit{(Binomna formula)}$$

✓ $$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

✓ $$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \; x \neq 1 \qquad \textit{(Zbir geometrijske progresije)}$$

✓ $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

✓ $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

O VELIKOJ FERMATOVOJ TEOREMI

Celi brojevi x, y, z za koje važi $x^2 + y^2 = z^2$ nazivaju se *Pitagorine trojke brojeva*. Ovakve trojke su zanimale još stare Vavilonce, a u Euklidovim *Elementima* se pominje algoritam za dobijanje beskonačno mnogo takvih trojki. Čitajući knjigu u kojoj se govorilo o Pitagorinim trojkama, francuski matematičar PIERRE FERMAT (1601–1665) je na njenoj margini zapisao: *Nasuprot tome, nemoguće je rastaviti kub na dva kuba, četvrti stepen na dva četvrta stepena, niti uopšte, bilo koji stepen veći od drugog na dva ista takva stepena. Pronašao sam zaista divan dokaz ove teoreme, za koji je ova margina suviše uzana.* FERMATov dokaz nije nikada nađen, ali je njegova teorema (poznata pod nazivom *poslednja* ili *velika* FERMATova *teorema*) postala jedan od najslavnijih problema u istoriji matematike. Ova teorema, dakle, tvrdi da za $n > 2$ ne postoje celi brojevi $x, y, z \neq 0$ takvi da je $x^n + y^n = z^n$.
Velika FERMATova teorema je preko 350 godina bila izazov za mnoge matematičare. EULER, LEGENDRE, GAUSS, ABEL, DIRICHLET, CAUCHY, KUMMER – bili su neki od znamenitih matematičara koji su pokušavali da dokažu ili opovrgnu ovo tvrđenje. Rezultat njihovog rada bili su dokazi za specijalne slučajeve broja n, ili, kasnije, za $2 < n \leq N$, gde se N stalno povećavalo. Slično problemu kvadrature kruga, mnogi – amateri i vrhunski matematičari, nalazili su "dokaze" za koje se kasnije videlo da nisu ispravni. Po analogiji sa aksiomom izbora, pojavljivale su se i pretpostavke da se poslednja FERMATova teorema u stvari ne može dokazati. Za tri ipo veka neizvesnosti, FERMATov problem je izvršio snažan uticaj na razvoj nekih matematičkih disciplina.
Američki matematičar ANDREW WILES sa univerziteta Princeton, dokazao je 1993. godine da je velika FERMATova teorema tačna.

1.3 Kompleksni brojevi i trigonometrijske funkcije

1.3.1 Kompleksni brojevi

- *Kompleksni brojevi se mogu predstaviti u* **algebarskom obliku** $z = x + iy$ *i u* **trigonometrijskom obliku** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

  Realni brojevi x *i* y *nazivaju se redom* **realni deo** *i* **imaginarni deo** *kompleksnog broja, u oznakama* $x = \operatorname{Re} z$ *i* $y = \operatorname{Im} z$.

  Realni brojevi $r \geq 0$ *i* θ *nazivaju se redom* **modul** *i* **argument** *kompleksnog broja, u oznakama* $r = |z|$, $\theta = \arg z$. *Za* $z = 0$ *argument se ne definiše, dok je modul jednak nuli.*

√ *Ako su poznati* r *i* θ, *tada se* x *i* y *određuju iz*

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta \tag{1}$$

Obrnuto, ako su poznati x *i* y, *tada se* r *i* θ *određuju iz*[1]

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{2}$$

Formule (1) i (2) važe i u ravni $\mathbf{R}^2$. *U tom slučaju su* x *i* y *Dekartove koordinate date tačke, dok* r (**radijus**) *i* θ (**polarni ugao**) *čine par* **polarnih koordinata.**

- *Za kompleksan broj* $z = x + iy$ *definiše se* **konjugovano kompleksan broj** $\bar{z} = x - iy$. *Važe jednakosti:*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}\,, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}\,, \quad |z|^2 = z\bar{z}\,.$$

√ *Veoma korisna u primenama je* EULERova *formula:*

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}\,.$$

!

Pomoću ove formule množenje kompleksnih brojeva svodi se na množenje modula i sabiranje argumenata:

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_1(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)\,.$$

Ako su svi faktori međusobno jednaki, dobija se formula za stepen kompleksnog broja:

$$\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\,.$$

[1] Ugao θ može da se odredi samo unutar zadatog intervala dužine 2π. Obično se uzima da $\theta \in [0, 2\pi)$ ili $\theta \in (-\pi, \pi]$.

✓ **Moivreova formula.** *Jednačina po z:* $z^n = re^{i\theta}$ *ima n rešenja koja su data sa*

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}\,, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

76. Nejednakost trougla za kompleksne brojeve. Dokazati da za $u, v \in \mathbf{C}$ važi

$$\big|\,|u| - |v|\,\big| \le |u+v| \le |u| + |v|\,.$$

77. Dokazati da je

$$i^n = \begin{cases} (-1)^{n/2}\,, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ (-1)^{(n-1)/2}i\,, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

Polazeći od jednakosti $1/i = -i$, odrediti i^n ako je n negativan ceo broj.

78. Ako je $(1+z)^6 + z^6 = 0$, dokazati da je $\operatorname{Re} z = -1/2$.

Rešenje. Iz $(1+z)^6 + z^6 = 0$ sledi $(1+z)^6 = -z^6$. Neka je $z = re^{i\varphi}$; $1+z = \rho e^{i\theta}$. Tada je

$$\rho^6 e^{6i\theta} = -r^6 e^{6i\varphi}\,,$$

odakle je $\rho^6 = r^6$ i $6\theta = 6\varphi + \pi + 2k\pi$, za $k \in \mathbf{Z}$. Iz $\rho^6 = r^6$ imamo da je $\rho^2 = r^2$. Dalje je $1+z = 1+r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, pa je $\rho^2 = |1+z|^2 = (1+r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi = 1 + 2r\cos\varphi + r^2$. Kako je $\rho^2 = r^2$, imamo da je $1 + 2r\cos\varphi = 0$, odnosno, $r\cos\varphi = -1/2$, što je i trebalo dokazati.

79. Naći sva rešenja jednačine

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0\,.$$

Rešenje. Na osnovu faktorizacije

$$1 - z^5 = (1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4)$$

imamo da je

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \iff z^5 = 1 \wedge z \neq 1\,.$$

Prema tome, rešenja date jednačine su svi oni kompleksni brojevi koji su rešenja jednačine $z^5 = 1$, sem $z = 1$. Poslednja jednačina se lako rešava (MOIVREova formula):

$$z^5 = 1 \iff z = e^{2k\pi i/5} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)\,.$$

Dakle, sva četiri rešenja date jednačine su $e^{2\pi i/5}$, $e^{4\pi i/5}$, $e^{6\pi i/5}$, $e^{8\pi i/5}$.

80. Rešavajući jednačinu iz zadatka 79 faktorizacijom, izračunati $\cos 2\pi/5$.

Rešenje. Ako pretpostavimo da je

$$1+z+z^2+z^3+z^4=(z^2+az+1)(z^2+bz+1)\,,$$

metodom neodređenih koeficijenata dobijamo da je

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Prema tome, jednačina $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ raspada se na dve kvadratne jednačine

$$z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1=0 \text{ i } z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1=0\,,$$

čija su rešenja

$$(1)\qquad -\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\quad\text{i}\quad\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.$$

S druge strane, iz rešenja zadatka 79 proizilazi da je jedan od četiri kompleksna broja u (1) jednak $e^{2\pi i/5}$, tj. da je jedan od realnih delova u (1) jednak $\cos 2\pi/5$. S obzirom da je $\cos 2\pi/5>0$, zaključujemo da je $\cos 2\pi/5=(\sqrt{5}-1)/4$.

81. Izračunati $\cos 2\pi/17$.

Rezultat.

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}+\frac{\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{16}\,.$$

Primedba. Ovaj rezultat je u vezi sa konstrukcijom pravilnog 17-ugla pomoću lenjira i šestara. Naime, svaka veličina koja se izražava pomoću konačno mnogo osnovnih računskih operacija i kvadratnih korena celih brojeva može se konstruisati pomoću lenjira i šestara.

1.3.2 Trigonometrijske funkcije

Grafici trigonometrijskih funkcija nacrtani su na slici 1. Jedinica mere ugla je radijan (180° = π rad). Neke karakteristične vrednosti funkcije $x\mapsto\sin x$ su date u tabeli:

x	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
$\sin x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2

cos x 0 1/2 √2/2 √3/2

✓ *Navodimo osnovne trigonometrijske jednakosti:*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Ako u ovim formulama stavimo $y = x$, *dobijamo*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Funkcije polovine ugla se nalaze iz:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

pri čemu se uzima znak $+$ *ili* $-$ *u zavisnosti od toga u kom se kvadrantu nalazi* $x/2$.

Iz EULERove *formule* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ *dobijaju se sledeće jednakosti:*

! ✓ $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Pored pomenutih funkcija, definišu se i funkcije

• $$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

✓ **Pretvaranje zbira trigonometrijskih funkcija u proizvod.**

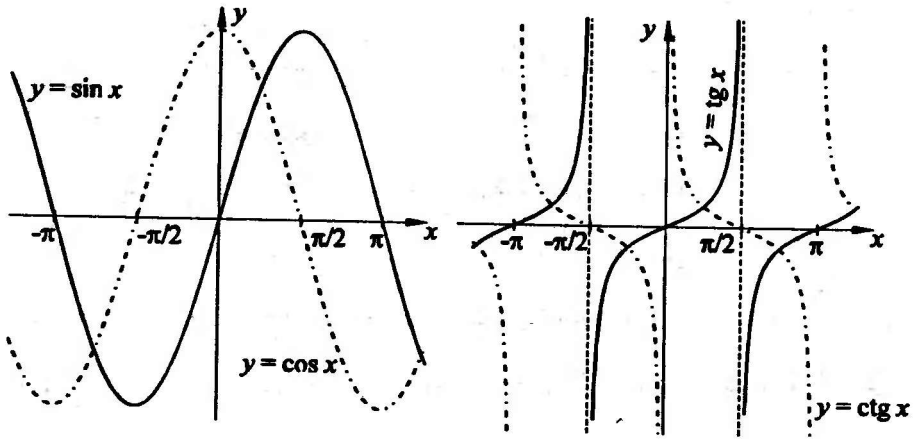
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Gornje jednakosti mogu da se izvedu primenom EULERove *formule. Na primer,*

$$\begin{aligned}
\sin \alpha + \sin \beta &= \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$



Slika 1. *Grafici trigonometrijskih funkcija*

Kombinacija koja nedostaje $(\sin\alpha + \cos\beta)$ *svodi se na postojeće formule pomoću jednakosti*

$$\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha - \beta + \pi/2}{2}\cos\frac{\alpha + \beta - \pi/2}{2}\,.$$

√ **Pretvaranje proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir.**

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$$

Ove formule se izvode iz prethodnih ili obrnuto. Na primer, znajući da je

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$

smenom $u = (\alpha+\beta)/2$, $v = (\alpha-\beta)/2$, *imamo, čitajući unatrag:*

$$2\sin u\cos v = \sin\alpha + \sin\beta = \sin(u+v) + \sin(u-v)\,.$$

√ *Pomoću jedne od trigonometrijskih funkcija mogu se izraziti i ostale (sa*

tačnošću do znaka):

$$\sin x = t : \cos x = \pm\sqrt{1-t^2}, \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{sgn}(\cos x)\cdot\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\cos x = t : \sin x = \pm\sqrt{1-t^2}, \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{t},$$

$$\operatorname{tg} x = t : \sin x = \operatorname{sgn}(\cos x)\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t : \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

U prve tri formule znak se određuje prema tome u kom kvadrantu se nalazi x.

82. Dokazati da $\sin x$ i $\operatorname{tg}(x/2)$ imaju isti znak za svako $x \in \mathbf{R}$. Dokazati isto i za $\cos x$ i $1 - \operatorname{tg}^2(x/2)$.

Rešenje. Prvo tvrđenje sleduje iz

$$\sin x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = 2\sin^2\frac{x}{2} \geq 0.$$

Drugo tvrđenje se dobija iz

$$\cos x(1 - \operatorname{tg}^2 x/2) = \frac{\cos^2 x}{\cos^2(x/2)} \geq 0.$$

83. Odrediti sva rešenja jednačine

$$\sin 3x = \cos 2x.$$

Rešenje. Data jednačina se može napisati u obliku

$$\sin 3x - \cos 2x = 0 \iff \sin 3x - \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0.$$

Ako pretvorimo razliku trigonometrijskih funkcija u proizvod, dobijamo jednačinu

$$2\cos\left(\frac{3x + \pi/2 - 2x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x - \pi/2 + 2x}{2}\right) = 0.$$

Odavde je ili prvi ili drugi faktor jednak nuli, što daje dva skupa rešenja:

$$\frac{3x + \pi/2 - 2x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\frac{3x - \pi/2 + 2x}{2} = m\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2m\pi}{5} \quad (m \in \mathbf{Z}).$$

84. Izračunati $\cos\alpha$ ako je

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

85. Dokazati:

$$\cos^2\frac{\pi}{32}=\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}\,.$$

86. Izračunati $\sin^2 2\alpha$ ako je

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7\,.$$

87. Za koje $x, y\in\mathbf{R}$ važi

$$\operatorname{tg}^2 x+\sec^2 y=\operatorname{tg}^2 y+\sec^2 x\ ?$$

88. Ako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, tada je

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Dokazati.

89. Dokazati: Ako je $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, tada je

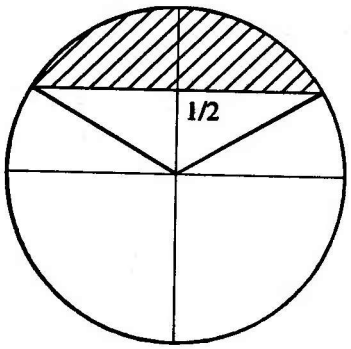
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=1\,.$$

90. Naći sve realne brojeve x koji zadovoljavaju **a)** jednačinu $\sin x=1/2$, **b)** nejednačinu $\sin x>1/2$, **c)** nejednačinu $\sin x<1/2$. !

Rešenje. **a)** Jednačina $\sin x=1/2$ ima dva rešenja na osnovnom intervalu $[0,2\pi]$; to su $\pi/6$ i $5\pi/6$. Zbog periodičnosti, sva rešenja jednačine su $\pi/6+2k\pi$ i $5\pi/6+2m\pi$, gde su k i m proizvoljni celi brojevi.

b) Na slici 2 prikazan je skup rešenja nejednačine $\sin x>1/2$ u osnovnom intervalu. Sva rešenja ove nejednačine čine skup

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\,.$$



Slika 2. *Rešenja nejednačine* $\sin x > 1/2$.

c) Rešenja nejednačine $\sin x < 1/2$ su, naravno, svi realni brojevi koji nisu navedeni kao rešenja pod a) ili b). Da bi se ovo napisalo u kompaktnom obliku, uočimo da je jedan skup rešenja dat sa $x \in [5\pi/6, 2\pi+\pi/6]$; svi ostali skupovi rešenja se dobijaju dodavanjem $2k\pi$. Prema tome, ova nejednačina je zadovoljena za

$$x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right) .$$

91. Naći sve realne brojeve x za koje važi

$$1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0 , \quad \cos x \geq 0 .$$

Rešenje. Datu jednakost možemo da napišemo u ekvivalentnom obliku

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 .$$

Smenom $t = \sin x$ dobija se kvadratna jednačina $2t^2 + 5t - 3 = 0$, čija su rešenja $t = -3$ i $t = 1/2$. Naravno, samo $t = 1/2$ može biti rešenje, odakle se dobija $x = \pi/6 + 2n\pi$ ili $x = 5\pi/6 + 2m\pi$, gde su m, n celi brojevi. Jedino prvi skup rešenja zadovoljava i uslov $\cos x \geq 0$, tako da je rešenje zadatka dato sa $x = \pi/6 + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

92. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin(x + x^2) - \sin x^2 = \sin x$$

na intervalu $[2, 3]$.

Rezultat. $x_1 = \sqrt{2\pi}$, $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{8\pi + 1}}{2}$.

93. Rešiti jednačinu

$$|\sin x| = \sin x + 2\cos x\ .$$

Rezultat. $x = \pi/2 + 2k\pi$, $x = -\pi/4 + 2n\pi$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

94. Za koje vrednosti realnog parametra a jednačina

$$\left(a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8 - ax} = 0$$

ima na intervalu $[-2, 3]$ neparan broj različitih rešenja po x ?

Rezultat. $a \in (-\infty, -4] \cup \{1\} \cup [8/3, 4) \cup (4, +\infty)$.

95. Naći sve cele brojeve m za koje važi

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}(3m - \sqrt{9m^2 + 160m + 800}\,)\right) = 1\ .$$

Rezultat. $m = -31$ i $m = -7$.

96. Rešiti jednačinu

$$(1 + \operatorname{tg}^2 2x)\left(\sin\frac{21x}{4}\cos\frac{7x}{4} + \sin\frac{5x}{4}\cos\frac{x}{4}\right)$$
$$= \sec^2 2x\left(\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5x}{4} - \sin\frac{7x}{4}\cos\frac{21x}{4}\right)\ .$$

Rezultat. $x = k\pi/2$, $x = \pi/6 + n\pi/3$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

97. Dokazati da se, za dato A, B, x, mogu odrediti $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ tako da važi

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \alpha) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x - \beta)\ .$$

Rešenje. Polazimo od jednakosti

$$(1)\qquad A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos x\right)\ .$$

Neka je

$$C = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ ,\quad S = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ .$$

Kako je $|C| \leq 1$, $|S| \leq 1$ i $C^2 + S^2 = 1$, postoji neko $\alpha \in [0, 2\pi)$ tako da je

$$\cos\alpha = C, \quad \sin\alpha = S,$$

pa se iz (1) dobija

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha).$$

Na isti način, postoji $\beta \in [0, 2\pi)$ tako da je

$$\sin\beta = C, \quad \cos\beta = S,$$

odakle nalazimo da je

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\,(\sin\beta\sin x + \cos\beta\cos x) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\beta).$$

98. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}.$$

Rešenje. Imamo da je

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)$$
$$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right),$$

tako da se data jednačina može napisati u obliku

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}.$$

Rešenja poslednje jednačine su

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \qquad k, m \in \mathbb{Z}.$$

99. Izraziti $\sin 3x$ i $\cos 3x$ pomoću $\sin x$ i $\cos x$.

Rešenje. Kako je

$$\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x,$$

izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x, \quad \sin 3x = 3\cos^2 2x\sin x - \sin^3 x.$$

100. Dokazati da je

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad \sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Rešenje. Uvedimo oznake

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\cos kx\,,\quad S_2=\sum_{k=1}^{n}\sin kx\,.$$

Zbir S_1+iS_2 je zbir geometrijske progresije:

$$\begin{aligned}S_1+iS_2&=\sum_{k=1}^{n}(\cos kx+i\sin kx)=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=e^{ix}(1+e^{ix}+e^{2ix}+\ldots+e^{i(n-1)x})\\&=e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\frac{1-e^{-ix}}{1-e^{-ix}}\\&=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-\cos nx-i\sin nx)(1-\cos x+i\sin x)}{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}\\&=\frac{(1-\cos nx-i\sin nx)(\cos x+i\sin x-1)}{2(1-\cos x)}\\&=\frac{(\cos x-1+\cos nx-\cos(n+1)x)+i(\sin x+\sin nx-\sin(n+1)x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}\,.\end{aligned}$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela, uz primenu formulâ za pretvaranje proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir, dobijaju se tražene jednakosti.

101. Naći zbir

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\qquad(n=2,3,\ldots)$$

Rešenje. Kako je

$$\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3k\pi}{n}-\sin\frac{k\pi}{n}\right)\,,$$

imamo da je

$$2S=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{3k\pi}{n}-\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=S_1-S_2\,.$$

Primenom formule koju smo dokazali u zadatku 100, ili direktno pomoću kompleksnih suma, može se videti da je

$$S_1=\frac{\cos\frac{3\pi}{2n}}{\sin\frac{3\pi}{2n}}\,,\quad S_2=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\,.$$

Odavde se, posle sređivanja i primene osnovnih identiteta, dobija:

$$S = \frac{1}{2}(S_1 - S_2) = -\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{3\pi}{2n}} .$$

102. U zavisnosti od realnog parametra a rešiti jednačinu po nepoznatoj x:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos 2x + i\sin 2x)\cdots(\cos nx + i\sin nx) = a \quad (n \in \mathbf{N}) .$$

Rešenje. Data jednačina je ekvivalentna sa

$$\cos(x + 2x + \cdots + nx) + i\sin(x + 2x + \cdots + nx) = a ,$$

odnosno,

$$\cos\frac{n(n+1)}{2}x + i\sin\frac{n(n+1)}{2}x = a . \tag{1}$$

Ako je $|a| \neq 1$, jednačina (1) nema rešenja, jer se sa leve strane nalazi broj modula 1.

Za $a = 1$ dobijamo da je $x = 4k\pi/n(n+1)$, dok su rešenja za $a = -1$ data sa $x = 2(2k+1)\pi/n(n+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

103. Dokazati nejednakosti

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad x \in (0, \pi/2), \tag{1}$$

$$|\sin x| < |x| \qquad x \in \mathbf{R}, x \neq 0, \tag{2}$$

$$|x| < |\operatorname{tg} x| \qquad 0 < |x| < \pi/2. \tag{3}$$

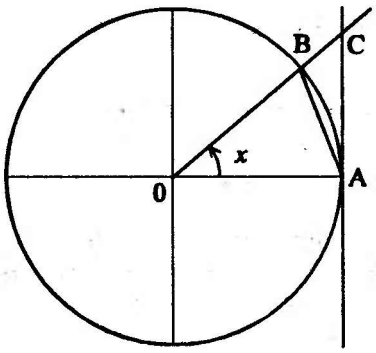
Rešenje. U krugu poluprečnika r (videti sliku 3) sa centrom u tački O, neka su OA i OB dva poluprečnika koja zaklapaju oštar ugao x, i neka je AC tangenta na krug u tački A. Očigledno je da je površina trougla OAB manja od površine kružnog isečka OAB, a ova je manja od površine trougla OAC. Kako je površina trougla OAB jednaka $\frac{1}{2}r^2\sin x$, površina kružnog isečka OAB jednaka $r^2x/2$, a površina trougla OAC jednaka $r^2\operatorname{tg} x/2$, imamo da je

$$\frac{1}{2}r^2\sin x < \frac{1}{2}r^2x < \frac{1}{2}r^2\operatorname{tg} x ,$$

odakle, deljenjem sa $r^2/2$, dobijamo nejednakosti (1).

Nejednakost (2) sleduje iz leve nejednakosti u (1) za $x \in (0, \pi/2)$. Za $x = \pi/2$, ova nejednakost se može direktno proveriti.

Ako je $x \in [-\pi/2, 0)$, tada $|x| \in (0, \pi/2]$ i prema dokazanom važi $|\sin x| = \sin|x| < |x|$. Prema tome, nejednakost (2) je dokazana za svako $x \neq 0$ za koje je $|x| \leq \pi/2$.



Slika 3. *Uz zadatak 103*

Ako je $|x| > \pi/2$, tada je

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} < \frac{2}{\pi} < 1 ,$$

odakle je, i u ovom slučaju, $|\sin x| < |x|$.

Nejednakost (3) se, za $x \in (0, \pi/2)$, dobija iz (1); ako je $x \in (-\pi/2, 0)$, tada je $|x| \in (0, \pi/2)$, pa je $|x| < \operatorname{tg}|x| = |\operatorname{tg} x|$.

104. Dokazati da za svako $x, y \in \mathbf{R}$ važi

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| .$$

Odrediti x, y za koje važi jednakost.

Rešenje. Koristeći formulu za pretvaranje razlike sinusa u proizvod, nalazimo

$$(1) \qquad |\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+y}{2}\right|$$

Iz zadatka 103 proizilazi da je

$$(2) \qquad \left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq \left|\frac{x-y}{2}\right| ,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $x = y$. Pored toga,

$$(3) \qquad \left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \leq 1 .$$

Ako (2) i (3) zamenimo u (1), dobijamo traženu nejednakost.

Jednakost će važiti ako i samo ako važi jednakost u (2) i (3) istovremeno; dakle ako je $x = y$ i $|\cos x| = 1$, tj. ako je

$$x = y = k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z}) .$$

105. Dokazati da jednačina $\sin x = x$ ima jedinstveno rešenje $x = 0$.

106. Ako su a, b, x realni brojevi, dokazati:

a) $|\sin(a+b)| \leq |\sin a| + |\sin b|$,

b) $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

Rešenje. **a)** Kako je $|\sin(a+b)| = |\sin a \cos b + \cos a \sin b| \leq |\sin a \cos b| + |\cos a \sin b| \leq |\sin a| + |\sin b|$, tražena nejednakost je dokazana.

b) Matematičkom indukcijom: Za $n = 1$, tvrđenje je tačno. Ako pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n \in \mathbf{N}$, tada, koristeći i rezultat pod a), imamo

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)x| = |\sin(nx+x)| &\leq |\sin nx| + |\sin x| \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x| , \end{aligned}$$

tj., tvrđenje važi i za $n+1$.

107. Dokazati da za svako $x \in \mathbf{R}$ važi

$$|\cos x| + |\sin x| \geq 1 .$$

Rešenje. Primenom EULERove formule i nejednakosti trougla za kompleksne brojeve, nalazimo

$$1 = |e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| \leq |\cos x| + |i \sin x| = |\cos x| + |\sin x| .$$

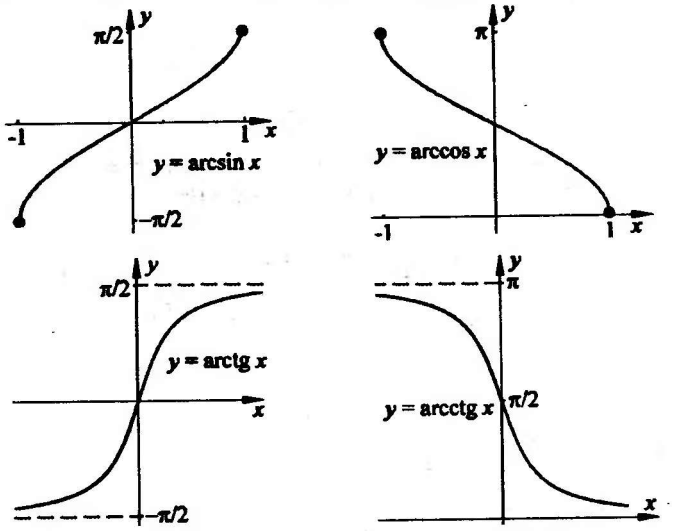
1.3.3 Inverzne trigonometrijske funkcije

Osnovne trigonometrijske funkcije su periodične i zato nemaju inverznu funkciju na skupu $\mathbf{R}$. *Na primer, jednačina (po* y*)* $\sin y = x$ *ima beskonačno mnogo rešenja* y *za svako dato* $x \in [-1, 1]$. *Međutim, ako tražimo rešenje ove jednačine samo na nekom od intervala dužine* π *na kome je funkcija* $y \mapsto \sin y$ *monotona, dobićemo jedno i samo jedno rešenje za svako* $x \in [-1, 1]$. *Ako se rešenje traži na segmentu* $[-\pi/2, \pi/2]$, *dobija se funkcija* $x \mapsto \arcsin x$*:*

- $$y = \arcsin x \iff x = \sin y \ \wedge \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Na sličan način se definišu ostale inverzne trigonometrijske funkcije:

- $$y = \arccos x \iff x = \cos y \ \wedge \ y \in [0, \pi] ,$$
- $$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} x \ \wedge \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$
- $$y = \operatorname{arcctg} x \iff x = \operatorname{ctg} y \ \wedge \ y \in (0, \pi) .$$



Slika 4. *Inverzne trigonometrijske funkcije*

Iz ovih definicija proizilazi da za svako $x \in \mathbf{R}$ *važi, na primer,*

$$\sin(\arcsin x) = x \ ,$$

dok je samo za $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ *tačna jednakost*

$$\arcsin(\sin x) = x \ .$$

Analogna tvrđenja važe i za funkcije $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ *i njima inverzne funkcije.*

Grafici ovih funkcija dati su na slici 4.

108. Izračunati $\cos \arcsin(-1/2)$.

Rešenje. Neka je $\arcsin(-1/2) = \alpha$. Tada je $\cos \arcsin(-1/2) = \cos\alpha$, i zadatak može da se formuliše na sledeći način: Poznato je da je $\sin\alpha = -1/2$ i da je $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Odrediti $\cos\alpha$.

Ovako formulisan zadatak nije teško rešiti: Kako je $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos\alpha$ je nenegativan broj, pa je

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2 \ .$$

109. Izračunati: a) $\operatorname{tg} \arcsin(12/13)$, b) $\operatorname{ctg} 2 \arcsin(2/3)$.

Rezultat. a) $12/5$, b) $1/4\sqrt{5}$.

110. Izračunati $\sin 2\arccos(3/5)$. [24/25.]

111. Izračunati $\sin(\arcsin(3/5) + \arcsin(8/17))$.

Rešenje. Neka je $\arcsin 3/5 = \alpha$ i $\arcsin 8/17 = \beta$. Uglovi α i β se nalaze u intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ i kosinusi su im nenegativni. Prema tome,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ &= \frac{3}{5}\sqrt{1-(8/17)^2} + \frac{8}{17}\sqrt{1-(3/5)^2} = \frac{77}{85}\,.\end{aligned}$$

112. Dokazati da je

a) $\operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3 = \operatorname{arctg} 1$,

b) $2\operatorname{arctg} 1/5 + \operatorname{arctg} 1/4 = \operatorname{arctg} 32/43$.

113. Dokazati da su $\cos\arcsin x$ i $\sin\arccos x$ nenegativni za svako $x \in [-1, 1]$. Da li isto važi i za $\operatorname{ctg}\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{tg}\operatorname{arcctg} x$ ako $x \in [-1, 1]$ ili $x \in (-\infty, +\infty)$?

114. Dokazati da za svako $x \in [0, 1]$ važi

$$2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1) = 0\,.$$

115. Dokazati da je $2\arcsin(2/7) = \arccos(41/49)$.

116. Dokazati jednakost:

(1) $$2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi\operatorname{sgn} x\,,$$

gde je $|x| \geq 1$.

Rešenje. Neka je

$$\operatorname{arctg} x = \alpha\,,\quad \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \beta\,.$$

Po definiciji inverznih trigonometrijskih funkcija, važi sledeće:

(2) $$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,,\quad \operatorname{tg}\alpha = x\,,$$

(3) $$\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,,\quad \sin\beta = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

U uvedenim oznakama, sa leve strane jednakosti (1) je izraz $2\alpha+\beta$. Dokazaćemo da je $\sin(2\alpha+\beta)=0$:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha+\beta) &= \sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\beta\\ &= 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha\cos\beta+(2\cos^2\alpha-1)\sin\beta \qquad (4)\end{aligned}$$

Iz (2) sleduje da je

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+x^2}\,,$$

Iz (3) zaključujemo da je $\cos\beta>0$, pa je

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}=\frac{|1-x^2|}{1+x^2}\\ &= \frac{x^2-1}{1+x^2} \qquad (\text{jer je } |x|\geq 1)\,.\end{aligned}$$

Smenom u (4) dobijamo:

$$\sin(2\alpha+\beta)=2x\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2-1}{1+x^2}+\left(2\frac{x^2}{1+x^2}-1\right)\frac{2x}{1+x^2}=0\,,$$

odakle je

$$2\alpha+\beta=k\pi, \qquad (k\in\mathbf{Z})\,. \qquad (5)$$

Međutim, kako uglovi α i β pripadaju intervalu $[-\pi/2,\pi/2]$, $2\alpha+\beta$ je u intervalu $[-3\pi/2,3\pi/2]$, tako da je (5) moguće jedino za $k=\pm 1$. Pored toga, $k=1$ ako i samo ako su oba ugla pozitivna a $k=-1$ ako i samo ako su oba ugla negativna. Iz (2) i (3) dobijamo da su oba ugla pozitivna ako je $x>0$, a oba su negativna ako je $x<0$. Prema tome, jednakost (5) može se napisati u obliku

$$2\alpha+\beta=\pi\operatorname{sgn}x\,,$$

što je i trebalo dokazati.

117. Dokazati da je

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\,.$$

118. Dokazati da je za svako $x \in \mathbf{R}$,

$$\arccos|\cos x| - \arcsin|\sin x| = 0 .$$

Uputstvo. Pokazati da je funkcija sa leve strane jednakosti periodična sa periodom π, pa zatim dokazati traženu jednakost za $x \in [0, \pi]$.

119. Dokazati da za svako $x \in [-1, 1]$ važi

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Rešenje. Uvedimo oznake

$$\alpha = \arcsin x, \quad \beta = \arccos x .$$

Tada je

$$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \sin\alpha = x, \quad \cos\alpha = +\sqrt{1-x^2} ,$$

$$\beta \in [0, \pi], \quad \cos\beta = x, \quad \sin\beta = +\sqrt{1-x^2} .$$

Odavde je

(1) $$\cos(\arcsin x + \arccos x) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0 .$$

Ako je $x \geq 0$, tada je $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, pa je $\alpha + \beta \in [0, \pi]$. Za $x < 0$ imamo da je $\alpha \in [-\pi/2, 0)$, $\beta \in (\pi/2, \pi]$ i $\alpha + \beta \in (0, \pi)$. Dakle, u oba slučaja važe nejednakosti

$$0 \leq \alpha + \beta \leq \pi ,$$

što, zajedno sa (1) daje $\arcsin x + \arccos x = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

120. Dokazati da je, za svako $x \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} .$$

121. Dokazati da za svako $x \in [-1, 1]$ važi

$$\arccos\sqrt{1-x^2} = (\operatorname{sgn} x)\arcsin x .$$

Rešenje. Neka je

$$\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2}, \qquad \beta = \arcsin x .$$

Kako je $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$, kosinus ovog ugla je nenegativan, pa je

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-x^2} = \cos\alpha\,.$$

Prema tome, uglovi α i β imaju jednake kosinuse.

Po definiciji funkcije $x \mapsto \arccos x$, ugao α pripada intervalu $[0,\pi]$; kako je $\cos\alpha \geq 0$, imamo da je $\alpha \in [0,\pi/2]$, za svako $x \in [-1,1]$.

Ako je $x = \sin\beta \geq 0$, tada ugao β pripada intervalu $[0,\pi/2]$. U ovom slučaju, uglovi α i β pripadaju istom (prvom) kvadrantu; iz $\cos\alpha = \cos\beta$ sledi $\alpha = \beta$.

Ako je $x < 0$, ugao β se nalazi u četvrtom kvadrantu; iz jednakosti kosinusa zaključujemo da je $\alpha = -\beta$.

Ovim je data jednakost dokazana.

122. Ako su $x, y \in \mathbf{R}$ istog znaka, dokazati da je

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}\,.$$

Da li ova jednakost važi i ako su x, y različitog znaka?

Rešenje. Ako su x, y nenegativni realni brojevi, tada se $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arctg} y$ nalaze u intervalu $[0,\pi/2)$, pa je $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y \in (-\pi/2,\pi/2)$. Ako stavimo $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arctg} y = \beta$, tada je

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{x-y}{1+xy}$$

i, kako je $\alpha - \beta \in (-\pi/2,\pi/2)$, imamo da je

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}\,,$$

što je i trebalo dokazati.

Slučaj kada su x, y negativni dokazuje se analogno.

Data jednakost ne važi u opštem slučaju. Na primer, za $x = \sqrt{3}$ i $y = -\sqrt{3}$ imamo da je

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \frac{2\pi}{3}\,, \qquad \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} = -\frac{\pi}{3}\,.$$

123. Ako je $xy \neq 1$, dokazati da je

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\cdot\pi\,,$$

gde je

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & xy < 1 \\ 1 & xy > 1, x > 0, y > 0 \\ -1 & xy > 1, x < 0, y < 0 \end{cases}$$

124. Da li za svako $t \in [0,1]$ važi

a) $\arccos\sqrt{t} + \arccos\sqrt{1-t} = \frac{\pi}{2}$, b) $\arccos\sqrt{1-t} = \arcsin\sqrt{t}$?

Rezultat. a) Da. b) Da. Videti zadatak 121.

125. Neka je

(1) $$\operatorname{tg}\alpha = t\ .$$

Odrediti α ako: a) $\alpha \in (-\pi, \pi]$; b) $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Rešenje. Dati podaci nisu dovoljni da bi se odredio ugao α. Na primer, uglovi $\alpha = \pi/4$ i $\beta = -3\pi/4$ imaju jednake tangense (= 1), i oba ugla pripadaju intervalu $(-\pi, \pi]$. Nije teško videti da za svaki dati ugao α postoji ugao β koji ima istu vrednost tangensa, i koji se nalazi u simetričnom kvadrantu.

Prema tome, zadatak uvek ima dva rešenja. Ako je $t > 0$, tada su $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ istog znaka, pa α može da bude ili u I ili u III kvadrantu. U slučaju $t < 0$, α je u II ili u IV kvadrantu. Ako je $t = 0$, tada je $\sin\alpha = 0$, pa se odavde dobijaju takođe dva rešenja. Potrebno je sada izraziti ta rešenja pomoću t. Očigledno, rešenje zavisi od toga da li se uzima da $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ili $\alpha \in [0, 2\pi)$.

a) Ako se α nalazi u I ili IV kvadrantu, na osnovu definicije funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ imamo da je $\alpha = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arctg} t$. Za ugao α u III kvadrantu može se odrediti ugao $\beta = \pi + \alpha$ u I kvadrantu koji ima isti tangens kao α. Dakle, $\beta = \operatorname{arctg} t$, odakle je $\alpha = \beta - \pi = -\pi + \operatorname{arctg} t$. Slično tome, za ugao α u II kvadrantu možemo da odredimo ugao $\beta = \alpha - \pi$ koji se nalazi u IV kvadrantu i koji ima isti tangens kao i α. Odavde je $\alpha = \beta + \pi = \pi + \operatorname{arctg} t$. Prema tome, imamo:

$$t > 0 \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{arctg} t, \alpha_2 = -\pi + \operatorname{arctg} t$$
$$t < 0 \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{arctg} t, \alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} t$$
$$t = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi\ .$$

b) U slučaju kada uglovi pripadaju intervalu $[0, 2\pi)$, sličnim zaključivanjem dobija se, vodeći računa o tome da je $\operatorname{arctg} t$ uvek u intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$:

$$t > 0 \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{arctg} t, \alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} t$$
$$t < 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2\pi + \operatorname{arctg} t, \alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} t$$
$$t = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi\ .$$

Primedba. Ako su dozvoljene i vrednosti $t = \pm\infty$, šta su tada rešenja jednačine (1) ?

126. Za dato $t \in \mathbf{R}$, odrediti sve realne brojeve x za koje je $\operatorname{tg} x = t$.

Rezultat. $x = \operatorname{arctg} t + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

127. Izraziti polarni ugao $\varphi \in (-\pi, \pi]$ kao funkciju Dekartovih koordinata x, y.

Rešenje. Kako je $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$, imamo da je

$$\operatorname{tg}\varphi = y/x \,. \tag{1}$$

Međutim, ova jednakost ne određuje jednoznačno ugao φ. Česta greška je da se kaže da iz (1) sledi da je $\varphi = \operatorname{arctg} y/x$, što nije tačno, jer su time obuhvaćeni samo polarni uglovi iz oblasti u kojoj funkcija arctg uzima vrednosti; dakle iz $(-\pi/2, \pi/2)$. Primetimo da iz $x = r\cos\varphi$ sledi da $\cos\varphi$ ima isti znak kao i x; slično tome, $\sin\varphi$ ima isti znak kao y. Iz toga se može jednoznačno odrediti kvadrant u kome se nalazi φ, pa se pomoću (1) može odrediti i φ na isti način kao u zadatku 125 na strani 44:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x \,, & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} y/x \,, & x < 0 \,,\ y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} y/x \,, & x < 0 \,,\ y < 0 \\ \pi \,, & x < 0 \,, y = 0 \\ \pi/2 \,, & x = 0 \,,\ y > 0 \\ -\pi/2 \,, & x = 0 \,,\ y < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Primetimo da bi ovaj izraz bio drugačiji da smo uzeli da $\varphi \in [0, 2\pi)$. Naći funkciju $\varphi(x,y)$ u tom slučaju.

128. Naći oblast definisanosti i skicirati grafike funkcija

$$f(x) = \operatorname{arccos}\cos\operatorname{arccos}\cos x \,, \quad g(x) = \cos\operatorname{arccos}\cos\operatorname{arccos} x \,.$$

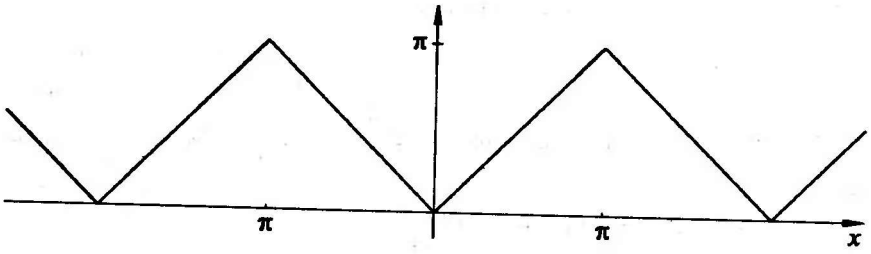
Rešenje. Polazeći od definicije funkcije $x \mapsto \operatorname{arccos} x$, nije teško videti da je $f(x) = \operatorname{arccos}\cos x$. Ova funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$. Ispitivanjem po kvadrantima u kojima se nalazi x, dobijamo da je, za $x \geq 0$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k\pi \,, & \text{za } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ 2(k+1)\pi - x \,, & \text{za } x \in [(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi] \,, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \,,$$

što uz $f(-x) = f(x)$ daje potpun opis funkcije f.

Grafik funkcije f je nacrtan na slici 5.

Za funkciju g nalazimo da je $g(x) = \cos\operatorname{arccos} x = x$; ova funkcija je definisana za $x \in [-1, 1]$.



Slika 5. *Grafik funkcije* $y = \arccos\cos\arccos\cos x$.

129. Date su funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x\,, \qquad g(x) = \operatorname{tg}\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x\,.$$

Da li za svako $x \in \mathbf{R}$ važi: a) $f(g(x)) = x$, b) $g(f(x)) = x$?

Rezultat. a) Ne. b) Da.

130. Rešiti sistem jednačina

$$\sin^2 2x - (3-\sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}$$
$$\operatorname{tg}^2 5y - (3-\sqrt{2})\sin 2x = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}\,.$$

Rezultat. $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{n\pi}{2}$, $y = -\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{k\pi}{5}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

131. Rešiti jednačinu

$$2\sin x + 3\sin 2x = 0\,.$$

Rezultat. $x = n\pi$, $x = \pm\arccos(-1/3) + 2k\pi$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

1.4 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

1.4.1 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

- **Eksponencijalna funkcija.** *Ova funkcija je preslikavanje*

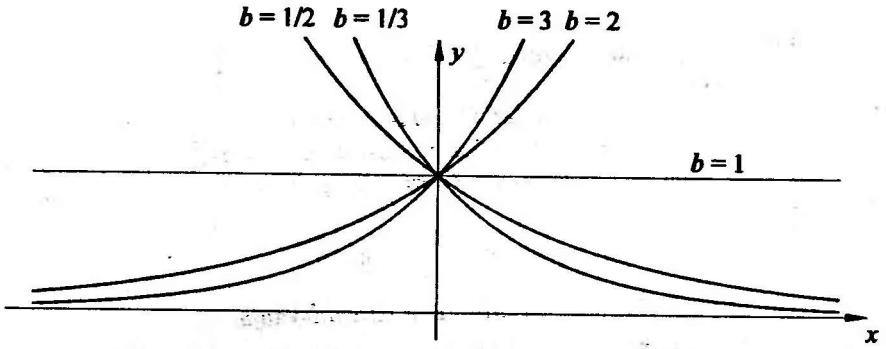
$$x \mapsto y = b^x \ , \quad b > 0 \ , x \in \mathbf{R} \ .$$

Eksponencijalna funkcija je, kao realna funkcija, definisana samo za pozitivnu osnovu b.[1] *Njen domen je skup realnih brojeva. Na slici 6 dati su grafici eksponencijalnih funkcija za razne vrednosti osnove* b.

Za svako $x \in \mathbf{R}$ *i za svako* $b > 0$ *važi da je* $b^x > 0$.

Ako je $0 < b < 1$, *eksponencijalna funkcija je monotono opadajuća; za* $b > 1$ *ova funkcija je monotono rastuća.*

Za e^x *koristi se i oznaka* $\exp x$.



Slika 6. *Eksponencijalna funkcija za razne vrednosti osnove* b.

- **Logaritamska funkcija.** *Ova funkcija je inverzna eksponencijalnoj. Naime, definišemo*

$$\log_b x = y \iff b^y = x \ .$$

Logaritamska funkcija je definisana samo ako je osnova $b > 0$ *i* $b \neq 1$ *(jer za* $b = 1$ *eksponencijalna funkcija nema inverznu). Njen domen je skup pozitivnih brojeva,* $x > 0$.

✓ *Navedimo nekoliko osobina logaritamske funkcije:*

$$\log_b |xy| = \log_b |x| \cdot \log_b |y| \ ,$$

$$\log_b |x|^a = a \log_b |x| \ ,$$

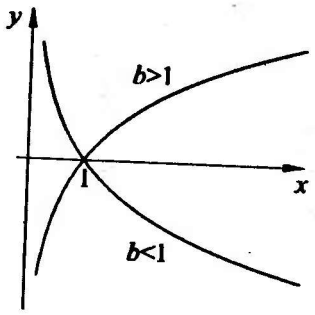
$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \ .$$

[1] Definicija u kompleksnom domenu je data u 1.5.1 na strani 54.

Iz navedenih osobina, kao specijalan, ali važan slučaj, dobija se

$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x \ .$$

Logaritamska funkcija je monotono rastuća ako je $b > 1$ i monotono opadajuća ako je $b < 1$. Grafici logaritamske funkcije za dve vrednosti osnove b su dati na slici 7.



Slika 7. *Logaritamska funkcija za dve vrednosti osnove b.*

Navedimo dva razloga zašto je logaritamska funkcija važna u matematici i njenim primenama: a) Logaritmovanjem se množenje svodi na sabiranje, b) Smanjuje se opseg brojeva, a time se i povećava tačnost. Na primer, ako treba efektivno izračunati 100!, formula

$$100! = b^{\log_b 2 + \log_b 3 + \cdots + \log_b 100}$$

daje tačniji rezultat (na računaru) od direktnog izračunavanja.

U matematici se uglavnom koristi logaritam sa osnovom e (tzv. prirodni logaritam).[1] *Tradicionalna oznaka za logaritam sa osnovom e je* ln. *Mi ćemo u ovoj knjizi usvojiti notaciju koja je prihvaćena u kompjuterskim naukama i u programskim jezicima, pa ćemo prirodni logaritam označavati sa* log, *bez oznake osnove:*

$$\log x \equiv \ln x$$

132. Pomoću eksponencijalne i logaritamske funkcije izraziti stepenu funkciju $x \mapsto x^a$ za $x > 0$.

Rezultat. $x^a = \exp(a \log x)$.

133. Pomoću eksponencijalne i logaritamske funkcije izraziti funkciju $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, za $x \in \mathbf{R}$.

Rezultat. $\sqrt[3]{x} = \operatorname{sgn}(x) \cdot \exp\left(\frac{1}{3} \log |x|\right)$.

[1] Definiciju broja e i vrednost na 540 decimala dajemo na strani 84.

134. Rešiti nejednačinu po x:

$$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 \geq 4 . \tag{1}$$

Rešenje. Logaritamska funkcija sa osnovom $x+1>1$ je monotono rastuća; u tom slučaju se iz (1) dobija ekvivalentna nejednačina

$$(x^2+x-6)^2 \geq (x+1)^4 ,$$

ili, posle sređivanja i faktorisanja,

$$(x+7)(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \leq 0 . \tag{2}$$

Poslednju nejednačinu zadovoljavaju svi brojevi iz skupa $(-\infty,-7]\cup[-5/2,1]$, što zajedno sa uslovom $x+1>1$ daje skup rešenja $(0,1]$.

U drugom slučaju, ako je $-1<x<0$, tj. $0<x+1<1$, logaritamska funkcija je opadajuća, pa se iz (1) dobija

$$(x+7)(x-1)(x+\frac{5}{2}) \geq 0 .$$

Ova nejednačina nema rešenja za $x\in(-1,0)$.

Prema tome, nejednakost (1) važi ako i samo ako je $x\in(0,1]$.

135. Rešiti nejednačinu $\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \leq 1/2$.

Rezultat. $x\in(1-\sqrt{7},-1]\cup(-1/3,0)\cup(0,1/3)\cup[2,1+\sqrt{7})$

136. Rešiti nejednačinu

$$\log_{(25-x^2)/16}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1 .$$

Uputstvo. Treba razlikovati slučajeve $b>1$ i $0<b<1$, gde je $b=(25-x^2)/16$. Ako je $b>1$, nejednačina je ekvivalentna sa $a>b$, gde je $a=(24-2x-x^2)/14$; ako je $0<b<1$, nejednačina se svodi na $a<b$. Pored toga, treba naći i oblast u kojoj je logaritamska funkcija definisana, tj. $a>0$.

137. Naći sve realne brojeve x za koje važi nejednakost

$$2^{2x+1}-21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2 \geq 0 .$$

Rešenje. Ako uvedemo smenu $2^{2x}=t$ iz date nejednakosti posle sređivanja dobijamo

$$16t^2+16t-21 \geq 0 .$$

Nalaženjem nula kvadratnog trinoma, znajući da je $t > 0$, dobijamo da je poslednja nejednakost ispunjena za $t \geq 3/4$, tj. $2^{2x} \geq 3/4$. Logaritmovanjem (za osnovu 2) dolazimo do nejednakosti $2x \geq \log_2 3 - 2$, odakle je $x \geq \frac{1}{2}\log_2 3 - 1$.

138. Neka je a proizvoljan realan broj za koji važi $a^2 < a$. Logaritmovanjem ove nejednakosti dobijamo $2\log a < \log a$, odnosno $2 < 1$. Objasniti.

139. Da li su funkcije

$$f(x) = \log(x^2 + 5x + 6) \text{ i } g(x) = \log(x+2) + \log(x+3)$$

jednake?

Rešenje. Funkcija f je definisana za one vrednosti argumenta x za koje je

$$x^2 + 5x + 6 > 0 \iff (x+2)(x+3) > 0 \iff x < -3 \vee x > -2\,.$$

Funkcija g je definisana za one vrednosti x za koje su definisane obe funkcije $x \mapsto \log(x+2)$ i $x \mapsto \log(x+3)$. Prva funkcija je definisana za $x > -2$, a druga za $x > -3$. Dakle, obe su definisane u preseku ove dve oblasti, a to je $x > -2$. Odavde sleduje da jednakost $f(x) = g(x)$ važi samo za $x > -2$, tj. u oblasti u kojoj su i f i g definisane. Kako f i g nemaju zajednički domen, one nisu jednake.

140. Rešiti nejednačinu $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2$. [$x > 1$]

141. Rešiti jednačinu $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$. [$x = 7/5$]

142. Naći sve realne brojeve x za koje je $\log_{(x-6)^2}(x^2 - 5x + 9) \geq \frac{1}{2}$.

Rezultat. $x \in (-\infty, 1] \cup [3, 5) \cup (7, +\infty)$.

143. Za koje $x \in \mathbf{R}$ važi nejednakost $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}$?

Rezultat. $x \in (-1/2, 0)$.

144. Rešiti nejednačinu po $x \in \mathbf{R}$: $\frac{2+\log_3 x}{x-1} < \frac{6}{2x-1}$.

Rezultat. $x \in (1/2, 1)$.

145. Naći sve $x \in \mathbf{R}$ tako da je $\frac{2^{x+1}-7}{x-1} < \frac{10}{3-2x}$.

Rezultat. $x \in (1, 3/2)$.

146. Na intervalu $[3/4, 1]$ odrediti sva rešenja jednačine

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3 .$$

Rezultat. $x = \pi/4$.

147. Odrediti sva rešenja jednačine

$$2\log_5 |\operatorname{ctg} x| - \log_{1/5} \frac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x} = 0$$

na intervalu $[\frac{33}{10}, 4]$. [$x = 5\pi/4$]

148. Rešiti jednačinu po x:

$$3^{1/2+\log_3 \cos x} + 6^{1/2} = 9^{1/2+\log_9 \sin x} .$$

Rezultat. $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

1.4.2 Hiperboličke funkcije

- $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *(sinus hiperbolički)*
- $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *(kosinus hiperbolički)*
- $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *(tangens hiperbolički)*
- $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *(kotangens hiperbolički)*

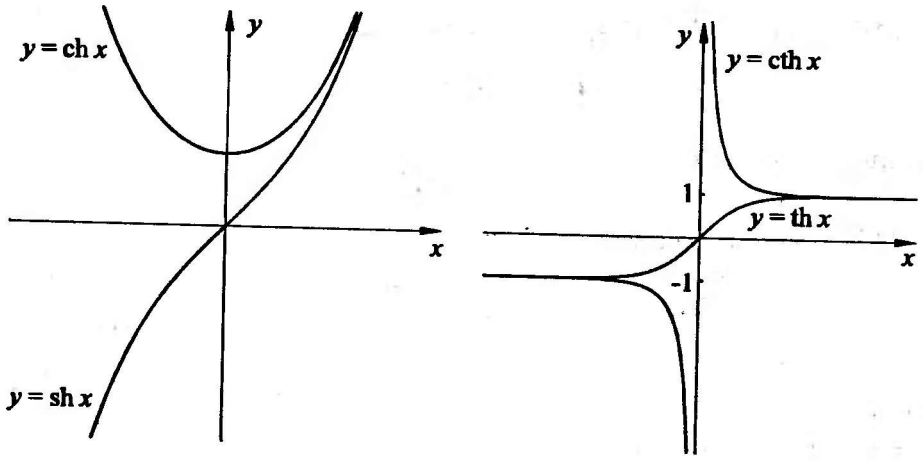
Polazeći od ovih definicija, može se videti da je funkcija $x \mapsto \operatorname{sh} x$ neparna i neograničena, dok je funkcija $x \mapsto \operatorname{ch} x$ parna i $\operatorname{ch} x \geq 1$ za svako x. Grafici hiperboličkih funkcija su nacrtani na slici 8.

Ove funkcije imaju osobine slične trigonometrijskim funkcijama, što je posledica sličnosti između gornjih formula i izrazâ za trigonometrijske funkcije koji se dobijaju primenom EULERove *formule (videti 1.3.2). Na primer,*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y\ , \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y} .$$



Slika 8. *Grafici hiperboličkih funkcija*

Videti i 1.5.1 na strani 54 za vezu između trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija u kompleksnom domenu.

Inverzne hiperboličke funkcije. *Polazeći od osobina monotonosti hiperboličkih funkcija, definišemo njihove inverzne funkcije:*

- $y = \operatorname{arsh} x \iff x = \operatorname{sh} y\,, \quad y \in \mathbf{R}\,, x \in \mathbf{R}$
- $y = \operatorname{arch} x \iff x = \operatorname{ch} y\,, \quad y \geq 0\,, x \geq 1$
- $y = \operatorname{arth} x \iff x = \operatorname{th} y\,, \quad y \in \mathbf{R}\,, |x| < 1$
- $y = \operatorname{arcth} x \iff x = \operatorname{cth} y\,, \quad y \in \mathbf{R}\,, |x| > 1$

Može se pokazati (videti zadatak 149) da se inverzne trigonometrijske funkcije mogu izraziti pomoću logaritamske funkcije na sledeći način:

$$\operatorname{arsh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})\,, \quad \operatorname{arch} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,,$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\,, \quad \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}\,,$$

pri čemu ove formule važe za one vrednosti realnog argumenta x koje su navedene u definicijama odgovarajućih funkcija.

149. Polazeći od definicije hiperboličkih funkcija, izvesti analitičke izraze za inverzne hiperboličke funkcije.

Rešenje. Ako za dato $x \in \mathbf{R}$ u jednačini po y

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

uvedemo smenu $e^y = t$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 2xt - 1 = 0$$

čija su rešenja $t = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Kako je $t > 0$, uzimamo samo znak +, pa je

$$\operatorname{arsh} x = y = \log(x + \sqrt{x^2+1}) .$$

Za nalaženje inverzne funkcije kosinusa hiperboličkog, potrebno je naći **nenegativno** rešenje jednačine po y

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} ,$$

za dato $x > 1$. Smenom $e^y = t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 - 2xt + 1 = 0$, koja ima dva pozitivna rešenja $t_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$, pri čemu je $t_1 t_2 = 1$. Kako tražimo $y \geq 0$, mora da bude $t \geq 1$, pa se od dva rešenja bira ono koje ima znak + pred korenom. Odavde je

$$\operatorname{arch} x = y = \log(x + \sqrt{x^2-1}) .$$

Izrazi za ostale dve funkcije dobijaju se na sličan način.

1.4.3 Elementarne funkcije

Skup funkcija koje se nazivaju elementarnim čine :

- *Stepena, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija.*
- *Trigonometrijske funkcije i njima inverzne.*
- *Hiperboličke funkcije sa svojim inverznim funkcijama.*
- *Sve funkcije koje se dobijaju iz navedenih, primenom* **konačno mnogo** *osnovnih računskih operacija, operacije kompozicije funkcija i restrikcijom domena.*
- *Sve funkcije koje su deo po deo jednake prethodno navedenim funkcijama.*

Prve tri navedene klase funkcija nazivaju se **osnovne elementarne funkcije.**

Među elementarnim funkcijama posebno mesto zauzimaju eksponencijalna i logaritamska funkcija (obe sa osnovom e). Naime, nije teško videti da se sve elementarne funkcije mogu izraziti pomoću ove dve. Ova činjenica je polazna tačka za striktno zasnivanje elementarnih funkcija (videti 5.2.4 na strani 450).

Primere funkcija koje nisu elementarne daćemo kasnije (videti 4.3.9 na strani 379).

1.5 Kompleksne funkcije*

1.5.1 Eksponencijalna i sa njom povezane funkcije

Za kompleksan broj $z = x + iy$ definišemo

- $e^z = \exp z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ *(eksponencijalna funkcija)*
- $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ *(sinus kompleksnog broja)*
- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ *(kosinus kompleksnog broja)*
- $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ *(hiperbolički sinus)*
- $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ *(hiperbolički kosinus)*

Na isti način kao u realnom domenu definišu se i ostale trigonometrijske funkcije, na primer, $\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z$ *itd. Isto važi i za hiperboličke funkcije.*

Sve formule navedene u 1.3.2 važe i u kompleksnom domenu, s tim što grafik i pojam trigonometrijskog kruga ovde nemaju smisla.

Funkcije $z \mapsto \sin z$ *i* $z \mapsto \cos z$ *nisu ograničene na skupu* $\mathbf{C}$.

Između trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija važe sledeće relacije (koje se dobijaju direktno iz gornjih definicija):

$$\operatorname{ch} z = \cos iz\,, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz \qquad (z \in \mathbf{C})\,.$$

150. Polazeći od definicija funkcija iz 1.5.1, dokazati da i za kompleksne brojeve važi $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Rešenje.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

151. Ako je $z = x + iy$, dokazati da je

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = \operatorname{ch} y\,(\cos x + \sin x) + i \operatorname{sh} y\,(\cos x - \sin x)$$

Rešenje. Dokažimo prvu jednakost:

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y}) \\ &= \frac{i}{2}(e^{y}e^{-ix} - e^{-y}e^{ix}) = \frac{i}{2}(e^{y}\cos x - ie^{y}\sin x - e^{-y}\cos x - ie^{-y}\sin x) \\ &= \frac{1}{2}(e^{y}\sin x + e^{-y}\sin x + i(e^{y}\cos x - e^{-y}\cos x)) \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y\,.\end{aligned}$$

Druga jednakost se dokazuje na sličan način. Treća jednakost je posledica prve dve.

152. Dokazati da je

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} \qquad (z = x + iy)\,.$$

153. Dokazati jednakosti $(z = x + iy)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} z &= \operatorname{sh} x\ \cos y + i \operatorname{ch} x\ \sin y \\ \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch} x\ \cos y + i \operatorname{sh} x\ \sin y \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}\end{aligned}$$

154. Dokazati da je

$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x\,, |\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x \qquad (z = x + iy)\,.$$

155. Pokazati da je $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$, $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, $\overline{\operatorname{tg} z} = \operatorname{tg} \bar{z}$.

156. Rešiti jednačinu $\sin z = 2 \qquad (z = x + iy)$.

Rešenje. Polazeći od definicije $\sin z$, datu jednačinu transformišemo u

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2\,.$$

Uvođenjem smene $e^{iz} = w$, $e^{-iz} = 1/w$, dobijamo

$$w - \frac{1}{w} = 4i\,, \text{tj.} \quad w^2 - 4iw - 1 = 0\,.$$

Poslednja kvadratna jednačina po w ima dva rešenja: $w_{1,2} = i(2 \pm \sqrt{3})$. Iz $e^{iz} = w_1 = i(2+\sqrt{3})$ dobijamo

$$\begin{aligned} e^{iz} = w_1 &\iff e^{ix-y} = i(2+\sqrt{3}) \iff e^{ix}e^{-y} = e^{i\pi/2}(2+\sqrt{3}) \\ &\iff e^{-y} = 2+\sqrt{3} \ \wedge \ e^{ix} = i = e^{i\pi/2} \\ &\iff y = -\log(2+\sqrt{3}) \ \wedge \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z}) \, . \end{aligned}$$

Na sličan način, sa $w_2 = i(2-\sqrt{3})$ imamo

$$e^{iz} = w_2 \iff y = -\log(\sqrt{3}-2) \ \wedge \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z}) \, .$$

Prema tome, data jednačina ima dva skupa rešenja:

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \, , \ y = -\log(\sqrt{3} \pm 2) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

157. Odrediti skup svih tačaka z kompleksne ravni u kojima je $|\sin z| \leq 1$.

Rešenje. Kako je (videti zadatak 154)

$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x \, ,$$

oblast u kojoj je $|\sin z| \leq 1$ određena je sa

$$\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x \leq 1 \, , \text{tj.} \quad \operatorname{sh}^2 y \leq \cos^2 x \, ,$$

odakle dobijamo

$$-|\cos x| \leq \operatorname{sh} y \leq |\cos x| \, . \tag{1}$$

Ako uvedemo smenu $e^y = t > 0$, iz (1) dobijamo

$$-2|\cos x| \leq t - \frac{1}{t} \leq 2|\cos x| \, , \quad t > 0 \, .$$

Rešavanjem ovih nejednačina na standardan način, nalazimo

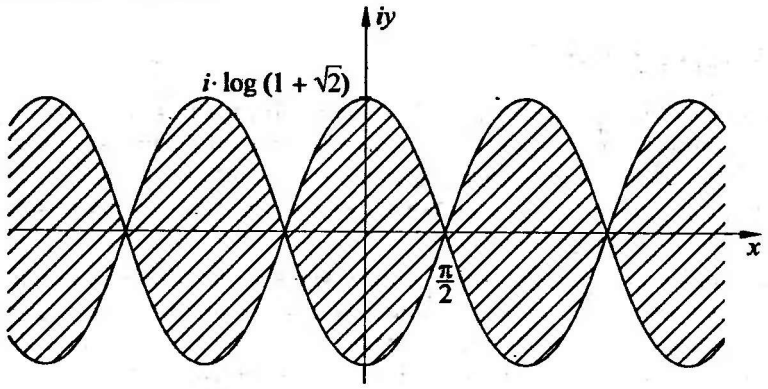
$$\log(-|\cos x| + \sqrt{\cos^2 x + 1}\,) \leq y \leq \log(|\cos x| + \sqrt{\cos^2 x + 1}\,) \, .$$

Kako je $-v + \sqrt{v^2+1} = 1/(v+\sqrt{v^2+1})$, za $v = \cos x$ dobijamo ekvivalentan oblik

$$-\log(|\cos x| + \sqrt{\cos^2 x + 1}\,) \leq y \leq \log(|\cos x| + \sqrt{\cos^2 x + 1}\,) \, . \tag{2}$$

Na slici 9 je skiciran skup tačaka $z = x + iy$ za koje važi (2).

Ako je $y = 0$, nejednakosti (2) su ispunjene za svako $x \in \mathbf{R}$, jer je izraz pod znakom logaritma uvek veći ili jednak 1. To je i trebalo očekivati, jer je $|\sin x| < 1$ za svako realno x.



Slika 9. *Skup tačaka $z = x + iy$ kompleksne ravni za koje je $|\sin z| \leq 1$.*

158. Da li za sve kompleksne brojeve važi nejednakost $|\sin z| \leq |z|$?

Rešenje. Ne. Na primer, za $z = iy, y \in \mathbf{R}, y > 0$, data nejednakost je ekvivalentna sa

$$e^y - e^{-y} \leq 2y\,,$$

a ovo nije ispunjeno za velike vrednosti y (npr. za $y = \log 10$).

Kao što smo pokazali u zadatku 103, data nejednakost važi ako je $z \in \mathbf{R}$.

159. Neka je $z \in C$ kompleksan broj takav da je $\operatorname{tg} z = i$. Neka je w proizvoljan kompleksan broj. Tada imamo

$$\operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w} = \frac{i + \operatorname{tg} w}{1 - i \operatorname{tg} w}$$
$$= \frac{i(1 - i \operatorname{tg} w)}{1 - i \operatorname{tg} w} = i\,.$$

Ako stavimo $w = \pi/4 - z$, dobijamo $\operatorname{tg} \pi/4 = i$, tj. $1 = i$. Objasnite.

Rešenje. Izvođenje je tačno pod uslovom da postoji z tako da je $\operatorname{tg} z = i$. Međutim, takav kompleksan broj ne postoji, i ovaj paradoks je dokaz za to.

160. Neka je $\operatorname{tg} z = i$. Tada imamo da je $\sin z = i \cos z$, odnosno, posle kvadriranja, $\sin^2 z + \cos^2 z = 0$, tj. $1 = 0$. Objasnite.

Zadatke 159 i 160 predložio je dr Dobrilo Tošić.

1.5.2 Višeznačne funkcije

Polazeći od EULERove *formule, moguće je definisati logaritam kompleksnog broja:* $z = \log re^{i\theta} = \log r + i\theta$. *Ovde se, međutim, pojavljuje problem zbog neodređenosti argumenta kompleksnog broja, jer ako je* $z = re^{i\theta}$, *onda je* $z = re^{i\theta+2k\pi}$ *za svako* $k \in \mathbf{Z}$. *Stoga je i logaritam kompleksnog broja neodređen sve dok se ne precizira interval dužine* 2π *u kome se nalazi* θ.

U teoriji kompleksnih funkcija ovakva preslikavanja se nazivaju **višeznačne funkcije**. *Za svaku višeznačnu funkciju definiše se* **glavna vrednost** *koja je određena specifikacijom jedne "grane" koju usvajamo za glavnu. U slučaju logaritma je prirodno tako definisati glavnu vrednost da se ona, za slučaj da je* z *realan i pozitivan broj, svodi na realan logaritam tog broja:*

- $$\log z = \log r + i\theta\,, \qquad z = re^{i\theta}, \theta \in (-\pi, \pi]$$

Logaritam je definisan za sve kompleksne brojeve sem za $z = 0$.

Polazeći od glavne vrednosti logaritma, možemo da definišemo stepenu funkciju (tj. njenu glavnu vrednost):

- $$z^a = e^{a \log z} \qquad (z \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{C})$$

Kao specijalni slučaj odavde se dobija definicija korena kompleksnog broja.

Inverzne trigonometrijske funkcije se definišu pomoću logaritma i kvadratnog korena. Na primer, arcsin z *se definiše kao kompleksan broj* w *koji je rešenje jednačine* $(e^{iw} - e^{-iw})/2$. *Na taj način dobijamo*

- $$\arcsin z = \frac{1}{i} \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad (z \in \mathbf{C})$$
- $$\arccos z = \frac{1}{i} \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (z \in \mathbf{C})$$
- $$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} \qquad (z \in \mathbf{C}, z \neq \pm i)$$

Konačno, za glavne vrednosti inverznih hiperboličkih funkcija dobijamo

- $$\operatorname{arsh} z = \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) \qquad (z \in \mathbf{C})$$
- $$\operatorname{arch} z = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (z \in \mathbf{C})$$
- $$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z} \qquad (z \in \mathbf{C}, z \neq \pm 1)$$

Može se pokazati da se, za realne vrednosti z, *ove funkcije na odgovarajućim domenima svode na poznate realne funkcije. Ali, ovim definicijama se proširuje domen tih funkcija. Na primer, može se naći* $\log(-1)$ *ili* $\arccos 5$, *i to su, naravno, kompleksni brojevi.*

161. Naći glavnu vrednost logaritma sledećih brojeva: i, $-i$, -5, -1, $1+i$, $-1-i$.

Rešenje. Pre nalaženja logaritma, dati kompleksan broj treba napisati u trigonometrijskom obliku sa argumentom u intervalu $(-\pi, \pi]$, a zatim primeniti formulu $\log z = \log|z| + i\arg z$. Prema tome,

$$\log i = \log e^{i\pi/2} = i\frac{\pi}{2}, \qquad \log(-i) = -i\frac{\pi}{2},$$

$$\log(-5) = \log 5e^{i\pi} = \log 5 + i\pi, \qquad \log(-1) = i\pi$$

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}, \qquad \log(-1-i) = \frac{1}{2}\log 2 - i\frac{3\pi}{4}.$$

162. Polazeći od definicije kvadratnog korena pomoću glavne vrednosti logaritma, pokazati da je $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$ za $x \geq 0$.

Rešenje.

$$\sqrt{-x} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(-x)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\log x + i\pi)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}\log x\right)\exp(i\pi/2) = i\sqrt{x}.$$

163. Odrediti glavne vrednosti i^i, 1^i, $(-1)^i$.

Rešenje.

$$i^i = \exp(i\log i) = \exp(i\cdot i\pi/2) = e^{-\pi/2}$$
$$1^i = \exp(i\log 1) = \exp(i\cdot 0) = 1$$
$$(-1)^i = \exp\left(i\log(-1)\right) = \exp(i\cdot i\pi) = e^{-\pi}$$

164. Naći $\arcsin 3$.

Rešenje. Polazeći od definicije funkcije $z \mapsto \arcsin z$, nalazimo

$$\arcsin 3 = \frac{1}{i}\log(3i + \sqrt{-8}).$$

Kako je glavna vrednost kvadratnog korena iz -8 jednaka $i\sqrt{8}$, imamo da je

$$\arcsin 3 = \frac{1}{i}\log i(3+2\sqrt{2})$$
$$= \frac{1}{i}\log\left((3+2\sqrt{2})e^{i\pi/2}\right) = \frac{\pi}{2} - i\log(3+2\sqrt{2}).$$

165. Neka je $\sin\alpha = x$, gde je α realan broj u intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$. Polazeći od definicije glavne vrednosti kompleksne funkcije $z \mapsto \arcsin z$, pokazati da je $\arcsin x = \alpha$.

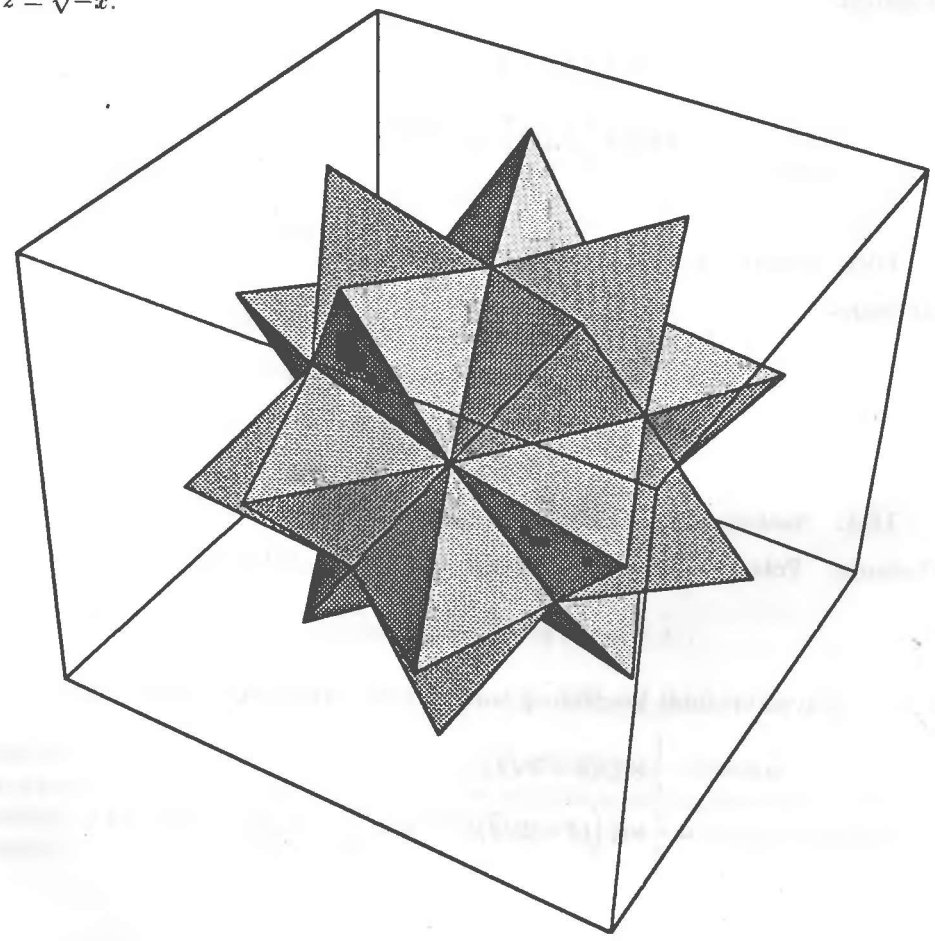
Rešenje. Ako $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ i ako je $\sin\alpha = x$, tada je $ix + \sqrt{1-x^2} = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$. Prema tome,

$$\arcsin x = \frac{1}{i}\log(ix + \sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{i}\log e^{i\alpha} = \alpha\ .$$

166. Dokazati da za $x > 0$ važi jednakost (sve funkcije uzimaju glavne vrednosti):

$$\frac{2}{\sqrt{-x}}\operatorname{arctg}\sqrt{-x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Uputstvo. U definiciji glavne vrednosti kompleksne funkcije $z \mapsto \operatorname{arctg} z$ staviti $z = \sqrt{-x}$.



Putovanje od hiljadu kilometara mora započeti jednim korakom.
(Prema staroj kineskoj poslovici.)

Ovde neće biti dijagrama.
Joseph Louis Lagrange, u predgovoru za Méchanique Analitique.

Glava 2

Granični procesi

Iako je ideja granične vrednosti bila poznata još u antičkom dobu, preciznu definiciju pojma granične vrednosti funkcije dao je tek CAUCHY u knjizi *Cours d'analyse*, 1821. godine.

U prva tri odeljka ove glave proučavaćemo granične vrednosti nizova. U odeljku 2.4 izlažemo CAUCHYjev kriterijum konvergencije, BANACHov stav i metod iteracije. Granične vrednosti funkcija posmatramo u odeljcima 2.5 i 2.6. Veći deo ove materije biće ponovo razmatran u glavi 3, gde ćemo primeniti aparat diferencijalnog računa.

2.1 Granične vrednosti nizova

2.1.1 Nizovi i njihove granične vrednosti

- *Svako preslikavanje skupa prirodnih brojeva* $\mathbf{N}$ *u skup realnih brojeva* $\mathbf{R}$ **nazivamo realni niz** *ili samo* **niz**. *Realan broj koji se ovim preslikavanjem dodeljuje prirodnom broju* n *označava se sa* x_n, a_n *itd. i naziva se* n**-ti član niza** *ili* n**-ti element niza**; *prirodan broj* n *se naziva* **indeks** *člana* x_n. *Ako su* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ *članovi niza, oznaka za niz je* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *ili samo* $\{x_n\}$.[1]

- *Kažemo da je realan broj* a **granična vrednost** *niza* $\{x_n\}$ *i pišemo* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *ili* $x_n \to a$ *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

[1] Treba uočiti razliku između ove oznake i oznake za skup svih elemenata niza, $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Često ćemo umesto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *pisati samo* $\lim x_n$. *Ako je* $\lim x_n = a$ *tada kažemo da je niz* $\{x_n\}$ **konvergentan** *ili da* **konvergira** *ka* a *ili da* **teži** *ka* a.

- *Ako je* $\lim x_n = 0$, *tada za niz* x_n *kažemo da je* **nula niz**. *Potreban i dovoljan uslov da je* $\lim x_n = a$ *je da je niz* $\{x_n - a\}$ *nula niz.*

Dajemo sada ekvivalentnu definiciju konvergencije niza, uvođenjem dva nova pojma.

- *Otvoreni interval* $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ *dužine* 2ε *sa centrom u tački* $a \in \mathbf{R}$ *nazivamo* ε**–okolina** *tačke* a. *Pod pojmom* **okolina** *tačke* a *podrazumevamo* ε*–okolinu za neko (dato ili neodređeno)* $\varepsilon > 0$.

- *Kažemo da* **skoro svi članovi niza** *imaju neku osobinu* P *ako postoji* n_0 *tako da svako* x_n *za* $n \geq n_0$ *ima osobinu* P. *Drugim rečima, osobinu* P *imaju svi članovi niza počevši od nekog indeksa, ili, što je isto, tu osobinu imaju svi članovi niza sem konačno mnogo njih. Ovaj termin ćemo koristiti i u kontekstu kao što je "skoro svi prirodni brojevi", "skoro svaki indeks niza" i sl.*

✓ **Ekvivalentna definicija konvergencije niza.** *Niz konvergira ka* $a \in \mathbf{R}$ *ako se u svakoj okolini tačke* a *nalaze skoro svi članovi niza.*

Neka je $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ $(x, y, \in \mathbf{R})$ *i neka su* a, b *i* c *proizvoljni realni brojevi. Tada važi:*

✓ $$\lim(c + x_n) = c + x, \quad \lim(ax_n \pm by_n) = ax \pm by$$

✓ $$\lim x_n y_n = xy, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \text{ ako } y \neq 0 \text{ i } y_n \neq 0 \text{ za } n = 1, 2, \ldots$$

167. a) Dokazati: Ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju skupu A i ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju skupu B, tada skoro svi članovi ovog niza pripadaju skupu $A \cap B$.

! b) Da li tvrđenje a) važi ako se izraz "skoro svi članovi niza" zameni sa "beskonačno mnogo članova niza" ?

c) Kakva je veza između iskaza A: " Skoro svi članovi niza imaju osobinu P" i B: "Beskonačno mnogo članova niza ima osobinu P" ?

Rešenje. a) Ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju skupu A, to znači da postoji neki prirodan broj n_A tako da $x_n \in A$ za $n \geq n_A$. Slično tome, ako skoro svi članovi niza pripadaju skupu B, tada $x_n \in B$ za svako $n \geq n_B$. Prema tome, za $n \geq \max(n_A, n_B)$, $x_n \in A$ i $x_n \in B$, tj. $x_n \in A \cap B$.

b) U ovom slučaju tvrđenje ne važi. Na primer, ako je A skup pozitivnih, a B skup negativnih brojeva, tada niz $x_n = (-1)^n n$ ima beskonačno mnogo elemenata i u skupu A i u skupu B, a nijedan element u skupu $A \cap B$.

c) $A \Rightarrow B$, ali ne važi obrnuto.

168. Dokazati da se "$\exists n_0 \in \mathbf{N}$" u definiciji granične vrednosti niza može zameniti uslovom "$\exists y_0 \in \mathbf{R}$", tj. da niz x_n konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako i samo ako

$$(1) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists y_0 \in \mathbf{R})(\forall n \geq y_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon \, .$$

Rešenje. Očigledno je da se iz definicije dobija (1) sa $y_0 = n_0$. Obrnuto, ako važi (1), tada je ispunjen i uslov iz definicije, sa $n_0 = [y_0] + 1$.

169. Dokazati da se u definiciji granične vrednosti niza jedan ili oba znaka $\geq$ i $<$ mogu zameniti sa $>$, odnosno $\leq$. Drugim rečima, dokazati da su sledeći iskazi ekvivalentni:

$$(1) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| \leq \varepsilon$$
$$(2) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$$
$$(3) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0) \quad |x_n - a| \leq \varepsilon$$
$$(4) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon \, .$$

Rešenje. Dokazaćemo da su prvi i četvrti iskaz ekvivalentni. Neka važi (1). Neka je dato $\varepsilon' > 0$. Za $\varepsilon = \varepsilon'/2$, postoji, prema (1), neko n_0 tako da za sve članove niza x_n sa indeksom $n \geq n_0$ važi $|x_n - a| \leq \varepsilon < \varepsilon/2 = \varepsilon'$. Prema tome, za svako $\varepsilon' > 0$ postoji n_0 tako da za svako $n > n_0$ imamo $|x_n - a| < \varepsilon'$, a to je tvrđenje (4).

Obrnuto, neka važi (4). Tada za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_0' = n_0 + 1$ tako da za $n > n_0$, tj. za $n \geq n_0'$ važi da je $|x_n - a| < \varepsilon$, pa time i $|x_n - a| \leq \varepsilon$. Ovim je dokazano da (4) implicira (1).

Ostale ekvivalencije se slično dokazuju.

Primedba. Na osnovu ovog zadatka i zadatka 168, bilo koja od formula (1) – (4) može da se uzme za definiciju granične vrednosti, i u svim formulama $n_0 \in \mathbf{N}$ može da se zameni sa $y_0 \in \mathbf{R}$. Ovo ćemo koristiti u tekstu, uglavnom bez posebnog naznačavanja.

170. Dati su nizovi $\{x_n\}$ i $\{x_{n+k}\}$, gde je $k \in \mathbf{N}$. Dokazati da skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ imaju neku osobinu P ako i samo ako skoro svi članovi niza $\{x_{n+k}\}$ imaju tu osobinu. Izvesti odavde da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ako i samo ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

Rešenje. Ako su $x_1, x_2, \ldots$ članovi niza $\{x_n\}$, tada su $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$ članovi niza $\{x_{n+k}\}$. Prema tome, ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ imaju neku osobinu P, onda tu osobinu imaju i skoro svi članovi niza $\{x_{n+k}\}$ i obrnuto.

186. Dokazati da niz ne može da ima više od jedne granične vrednosti.

Rešenje. Neka su a i b granične vrednosti niza x_n. Tada iz

$$0 = \lim(x_n - x_n) = \lim x_n - \lim x_n = a - b$$

zaključujemo da je $a = b$.

Dokaz može da se izvede i direktno, koristeći se idejom iz rešenja zadatka 183. Naime, ako bi postojale dve granične vrednosti, recimo a i b, $a \neq b$, tada bi se u svakoj okolini i tačke a i tačke b nalazili skoro svi članovi niza. Prema tome, u preseku svake dve ε-okoline ($\varepsilon > 0$) tačaka a i b nalaze se skoro svi elementi niza. Ako uzmemo da je $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$, tada je presek ε-okolina tačaka a i b prazan skup, što je kontradikcija sa prethodnim tvrđenjem.

187. Ako skoro svi članovi konvergentnog niza pripadaju zatvorenom intervalu $[a, b]$, dokazati da i njegova granična vrednost pripada tom intervalu.

Rešenje. Neka je $\lim x_n = c$ i neka je $x_n \in [a, b]$ za $n \geq n_0$. Pretpostavimo da $c \notin [a, b]$, tj. $c < a$ ili $c > b$. U slučaju $c < a$, interval $(c - (a-c)/2, c + (a-c)/2)$ nema presečnih tačaka sa $[a, b]$. S druge strane, zbog $\lim x_n = c$, skoro svi članovi niza x_n pripadaju pomenutom intervalu, što je kontradikcija. Na isti način se dolazi do kontradikcije ako je $c > b$. Prema tome, $c \in [a, b]$.

2.1.2 Beskonačne granične vrednosti

- *Kažemo da niz* $\{x_n\}$ **konvergira ka beskonačnosti**, *u oznaci* $\lim x_n = +\infty$ *ako*

$$(\forall K > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K$$

- *Kažemo da niz* $\{x_n\}$ **konvergira ka minus beskonačnosti**, *u oznaci* $\lim x_n = -\infty$ *ako*

$$(\forall K > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K$$

U ovim slučajevima kaže se i da je niz **odredjeno divergentan** *ili da* **divergira ka beskonačnosti.**

Rečima iskazano, niz konvergira ka beskonačnosti, ako su skoro svi članovi niza veći od K, za svako dato $K > 0$. Slično tome, niz konvergira ka minus beskonačnosti ako su, za svako dato K, skoro svi članovi niza manji od $-K$.

Prema tome, svaki niz spada u jednu od tri kategorije:

- *Konvergira ka nekom realnom broju a (konvergentan niz).*
- *Konvergira ka $\pm\infty$ (odredjeno divergentan niz).*

- *Nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrednost (neodređeno divergentan niz).*

√ *Svaki konvergentan niz je ograničen*[1]. *Svaki neograničen niz je divergentan (tj. ili ima beskonačnu graničnu vrednost ili nema graničnu vrednost).*

√ *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$, *i ako je* $\lim y_n = +\infty$, *tada važe pravila:*

$$\lim(x_n + y_n) = +\infty\,, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0)\,, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0\,.$$

U nekim slučajevima kombinacije dva niza, rezultat nije unapred poznat (kaže se da je granična vrednost **neodređena**). *To ne znači da granična vrednost ne postoji, već da je ne možemo odrediti primenom navedenih pravila.*

Na primer, ako $x_n \to +\infty$ *i* $y_n \to +\infty$, *tada količnik* x_n/y_n *može da ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost, ili da nema graničnu vrednost. U ovom slučaju kažemo da je izraz* **tipa** $\frac{\infty}{\infty}$. *Takođe su neodređeni izrazi tipa*

$$\frac{0}{0}\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \infty-\infty\,,\ 1^\infty\,,\ \infty^0\,,\ 0^0\,.$$

U ovim slučajevima, granične vrednosti se nalaze primenom različitih transformacija pomoću kojih se izraz svodi na neki od određenih oblika.

188. Dokazati da je svaki konvergentan niz ograničen. Da li važi obrnuto?

Uputstvo. Ako je niz x_n konvergentan, tada se skoro svi članovi niza nalaze u $(c-1, c+1)$, gde je $c \in \mathbf{R}$ granična vrednost ovog niza.

189. Dokazati da je: a) $\lim 2^{\sqrt{n}} = +\infty$, b) $\lim \log(1/n) = -\infty$.

Rešenje. a) Nejednakost $2^{\sqrt{n}} > K$ ekvivalentna je sa $\sqrt{n}\log 2 > \log K$, tj. $n > (\log_2 K)^2 = y_0$. Prema tome, za svako $K > 0$, svi članovi sa $n > y_0$ su veći od K, što znači da niz konvergira ka $+\infty$.

b) Kako je $\log(1/n) = -\log n$, nejednakost $\log(1/n) < -K$ je ekvivalentna sa $\log n > K$, tj. $n > e^K$. Dakle, svi članovi niza sa indeksom većim od e^K su manji od $-K$; odavde sleduje da je granična vrednost niza jednaka $-\infty$.

190. Naći $\lim \frac{1}{n!}$.

Rešenje. Očigledno je da je $n! > K$ za svako $n > K$. Prema tome, $\lim n! = +\infty$, odakle sleduje da je $\lim 1/n! = 0$.

[1] Niz je ograničen ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ograničen.

191. Dokazati: $\lim x_n = -\infty$ ako i samo ako je $\lim(-x_n) = +\infty$.

192. Dokazati da niz $x_n = n^{(-1)^n}$ nema (ni konačnu ni beskonačnu) graničnu vrednost.

193. Dokazati: **a)** Ako je $\lim x_n = 0$ i ako su skoro svi članovi niza x_n pozitivni (negativni), tada je $\lim 1/x_n = +\infty(-\infty)$ **b)** Ako niz x_n ima beskonačno mnogo pozitivnih i negativnih članova, i ako je $\lim x_n = 0$, tada $\lim 1/x_n$ ne postoji. Navesti primer jednog takvog niza.

Rešenje. **a)** Neka je $\lim x_n = 0$. Za dato $K > 0$ skoro svi članovi niza su manji od $1/K$ (ovo se dobija iz definicije, sa $\varepsilon = 1/K$). Nejednakost $x_n < 1/K$ je, za pozitivne x_n, ekvivalentna sa $1/x_n > K$. Prema tome, ako su skoro svi članovi niza x_n pozitivni, tada su skoro svi članovi niza $1/x_n$ veći od K, za proizvoljno $K > 0$, što znači da je $\lim(1/x_n) = +\infty$.

Ako su skoro svi članovi niza negativni, možemo da posmatramo niz $y_n = -x_n$, i na osnovu prethodnog da zaključimo da je $\lim y_n = +\infty$; tada je (zadatak 191) $\lim x_n = -\infty$.

b) Iz $\lim x_n = 0$ zaključujemo da za svako dato $K > 0$ skoro svi članovi niza zadovoljavaju nejednakosti $-1/K < x_n < 1/K$. Za pozitivne x_n odavde se dobija $1/x_n > K$, dok se za negativne dobija $1/x_n < -K$. Ako i pozitivnih i negativnih članova ima beskonačno mnogo, tada nijedna od nejednakosti $1/x_n > K$, $1/x_n < -K$ nije ispunjena za skoro svako n. Prema tome, niz nema beskonačnu graničnu vrednost. Konačna granična vrednost ne postoji jer niz nije ograničen.

Na primer, niz $x_n = (-1)^n/n$ ima graničnu vrednost jednaku nuli, dok $1/x_n = (-1)^n n$ nema graničnu vrednost.

194. Naći $\lim x_n$ ako je $x_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

Rešenje. Dati niz x_n je tipa ∞/∞. Da bismo našli graničnu vrednost, podelimo brojilac i imenilac sa n^2:

$$x_n = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Kad $n \to \infty$, tada $1/n^2 \to 0$, tako da imenilac gornjeg razlomka konvergira ka 1. Kako brojilac teži nuli, zaključujemo da je $\lim x_n = 0$.

195. Odrediti graničnu vrednost niza

$$x_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k \qquad (k \in \mathbf{N}, a_k \neq 0)$$

Rešenje. Kako $a_i, i = 0, \ldots, k$ mogu biti različitog znaka, dati niz je tipa $\pm\infty \pm \cdots \pm \infty$. Transformacijom

$$x_n = n^k(a_0/n^k + a_1/n^{k-1} + \cdots + a_{k-1}/n + a_k),$$

niz se svodi na tip $\infty \cdot a_k$, odakle nalazimo da je $\lim x_n = \operatorname{sgn}(a_k) \cdot \infty$.

196. Naći graničnu vrednost niza

$$x_n = \frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_j n^j}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_k n^k},$$

gde su $a_0, \ldots a_j$ i $b_0, \ldots b_k$, realni brojevi, $a_j \neq 0$, $b_k \neq 0$, $j, k \in \mathbf{N}$, ako je **a)** $j > k$ **b)** $j = k$ **c)** $j < k$.

Rešenje. **a)** Deljenjem brojioca i imenioca sa n^j, nalazimo

$$x_n = \frac{a_0/n^j + a_1/n^{j-1} + \cdots + a_{j-1}/n + a_j}{b_0/n^j + b_1/n^{j-1} + \cdots + b_{k-1}/n^{j-k+1} + b_k/n^{j-k}}$$

Brojilac gornjeg razlomka teži ka a_j, dok imenilac teži nuli, jer svi sabirci teže nuli. Iz zadatka 195 zaključujemo da je, za dovoljno veliko n, znak niza x_n jednak $\operatorname{sgn}(a_j/b_k)$, pa je $\lim x_n = \operatorname{sgn}(a_j/b_k) \cdot \infty$.

b) Deljenjem brojioca i imenioca sa n^j, dobijamo da je $\lim x_n = a_j/b_j$.

c) U slučaju $j < k$, delimo brojilac i imenilac sa n^k (uvek delimo sa najvećim stepenom):

$$x_n = \frac{a_0/n^k + a_1/n^{k-1} + \cdots + a_{j-1}/n^{k-j+1} + a_j/n^{k-j}}{b_0/n^k + b_1/n^{k-1} + \cdots + b_{k-1}/n + b_k}.$$

Iz ovoga se vidi da je $\lim x_n = 0$.

197. Naći granične vrednosti nizova:

a) $\dfrac{n^{10} + 5n^6 - 3n^4 + 8n^2 - 10^6}{12n^{11} - n^{10} - 3n + 91}$ [0]

b) $\dfrac{17n^3 + 18n}{18n^3 + 19}$ [17/18]

c) $\dfrac{n^7 - 3n^4 + 8n^2 - 10}{1 - 6n^6}$ [$-\infty$]

198. Naći graničnu vrednost niza

$$x_n = \frac{3n^{3/2} + 2n + \sqrt{n}}{5n^{3/2} + 5n + 2\sqrt{n}}.$$

Rešenje. Deljenjem brojioca i imenioca sa $n^{3/2}$ dobijamo

$$x_n = \frac{3 + 2n^{-1/2} + n^{-1}}{5 + 5n^{-1/2} + 2n^{-1}}.$$

Prema tome, $\lim x_n = 3/5$.

199. Pokazati da niz $x_n = \dfrac{n^2(2+(-1)^n)+n}{2n^2+3n}$ nema graničnu vrednost.

200. Naći graničnu vrednost niza $\{x_n\}$ ako je

a) $x_n = \dfrac{2\sqrt[5]{n^2} - 3\sqrt[5]{n^3}}{3\sqrt[5]{n^2} + 2\sqrt[5]{n^3}}$, [$-3/2$]

b) $x_n = \dfrac{3n^{3/4} + 5n^{5/6} + 7n^{7/8}}{9n^{9/10} + 10n^{10/11}}$, [0] c) $x_n = \dfrac{n + \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{10n+\sqrt{10n+\sqrt{10n}}}}$ [$+\infty$]

201. Naći $\lim \dfrac{\sqrt[5]{n^4}\cos(2^n n!)}{2n+3}$.

Uputstvo. $\cos(2^n n!)$ je ograničen niz; pokazati da $\sqrt[5]{n^4}/(2n+3)$ teži nuli i iz toga izvesti da je granična vrednost datog niza jednaka nuli (videti zadatak 179).

202. Naći $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

♣ **Rešenje.** Izraz kojim se definiše dati niz je tipa $\infty - \infty$. Kako je

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

granična vrednost niza je 0.

203. Dokazati da je $\lim\left(\sqrt[k]{n+a} - \sqrt[k]{n+b}\right) = 0$ za svako $k = 2, 3, \ldots$ i za proizvoljne realne brojeve a i b.

Uputstvo. Primeniti formulu $u^k - v^k = (u-v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + \cdots + v^{k-1})$.

204. Naći $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$. [$1/2$]

205. Naći $\lim n^{7/4}\left(\sqrt[3]{n^6+n} - n^2\right)$.

Uputstvo. Transformisati izraz u zagradi, koristeći se formulom

$$u - v = (u^3 - v^3)/(u^2 + uv + v^2).$$

206. Odrediti prirodan broj k za koji važi

$$\lim \frac{n^{k-1}}{n^k-(n-1)^k} = \frac{1}{1994}.$$

Uputstvo. Razvijanjem $(n-1)^k$ po binomnoj formuli, pokazati da je granična vrednost sa leve strane date jednakosti jednaka $1/k$. Iz toga zaključiti da je $k = 1994$.

207. Dokazati da je

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & \text{ako je } |q|<1 \\ 1 & \text{ako je } q=1 \\ +\infty & \text{ako je } q>1\,. \end{cases}$$

Dokazati da niz q^n nema graničnu vrednost za $q \le -1$.

Rešenje. Za $q=1$, svi članovi niza su jednaki 1, pa je $\lim q^n = 1$.

Ako je $|q|<1$, tada je nejednakost $|q^n|<\varepsilon$ ekvivalentna sa $n\log|q|<\varepsilon$, tj. (zbog $\log|q|<0$) sa $n>\varepsilon/\log|q|$. Prema tome, niz q^n je nula niz.

Ako je $q>1$, tada je $q^n>K$ za svako $n>\log_q K$; stoga su, za dato $K>0$, skoro svi članovi niza veći od K, pa je granična vrednost niza jednaka $+\infty$.

Za $q=-1$, imamo da je $q_n=(-1)^n$ i granična vrednost ne postoji (zadatak 183).

Za $q<-1$, neka je $p=1/q$, $-1<p<0$. Niz p^n konvergira ka nuli i sadrži beskonačno mnogo i pozitivnih i negativnih članova, pa na osnovu zadatka 193 zaključujemo da ne postoji granična vrednost niza $q^n=1/p^n$.

208. **Zbir beskonačne geometrijske progresije.** Ispitati za koje $q\in\mathbf{R}$ postoji

$$\lim(1+q+\cdots+q^n)\,.$$

Rešenje. Neka je $x_n=1+q+\cdots+q^n$. Ako je $q=1$, tada je $x_n=n+1$, pa je $\lim x_n=+\infty$.

Za $q\neq 1$, imamo da je

$$x_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Iz zadatka 207 sledi da je

$$\lim x_n=\begin{cases}\frac{1}{1-q}\,, & \text{za } |q|<1\\ +\infty\,, & \text{za } q>1\,.\end{cases}$$

Za $q\le -1$ niz x_n nema graničnu vrednost.

209. Ako je $|a| < 1$, $|b| < 1$, odrediti

$$\lim \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n}.$$

Rezultat. $\dfrac{1-b}{1-a}$.

210. Naći $\lim x_n$, gde je

$$\text{a) } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^2}, \quad \text{b) } x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{k}{n}, \quad \text{c) } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}.$$

Rešenje. a) Koristeći se formulom za zbir prvih $n-1$ prirodnih brojeva, dobijamo

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

odakle je

$$\lim x_n = \lim \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

b) 1/2 , c) 1/3.

211. Naći $\lim \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)}$.

♣ **Rešenje.** Ako uočimo da je $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{(i+1)}$, imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

odakle nalazimo da je tražena granična vrednost jednaka 1.

Primedba. Sume gornjeg oblika u kojima se susedni članovi "potiru" nazivaju se **teleskopske** sume.

212. Dokazati: a) Ako je $x_n \geq y_n$ za skoro svako n i ako je $\lim y_n = +\infty$, tada je i $\lim x_n = +\infty$. b) Ako za skoro svako n važi $x_n \leq z_n$ i ako je $\lim z_n = -\infty$, tada je i $\lim x_n = -\infty$.

Uputstvo. a) Iz $x_n \geq y_n$ zaključujemo: ako je $y_n > K$, tada je i $x_n > K$. Ako su za svako K skoro svi članovi niza y_n veći od K, onda su i skoro svi članovi niza x_n veći od K.

213. Dokazati da je $\lim \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Rešenje. Kako je, za $n \geq 2$,

$$n^n = n \cdot n^{n-1} > n \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n \cdot n!,$$

imamo da je

$$\frac{n^n}{n!} > n,$$

odakle se dobija traženo tvrđenje.

214. Ako $x_n \to +\infty$, tada i $(x_n)^k \to +\infty$ za svako $k > 0$. Dokazati. Da li sličan rezultat važi ako je $\lim x_n = -\infty$?

Uputstvo. Ako $x_n \to +\infty$, tada su skoro svi članovi niza x_n veći od 2. Traženi rezultat se tada dobija iz zadatka 212.

215. Naći $\lim \frac{a^n}{n^k}$ $(a > 1, k \in \mathbf{R})$.

Rešenje. Pretpostavimo najpre da je $k > 0$.
Neka je $b = a^{1/k}$. Primenom binomne formule dobijamo

$$\begin{aligned} b^n = (1 + (b-1))^n &= 1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + \cdots \\ &> \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 \\ &> \frac{n^2}{4}(b-1)^2 \quad (\text{za } n > 2). \end{aligned} \tag{1}$$

Prema tome,

$$\frac{b^n}{n} > \frac{n}{4}(b-1)^2 .$$

Kad $n \to +\infty$, iz ovoga sledi da i $b^n/n \to +\infty$. Dalje je

$$\frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{\left(a^{1/k}\right)^n}{n}\right)^k = \left(\frac{b^n}{n}\right)^k \to +\infty .$$

Za $k \leq 0$ imamo da je

$$\frac{a^n}{n^k} \geq a^n \to +\infty .$$

216. Naći $\lim x_n$, gde je

a) $x_n = n/2^n$, **b)** $x_n = nq^n$ $(|q| < 1)$.

Rezultat. **a)** 0, **b)** 0.

217. Ako je $a > 0$, dokazati da je $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

Rešenje. Za svako dato $a > 0$ postoji neki prirodan broj $n_0 > a$. Prema tome, za $n > n_0$ imamo

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdots n_0 \cdots n} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a^{n-n_0}}{(n_0+1)\cdots n}$$
$$< \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0} = C \cdot q^{n-n_0},$$

gde je $C = a^{n_0}/(n_0-1)!$, $q = a/n_0 < 1$. Kako je $\lim q^{n-n_0} = q^{-n_0} \lim q^n = 0$, zaključujemo da je $\lim a^n/n! = 0$.

218. Naći $\lim \sqrt[n]{n}$.

Rešenje. Ako u nejednakosti (1) iz zadatka 215 stavimo $b = \sqrt[n]{n}$, dobijamo

$$n > \frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

odakle je

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \frac{4}{n}.$$

Kako je $4/n$ nula niz, to je i niz $|\sqrt[n]{n} - 1|$ nula niz, pa je $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

219. Ako je $\lim x_n = a > p$ $(< p)$, tada su skoro svi članovi niza x_n veći od p (manji od p). Dokazati.

Rešenje. Neka je $\lim x_n = a > p$. Očigledno je da su svi brojevi u intervalu $(a - (a-p)/2, a + (a-p)/2)$ veći od p. Po definiciji granične vrednosti, u ovom intervalu se nalaze skoro svi članovi niza, čime je tvrđenje dokazano. Drugi slučaj $(a < p)$ se dokazuje analogno.

Primedba. Ovaj jednostavan rezultat je veoma koristan u raznim zadacima. Najčešće se koristi u varijanti sa $p = 0$: Ako je granična vrednost niza pozitivna, tada su skoro svi članovi niza pozitivni.

220. Ako za skoro sve članove konvergentnog niza x_n važi $x_n > p$ $(x_n < p)$, tada je $\lim x_n \geq p$ $(\leq p)$.

Navesti primer niza za koji važi $x_n > p$, ali $\lim x_n = p$.

Rešenje. Neka je x_n konvergentan niz i neka su skoro svi članovi niza veći od p. Treba dokazati da je $\lim x_n \geq p$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim x_n < p$. Tada na osnovu zadatka 219 zaključujemo da je $x_n < p$ za skoro svako n, što je kontradikcija. Prema tome, $\lim x_n \geq p$.

Primetimo da iz $x_n > p$ ne možemo da zaključimo $\lim x_n > p$. Na primer, $1/n > 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$, ali je $\lim 1/n = 0$.

221. Dokazati da je $\lim \dfrac{\log_b n}{n} = 0$ $(b \neq 1)$.

Rešenje. Pretpostavimo najpre da je $b > 1$. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Kako je (zadatak 218), $\lim \sqrt[n]{n} = 1 < b^{\varepsilon}$, zaključujemo da za skoro svako n važi $\sqrt[n]{n} < b^{\varepsilon}$. Logaritmovanjem ove nejednakosti za osnovu $b > 1$ dobija se

$$0 \leq \frac{\log_b n}{n} < \varepsilon ,$$

i granična vrednost posmatranog niza je jednaka nuli.

Ako je $b < 1$, tada je $\log_b n = -\log_{1/b} n \to 0$ na osnovu prethodnog slučaja, jer je $1/b > 1$.

222. **Teorema o dva žandara.** Ako za skoro svako n važi

$$y_n \leq x_n \leq z_n \tag{1}$$

i ako je $\lim y_n = \lim z_n = c$, tada je i $\lim x_n = c$. Dokazati.

Da li teorema važi i ako je $c = \pm\infty$?

Rešenje. Pretpostavimo najpre da je $c \in \mathbf{R}$. Kako je $\lim y_n = \lim z_n = c$, za dato $\varepsilon > 0$ skoro svi članovi oba niza se nalaze u ε-okolini tačke c, tj. u intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Ako se y_n i z_n nalaze u pomenutom intervalu, tada iz nejednakosti (1) zaključujemo da

$$c - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < c + \varepsilon .$$

Prema tome, skoro svi članovi niza x_n se nalaze u ε-okolini tačke c, pa je $\lim x_n = c$.

Neka je sada $c = +\infty$. Iz leve nejednakosti u (1) imamo da je $x_n \geq y_n$; kako $y_n \to +\infty$ onda i $x_n \to +\infty$ (zadatak 212).

Ako je $c = -\infty$, tada iz desne nejednakosti u (1) zaključujemo da $x_n \to -\infty$.

Prema tome, ovaj rezultat važi za svako $c \in \mathbf{R}'$.

Primedba. Ova korisna teorema je dobila naziv ("dva žandara") po tome što y_n i z_n "sprovode" niz x_n u tačku c.

Često se ova teorema koristi sa $y_n = c$ ili $z_n = c$.

223. Ako je $a > 0$, naći $\lim a^{1/n}$.

Rešenje. Neka je $a \geq 1$. Tada za skoro svako n važi $1 \leq a < n$; korenovanjem nalazimo $1 \leq a^{1/n} < n^{1/n}$. Kako je $\lim n^{1/n} = 1$ (zadatak 218), primenom teoreme o dva žandara zaključujemo da je i $\lim a^{1/n} = 1$.

Za $0 < a < 1$, smenom $a = 1/b$ $(b > 1)$, dobijamo, prema prethodnom, da je $\lim a^{1/n} = \lim \dfrac{1}{b^{1/n}} = 1$.

224. Naći $\lim \dfrac{n+\left[\frac{n-1}{2}\right]}{n}$, gde je $[x]$ ceo deo broja x.

Rešenje. Iz definicije $[x]$ (najveći ceo broj ne veći od x) imamo da je

$$\frac{n-2}{2} \leq \left[\frac{n-1}{2}\right] \leq \frac{n-1}{2} .$$

Kako je

$$\lim \frac{n+\frac{n-2}{2}}{n} = \lim \frac{n+\frac{n-1}{2}}{n} = \frac{3}{2} ,$$

zaključujemo da je i tražena granična vrednost jednaka 3/2.

225. Ako su $p_1, \ldots, p_m$ dati nenegativni brojevi, naći $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p_1^n + \cdots + p_m^n}$.

♣ **Rešenje.** Neka je $p = \max\{p_1, \ldots, p_m\}$. Tada je

$$p^n \leq p_1^n + \cdots + p_m^n \leq p^n + p^n + \cdots + p^n = mp^n ,$$

odnosno

$$p \leq \sqrt[n]{p_1^n + \cdots + p_m^n} \leq p\sqrt[n]{m} .$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{m} = 1$ (zadatak 223), primenom teoreme o dva žandara dobijamo da je tražena granična vrednost jednaka p.

2.1.3 Stolzova teorema

√ *Neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

1°. $\lim y_n = +\infty$.

2°. Niz y_n *je monotono rastući.*

3°. Postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} .$$

Tada je

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} . \tag{1}$$

Pomoću ove teoreme mogu se određivati granične vrednosti tipa ∞/∞,[1] *ukoliko su ispunjeni navedeni uslovi. Naime, često je lakše naći graničnu vrednost sa desne strane jednakosti (1) od one sa leve strane.*

[1] I tip c/∞ se može formalno rešavati primenom STOLZove teoreme, ali za time nema potrebe.

Jednakost (1) može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} .$$

STOLZova *teorema očigledno važi i ako je* y_n *monotono opadajući niz koji teži ka* $-\infty$ *i ako je uslov* 3°. *ispunjen.*

Da se nijedan od tri navedena uslova ne može izostaviti, pokazuju kontraprimeri u zadacima 228, 229 i 230.

U nekim primenama STOLZove *teoreme korisna je jednakost*

$$\log \lim u_n = \lim \log u_n ,$$

koja važi ako je u_n *pozitivan niz. Pri tome uzimamo da je* $\log +\infty = +\infty$, $\log 0 = -\infty$. *Ova jednakost je posledica neprekidnosti funkcije* $x \mapsto \log x$ *(videti 2.5.2).*

226. Primenom STOLZove teoreme naći granične vrednosti:
a) $\lim \frac{n}{2^n}$, b) $\lim \frac{\log n}{n}$.

Rešenje. a) Niz $y_n = 2^n$ je monotono rastući i teži beskonačnosti. I treći uslov je ispunjen, jer je

$$\lim \frac{(n+1)-n}{2^{n+1}-2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0 .$$

Prema tome, $\lim n/2^n = 0$.
b)

$$\lim \frac{\log n}{n} = \lim \frac{\log(n+1) - \log n}{1} = \lim \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \log \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 .$$

Primedba. Uporediti sa rešenjima zadataka 215 i 221.

227. Naći $\lim 1/\sqrt[n]{n!}$.

Rešenje. U ovom slučaju ne možemo direktno da primenimo STOLZovu teoremu, između ostalog i zato što je provera da li izraz u brojiocu teži ka beskonačnosti ekvivalentna rešavanju zadatka. Međutim, logaritmovanjem nalazimo:

$$\log \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim \log \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = -\lim \frac{\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n}{n}$$
$$= -\lim \log n = -\log \lim n = -\infty .$$

Antilogaritmovanjem dobijamo da je $\lim 1/\sqrt[n]{n!} = 0$.

228. Pokazati na primeru da STOLZova teorema ne može da se primeni ako y_n ne teži ka beskonačnosti, iako su ostala dva uslova ispunjena.

Rešenje. Neka je $x_n = 2 - 1/n$, $y_n = 3 - 1/n$. Tada je y_n monotono rastući niz i

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = 1 ,$$

dok je $\lim x_n/y_n = 2/3$.

229. Pokazati da tvrđenje STOLZove teoreme ne mora da važi ako y_n nije monotono rastući niz, iako su ostala dva uslova ispunjena.

Rešenje. Neka je $x_n = n$, $y_n = 2n + (-1)^n n$. Niz y_n nije monotono rastući, ali teži ka beskonačnosti i važi

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{1}{2n \cdot (-1)^{n+1} + 2 + (-1)^{n+1}} \to 0 .$$

Međutim, količnik x_n/y_n nema graničnu vrednost jer je $x_n/y_n = 1/(2 + (-1)^n)$.

230. Pokazati da tvrđenje STOLZove teoreme ne mora da važi ako su ispunjena samo prva dva navedena uslova, a treći uslov (postojanje granične vrednosti količnika razlika) nije ispunjen.

Rešenje. Neka je $x_n = n + \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $y_n = n$. Tada je

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{3 + (-1)^n}{2}$$

i granična vrednost ovog niza ne postoji. S druge strane, $\lim x_n/y_n = 3/2$, kao što je pokazano u zadatku 224.

231. a) Ako niz x_n ima graničnu vrednost, dokazati da je

$$\lim \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \lim x_n .$$

b) Naći primer niza x_n koji nema graničnu vrednost, ali je konvergentan niz aritmetičkih sredina $(x_1 + \cdots + x_n)/n$.

Rešenje. a) Primenom STOLZove teoreme, dobijamo

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim \frac{(x_1 + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_{n-1})}{n - (n-1)}$$
$$= \lim x_n .$$

b) Niz $x_n = (-1)^n$ zadovoljava tražene uslove.

232. Pokazati da je $\lim \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1.$

233. Ako pozitivan niz x_n ima graničnu vrednost, dokazati da istu graničnu vrednost imaju i nizovi harmonijskih i geometrijskih sredina, tj. da je

$$\lim \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} = \lim \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lim x_n \ .$$

Rešenje. Za niz harmonijskih sredina primenom STOLZove teoreme nalazimo

$$\lim \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = \lim x_n \ .$$

Za niz geometrijskih sredina dokaz možemo da izvedemo logaritmovanjem:

$$\begin{aligned} \log \lim \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} &= \lim \frac{\log x_1 + \cdots + \log x_n}{n} = \lim \log x_n \\ &= \log \lim x_n \ . \end{aligned}$$

Alternativno, granična vrednost niza geometrijskih sredina može se dobiti iz nejednakosti između harmonijske, geometrijske i aritmetičke sredine (zadatak 40 na strani 12) i primenom teoreme o dva žandara.

234. a) Dokazati da za pozitivan niz x_n važi

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} \ , \tag{1}$$

ukoliko granična vrednost na desnoj strani postoji.

b) Konstruisati niz x_n za koji ne postoji granična vrednost na desnoj strani u (1), a granična vrednost na levoj strani postoji i konačna je.

Rešenje. a) Neka je $y_n = \log x_n$. Tada je

$$\begin{aligned} \log \lim \sqrt[n]{x_n} &= \lim \log \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{1}{n} \log x_n = \lim \frac{y_n}{n} \\ &= \lim \frac{y_{n+1} - y_n}{n+1-n} \\ &= \lim (y_{n+1} - y_n) = \lim \log \frac{x_{n+1}}{x_n} \\ &= \log \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} \ . \end{aligned}$$

Prema tome, dokazali smo da je $\log \lim \sqrt[n]{x_n} = \log \lim x_{n+1}/x_n$, što je ekvivalentno sa (1).

b) Neka je $x_n = 1$ ako je n paran i $x_n = 2$ ako je n neparan broj. Tada je $x_{n+1}/x_n = 1/2$ ili 2, zavisno od parnosti broja n; granična vrednost sa desne strane u (1) ne postoji. Granična vrednost sa leve strane jednaka je jedinici.

235. Naći graničnu vrednost

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \qquad (p \in \mathbf{N}) .$$

Rešenje. Ako označimo izraze u brojiocu i imeniocu sa x_n i y_n respektivno, i primenimo STOLZovu teoremu, dobijamo:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}$$
$$= \lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n^{p+1} - (p+1)n^p + \binom{p+1}{2} n^{p-1} - \cdots + (-1)^{p+1})} = \frac{1}{p+1} .$$

236. Ako $p \in \mathbf{N}$, izračunati graničnu vrednost

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) .$$

Rešenje. Dovođenjem na zajednički imenilac imamo

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{(p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}}{(p+1)n^p} .$$

Za svako $p \in \mathbf{N}$, imenilac gornjeg razlomka monotono raste ka $+\infty$. Primenom STOLZove teoreme nalazimo da je

$$L = \lim \frac{(p+1)n^p - n^{p+1} + (n-1)^{p+1}}{(p+1)n^p - (p+1)(n-1)^p} .$$

Iz binomnog razvoja dobijamo

$$L = \lim \frac{(p+1)n^p - n^{p+1} + n^{p+1} - \binom{p+1}{1} n^p + \binom{p+1}{2} n^{p-1} - \cdots + (-1)^{p+1}}{(p+1)n^p - (p+1)\left(n^p - \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} - \cdots + (-1)^p\right)}$$
$$= \lim \frac{\binom{p+1}{2} n^{p-1} - \binom{p+1}{3} n^{p-2} + \cdots + (-1)^{p+1}}{(p+1)\binom{p}{1} n^{p-1} - (p+1)\binom{p}{2} n^{p-2} + \cdots - (p+1)(-1)^p}$$
$$= \frac{\binom{p+1}{2}}{(p+1)\binom{p}{1}} = \frac{1}{2} .$$

2.2 Monotoni nizovi

2.2.1 Granična vrednost monotonog niza

- *Za niz* $\{x_n\}$ *kažemo da je monotono rastući (opadajući, neopadajući, nerastući) ako za skoro svako* n *važe redom nejednakosti*

$$x_{n+1} > x_n \qquad (x_{n+1} < x_n \ , \ x_{n+1} \geq x_n \ , \ x_{n+1} \leq x_n) \ .$$

- *Za niz koji ima jednu od navedenih osobina kažemo da je* **monoton niz.**

√ *Svaki monoton niz ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost. Ako je niz monotono neopadajući, tada je* $\lim x_n = \sup x_n \overset{\text{def}}{=} \sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. *Ako je* $\{x_n\}$ *monotono nerastući niz, tada je* $\lim x_n = \inf x_n \overset{\text{def}}{=} \sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

√ *Ako je niz monoton i ograničen, tada je konvergentan, tj. ima konačnu graničnu vrednost.*

237. Ako je niz monotono neopadajući i ograničen odozgo, dokazati da je konvergentan. Takođe dokazati da je konvergentan svaki monotono nerastući niz koji je ograničen odozdo.

Rešenje. Pretpostavimo da je niz $\{x_n\}$ monotono neopadajući i ograničen odozgo. Neka je $c = \sup x_n$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $x_{n_0} > c - \varepsilon$. Kako je niz monotono neopadajući, nejednakost $x_n > c - \varepsilon$ važi i za svako $n \geq n_0$. S druge strane, kako je $c = \sup x_n$, imamo da je $x_n \leq c$ za svako n. Odavde zaključujemo da za $n \geq n_0$ važe nejednakosti $-\varepsilon < x_n - c \leq 0$, pa je $\lim x_n = c$.

Slično se dokazuje i drugi deo tvrđenja.

238. Dokazati da za svako $x \in \mathbf{R}$ postoji niz celih brojeva k_n takav da za svako $n = 0, 1, \ldots$ važi

$$\frac{k_n}{b^n} \leq x < \frac{k_n + 1}{b^n} \ ,$$

gde je b dati prirodan broj veći od 1.

Iz ovoga izvesti da za svako $x \geq 0$ postoji monotono neopadajući niz

$$x_n = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + \ldots + c_0 + \frac{c_{-1}}{b} + \frac{c_{-2}}{b^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{b^n} \ ,$$

gde koeficijenti c_i pripadaju skupu $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, tako da je

$$\lim x_n = x \ .$$

Primedba. Niz x_n koji se pojavljuje u ovom zadatku je, u stvari, zapis broja x u sistemu sa osnovom b, tj. niz racionalnih aproksimacija u sistemu sa osnovom b. Za $b = 10$ dobija se niz decimalnih aproksimacija.

Rešenje. Neka je x dati realan broj. Tada je $b^n x$ takođe realan broj, koji se nalazi između dva susedna cela broja, nazovimo ih k_n i $k_n + 1$:

$$k_n \leq b^n x < k_n + 1 .$$

Deljenjem ovih nejednakosti sa b^n dobijamo

$$\frac{k_n}{b^n} \leq x < \frac{k_n + 1}{b^n} ,$$

čime smo dokazali prvi deo zadatka.

Neka je $x_n = k_n/b^n$. Kako je k_n ceo broj, on se može predstaviti u brojnom sistemu sa osnovom $b > 1$ (videti zadatak 42):

$$k_n = a_j b^j + a_{j-1} b^{j-1} + \cdots + a_1 b + a_0 ,$$

gde su $a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Prema tome,

$$x_n = \frac{k_n}{b^n} = a_j b^{j-n} + a_{j-1} b^{j-n-1} + \cdots + a_1 b^{1-n} + a_0 b^{-n} .$$

Niz x_n je monotono neopadajući, jer je $a_i \geq 0$. Kako je

$$x_n \leq x \leq x_n + \frac{1}{b^n} ,$$

zaključujemo da je niz x_n konvergentan i da mu je granična vrednost jednaka x.

239. Dokazati da za svaki realan broj x postoji niz r_n čiji su svi elementi racionalni brojevi i takav da je $\lim r_n = x$.

240. Neka je

$$x_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} ,$$

gde $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Dokazati da je x_n konvergentan niz.

Rešenje. Niz x_n je monotono rastući, jer je

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0 .$$

Dati niz je i ograničen odozgo. Naime, kako je $a_i < 10$, imamo

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\ &< \frac{10}{10} + \frac{10}{10^2} + \cdots + \frac{10}{10^n} \\ &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} \\ &= \frac{1 - (1/10)^n}{1 - 1/10} < \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Prema tome, dati niz ima konačnu graničnu vrednost x.

Primedba. Nije teško videti da je niz x_n u stvari niz decimalnih aproksimacija broja $x \in [0,1]$.

241. Polazeći od racionalne aproksimacije realnih brojeva, definisati izraz $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ svođenjem na racionalne stepene broja 2.

242. Neka je

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Dokazati da je niz x_n monotono rastući i da je niz y_n monotono opadajući. Zatim dokazati da oba niza imaju istu graničnu vrednost.

Rešenje. Količnik x_{n+1}/x_n može da se napiše u obliku

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n .$$

Na osnovu BERNOULLIjeve nejednakosti (videti zadatak 37) imamo da je

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1-\frac{n}{(n+1)^2} \qquad (n \geq 1).$$

Prema tome,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 .$$

Odavde je $x_{n+1} > x_n$, pa je niz x_n monotono rastući.

Na sličan način, polazeći od y_n/y_{n+1} i primenjujući BERNOULLIjevu nejednakost, možemo dokazati da je niz y_n opadajući.

Za svako $n \in \mathbf{N}$ očigledno važi $x_n < y_n$, pa iz dokazanog vidimo da su oba niza ograničena i monotona:

$$x_1 < x_2 < x_3 \ldots < y_3 < y_2 < y_1 .$$

Neka su x, y granične vrednosti ovih nizova. Ako u jednakosti

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

pustimo da $n \to +\infty$, dobićemo $x = y$; oba niza imaju istu graničnu vrednost.

2.2.2 Broj e

Broj e se definiše sa

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Broj e je iracionalan i transcendentan. Približna vrednost broja e je 2.71828..., *ili, sa prvih 540 decimala:*

$e \approx$ 2.71828182845904523536 02874713526624977572 47093699959574966967
6277240766 3035354759 4571382178 5251664274 2746639193 2003059921
8174135966 2904357290 0334295260 5956307381 3232862794 3490763233
8298807531 9525101901 1573834187 9307021540 8914993488 4167509244
7614606680 8226480016 8477411853 7423454424 3710753907 7744992069
5517027618 3860626133 1384583000 7520449338 2656029760 6737113200
7093287091 2744374704 7230696977 2093101416 9283681902 5515108657
4637721112 5238978442 5056953696 7707854499 6996794686 4454905987
9316368892 3009879312 7736178215 4249992295 7635148220 8269895193

Za izračunavanje broja e može se upotrebiti približna formula $e \approx (1 + 1/n)^n$, *ali je ovde potrebno uzeti veoma velike vrednosti n da bi se postigla dobra tačnost. Na primer, za* $n = 1000$ *dobija se* $e \approx 2.7169$, *dok se za* $n = 10000$ *dobija tek* 2.7181 *(pod uslovom da umemo da izračunamo* $(1 + 1/10000)^{10000}$, *što nije lako!) Zato se za efektivno izračunavanje broja e upotrebljavaju drugi nizovi koji brže konvergiraju ka broju e, kao što je niz u zadatku 243.*

243. Dokazati da niz

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

ima graničnu vrednost jednaku *e*. Izračunati prvih nekoliko članova ovog niza.

Rešenje. Polazeći od binomne formule, imamo

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \end{aligned}$$

Svaki član u zagradama je manji od 1, pa važi

(1) $$(\forall n \in \mathbf{N}) \quad x_n < u_n .$$

Kako su svi članovi u binomnom razvoju pozitivni, za $n > k$ imamo nejednakost

$$\begin{aligned} x_n &> \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) . \end{aligned}$$

Ako se ovde fiksira k i pusti da $n \to +\infty$, članovi u zagradama teže jedinici, i dobija se ♣

(2) $$(\forall k \in \mathbf{N}) \quad e = \lim x_n \geq u_k .$$

Kombinovanjem (1) i (2) nalazimo da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$x_n < u_n \leq e .$$

Odavde zaključujemo ("dva žandara") da je $\lim u_n = e$.

Prvih nekoliko članova niza u_n su: $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 2.5$, $u_5 = 2.717$, $u_{10} = 2.71828$. Kao što vidimo, deseti član niza u_n je bliži broju e od 10000-tog člana niza x_n.

244. **a)** Dokazati nejednakost

(1) $$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!} .$$

b) Koristeći činjenicu da je $n! \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ ceo broj, kao i rezultat pod a), dokazati da je broj e iracionalan.

Rešenje. **a)** U zadatku 243 je pokazano da je granična vrednost monotono rastućeg niza

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

jednaka e. Iz toga sledi da je $e > u_n$, što daje levu stranu nejednakosti (1).

Za fiksirano $n \in \mathbf{N}$ i za svako $m > n$ važi

(2) $$u_m = u_n + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} .$$

Ako pustimo da $m \to \infty$, dok n ostaje fiksirano, iz (2) dobijamo

$$\begin{aligned} e &= \lim_{m\to\infty} u_m = u_n + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \\ &= u_n + \frac{1}{n!} \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots m} \right) \\ &< u_n + \frac{1}{n!} \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}} \right) \\ &= u_n + \frac{1}{n!} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 - 1/(n+1)^{m-n}}{1 - 1/(n+1)} \\ &= u_n + \frac{1}{n \cdot n!} . \end{aligned}$$

Iz ovoga imamo da je[1]

$$e - u_n < \frac{1}{n \cdot n!} ,$$

što je desna nejednakost u (1).

b) Množenjem nejednakosti (1) sa $n!$ dobijamo

$$0 < e \cdot n! - n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n} . \tag{3}$$

Pretpostavimo da je broj e racionalan. Tada je, za dovoljno veliko n, broj $e \cdot n!$ ceo, pa se, prema (3), razlika dva cela broja (što je takođe ceo broj) nalazi između 0 i $1/n$, za svako dovoljno veliko n. Ovo je, naravno, nemoguće, što znači da je pretpostavka da je e racionalan broj netačna.

245. Dokazati da je

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e .$$

Rešenje. Polazeći od

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

i uvodeći smenu $m = n - 1$, nalazimo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = e .$$

[1] U izvođenju poslednje nejednakosti postoji jedan prelaz koji nije opravdan. Nađite to mesto i opravdajte postupak.

2.2.3 Nalaženje granične vrednosti monotonog i ograničenog niza

Neka je niz $\{x_n\}$ *zadat pomoću*

$$x_1 = a\,, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

gde je f *data neprekidna funkcija (videti 2.5.2). Jedan metod za određivanje granične vrednosti niza* x_n *sastoji se iz sledeća dva koraka:*

1°. *Dokaže se da je niz monoton i ograničen; prema tome ima konačnu graničnu vrednost* c.

2°. *Zatim se iz jednakosti* $x_{n+1} = f(x_n)$ *kad* $n \to +\infty$ *dobija* $c = f(c)$. *Rešenje ove jednačine je tražena granična vrednost.*

Navedeni metod se koristi ako je moguće rešiti jednačinu $c = f(c)$.

246. Niz $\{a_n\}$ ispunjava uslove

$$2 < a_1 < 3\,, \quad 5a_{n+1} = a_n^2 + 6\,.$$

Dokazati da je niz konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Pokazaćemo da je dati niz ograničen između 2 i 3, i da je monotono opadajući.

Prvi član pripada intervalu $(2, 3)$ po pretpostavci. Pretpostavimo da je $a_n \in (2, 3)$. Tada je $4 < a_n^2 < 9$, odakle sledi

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 6) > \frac{1}{5}(4 + 6) = 2\,,$$

i, na sličan način

$$a_{n+1} < \frac{1}{5}(9 + 6) = 3\,,$$

pa je time, prema principu matematičke indukcije, dokazano da svi članovi niza pripadaju intervalu $(2, 3)$.

Dalje, imamo da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n < 0 \iff \frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{5} < 0$$
$$\iff (a_n - 2)(a_n - 3) < 0 \iff 2 < a_n < 3,$$

što je tačno, pa je niz monotono opadajući.

Iz dokazanog proizilazi da dati niz ima konačnu graničnu vrednost a. Ako u jednakosti

$$5a_{n+1} = a_n^2 + 6$$

pustimo da $n \to \infty$, dobićemo

$$5a = a^2 + 6 .$$

Ova kvadratna jednačina ima rešenja $x = 2$ i $x = 3$. Kako je niz monotono opadajući, svi članovi niza su manji od prvog, a prvi je manji od 3, pa je

$$x_n < x_1 < 3 \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Kako se, prema (1), svi članovi niza nalaze van ε-okoline tačke 3 (za $\varepsilon = 3 - x_1$), granična vrednost niza ne može da bude jednaka 3. Stoga je $\lim x_n = 2$.

Primedba. Ispitati da li bi niz bio konvergentan za $a_1 < 2$ ili $a_1 > 3$.

247. Dat je niz

$$x_1 = 1 , \qquad x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3} , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti graničnu vrednost.

Rešenje. Da bismo ustanovili monotonost niza, posmatrajmo razliku

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3} - x_n = \frac{-x_n^2 + x_n + 2}{x_n + 3} . \tag{1}$$

Iz definicije niza dobija se (indukcijom) da je svaki član niza pozitivan. Prema tome, znak razlike u (1) zavisi samo od znaka izraza $-x_n^2 + x_n + 2$. Ispitivanjem znaka ovog kvadratnog trinoma, vidimo da je on pozitivan (tj, $x_{n+1} > x_n$) za $x_n \in (-1, 2)$ i negativan van tog intervala. Kako je $x_n > 0$, dovoljno je ispitati da li su (skoro) svi članovi niza manji ili veći od 2. Ako su skoro svi veći od 2, niz će biti monotono opadajući i ograničen odozdo; ako su skoro svi manji od 2, niz će biti monotono rastući i ograničen odozgo – u oba slučaja konvergentan. Prvih nekoliko članova niza su

$$x_1 = 1 , \; x_2 = \frac{3}{2} , \; x_3 = \frac{16}{9} \ldots ,$$

pa možemo pretpostaviti da je za svako n, $x_n < 2$. To ćemo sada i dokazati. Za $n = 1, 2, 3$, ova nejednakost je tačna. Pretpostavimo da je $x_n < 2$. Tada je

$$x_{n+1} = \frac{4(x_n + 3) - 10}{x_n + 3} = 4 - \frac{10}{x_n + 3} < 4 - \frac{10}{2 + 3} = 2 ,$$

pa je nejednakost dokazana matematičkom indukcijom. Iz toga zaključujemo da niz ima konačnu graničnu vrednoost x.

Ako u

$$x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}$$

pustimo da $n \to \infty$, dobijamo jednačinu

$$x = \frac{4x + 2}{x + 3} ,$$

odakle je $x = 2$ (drugo negativno rešenje odbacujemo).

248. U zavisnosti od parametra $a \geq 0$, ispitati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza $\{x_n\}$ definisanog sa

$$x_0 = a, \qquad x_n = x_{n-1} - ax_{n-1}^2 .$$

Rešenje. Kako je $x_n = x_{n-1} - ax_{n-1}^2 \leq x_{n-1}$, niz je monotono opadajući za svako $a \geq 0$. Prema tome, granična vrednost uvek postoji; ona može biti konačna (ako je niz ograničen) ili jednaka $-\infty$.

Ako postoji konačan $\lim x_n = c$, tada se iz definicione jednakosti dobija da je $c = 0$ za svako $a \geq 0$.

Kvadratna funkcija $f(x) = x - ax^2$ je nenegativna za $x \in [0, 1/a]$, i na tom intervalu je $0 \leq f(x) \leq 1/4a < 1/2a$. Dakle, f preslikava interval $[0, 1/a]$ u taj isti interval. Odavde zaključujemo: Ako je $a \leq 1$, tada je $x_0 \in [0, 1/a]$, i svi sledeći članovi niza ostaju u ovom intervalu; niz je ograničen. Na osnovu napred rečenog, granična vrednost niza je jednaka nuli.

Neka je $a > 1$. U ovom slučaju je $a > 1/a$, pa je $x_1 = f(a) < 0$. Kako je niz monotono opadajući, imamo da je $x_n \leq x_1$ za svako $n \geq 2$. Prema tome, nula nije granična vrednost niza, pa ostaje druga mogućnost, tj. $\lim x_n = -\infty$.

Primedba. Ovaj zadatak je ujedno i kontraprimer da ispitivanje konvergencije niza ne može da se izostavi. Naime, ako bismo, za $a > 1$, pretpostavili da postoji $\lim x_n = c \in \mathbf{R}$, iz definicione jednakosti bismo dobili $c = c - ac^2$, tj. $c = 0$, što nije tačno, jer je u ovom slučaju $c = -\infty$.

249. Dat je niz

$$a_1 = 0, \; a_{n+1} = \sqrt{p + a_n}, \quad (p \geq 0, \; n = 1, 2 \ldots).$$

Ispitati konvergenciju datog niza i odrediti graničnu vrednost ako postoji.

Rešenje. Ako je $p = 0$, tada su svi članovi datog niza jednaki nuli.

Neka je $p > 0$. Tada je niz a_n očigledno pozitivan za $n \geq 1$. Ako postoji konačna granična vrednost A, onda je

(1) $$A = \sqrt{p + A} .$$

Kvadriranjem se iz (1) dobijaju dva rešenja, od kojih je pozitivno samo

(2) $$A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4p}}{2} .$$

Prema tome, granična vrednost niza je jednaka A, ako je niz konvergentan.

Dokazaćemo sada da je niz monotono rastući i ograničen.

Iz definicije niza a_n imamo

$$a_{n+1} > a_n \iff \sqrt{p + a_n} > a_n$$
$$\iff p + a_n > a_n^2 \iff a_n^2 - a_n - p < 0$$

$$\iff \frac{1-\sqrt{1+4p}}{2} < a_n < \frac{1+\sqrt{1+4p}}{2}$$

$$\iff a_n < \frac{1+\sqrt{1+4p}}{2} = A \quad (\text{zbog } a_n > 0) .$$

Dokažimo da za sve članove niza važi nejednakost

(3) $$a_n < A ,$$

gde je A definisano sa (2). Time će istovremeno biti dokazano i da je niz konvergentan (monotono rastući i ograničen odozgo).

Za $n = 0$ nejednakost (3) je tačna. Pretpostavimo da (3) važi za neko n. Tada je

$$a_{n+1} = \sqrt{p+a_n} < \sqrt{p+A} = A ,$$

čime je dokazano da (3) važi za svako $n = 0, 1, 2, \ldots$

250. Dokazati da je niz $\{x_n\}$, definisan sa

$$x_0 = \sqrt{2}, \qquad x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

251. Ispitati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza datog sa

$$x_0 > 0 \; ; \; x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots \; ; a \geq 0)$$

Rešenje. Kako je $x_0 > 0$, očigledno je da je $x_n > 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Iz definicione formule se dobija da je

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} ,$$

tako da monotonost niza zavisi od znaka razlike $a - x_n^2$, tj, od znaka razlike $\sqrt{a} - x_n$. Imamo da je

$$\sqrt{a} - x_n = \sqrt{a} - \frac{x_{n-1}^2 + a}{2x_{n-1}} = -\frac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2x_{n-1}} < 0 ,$$

pa je niz monotono opadajući, i ograničen sa donje strane, iz čega sledi da ima konačnu graničnu vrednost x. Iz definicione relacije se dobija da x zadovoljava jednačinu

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) ,$$

čija su rešenja $x = \pm\sqrt{a}$. Kako su svi članovi niza pozitivni, granična vrednost ne može da bude negativna, pa je $\lim x_n = \sqrt{a}$.

Primedba. Ovaj rezultat daje mogućnost za izračunavanje kvadratnog korena pozitivnog broja. Na primer, za $a = 2$ imamo

$$x_0 = 2\,,\ x_1 = 1.5\,,\ x_2 = 1.4167\,,\ x_3 = 1.414257\,,\ x_3 = 1.4142135\ldots$$

252. Niz x_n je definisan na sledeći način:

$$x_1 = a \in (0,1), \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost. Zatim naći

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2\,.$$

Rešenje. Kako je $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \le 0$, niz je monotono opadajući. Dokažimo da su svi članovi datog niza manji od 1. Imamo da je $x_1 < 1$ po definiciji niza. Za $n \ge 1$ važi ekvivalencija

$$x_{n+1} < 1 \iff x_n^2 - x_n + 1 > 0\,.$$

Nejednakost sa desne strane je tačna, jer je diskriminanta kvadratnog trinoma $x \mapsto x^2 - x + 1$ manja od nule, a koeficijent uz x^2 je pozitivan. Odavde zaključujemo da je $x_n < 1$ za $n = 2,3\ldots$ Dokažimo sada da je $x_n > 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Za $n = 1$ ovo je tačno po definiciji niza. Za $n \ge 1$ važi

$$x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{x_n}_{>0}\underbrace{(1 - x_n)}_{>0} > 0\,,$$

pa je nejednakost $x_n > 0$ dokazana matematičkom indukcijom.

Kako je niz x_n monoton i ograničen, on je i konvergentan; ako je $\lim x_n = x$, tada je $x = x - x^2$, odnosno $x = 0$.

Da bismo odredili graničnu vrednost date sume, uočimo da je za svako $k \in \mathbf{N}$, $x_k^2 = x_k - x_{k+1}$, pa je

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1}) = x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \cdots + x_{n-1} - x_n = x_1 - x_n\,.$$

Prema tome,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lim_{n\to+\infty} (x_1 - x_{n+1}) = x_1 = a\,.$$

253. Niz $\{x_n\}$ je definisan pomoću

$$0 < x_1 < b, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}} \qquad a, b > 0, n = 1, 2, \ldots$$

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti graničnu vrednost.

Uputstvo. Pokazati da je niz monotono rastući i da se svi članovi niza nalaze u intervalu $(0, b)$.

254. Dokazati da su nizovi x_n i y_n, definisani pomoću

$$x_1 = a > 0, \; y_1 = b > a, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \; y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} ,$$

konvergentni i da imaju istu graničnu vrednost c. Zatim dokazati da je

$$\sqrt{ab} < c < \frac{a+b}{2} .$$

Primedba. Broj c se naziva **aritmetičko-geometrijska sredina** brojeva a i b.

Rešenje. Ako je $a < b$, tada je, na osnovu nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine,

$$x_2 = \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} = y_2 .$$

Pretpostavimo da je $x_n < y_n$. Ponovo primenjujući nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine, dobijamo da je

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} < \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1} .$$

Prema tome, dokazali smo da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi nejednakost $x_n < y_n$. Dalje, iz

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{x_n \cdot x_n} = x_n ,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n ,$$

vidimo da je niz x_n rastući, dok je niz y_n opadajući.

Dakle, važe sledeće nejednakosti:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < y_3 < y_2 < y_1 = b , \tag{1}$$

iz čega sledi da su oba niza ograničena i monotona. Neka je $\lim x_n = c_1$, $\lim y_n = c_2$. Ako u jednakosti $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$ pustimo da $n \to \infty$, dobijamo $c_2 = (c_1 + c_2)/2$, odakle je $c_1 = c_2 = c$.

Iz nejednakosti (1) zaključujemo takođe da je

$$\sqrt{ab} = x_2 < c, \quad c < y_2 = \frac{a+b}{2} ,$$

što je i trebalo dokazati.

255. Neka je x_n monotono rastući niz i neka je y_n monotono opadajući niz, pri čemu za skoro svako $n \in \mathbf{N}$ važi $x_n \leq y_n$. Neka je, pored toga, $\lim(y_n - x_n) = 0$. Dokazati da su oba niza konvergentna i da imaju istu graničnu vrednost.

Rešenje. Iz pretpostavki zadatka sledi da je

$$x_{n_0} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n_0}$$

za svako $n \geq n_0$, gde je n_0 najmanji indeks od koga su oba niza monotona i od koga važi da je $x_n < y_n$.

Iz gornjih nejednakosti zaključujemo da su nizovi x_n i y_n ograničeni, pa kako su i monotoni, imaju granične vrednosti; neka su to x i y respektivno. Iz $\lim(y_n - x_n) = 0$ dobijamo

$$y - x = \lim y_n - \lim x_n = \lim(y_n - x_n) = 0 ,$$

čime je dokaz završen.

256. **Umetnuti intervali.** Neka su dati brojevi a_n i b_n tako da

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 .$$

Na taj način su formirani zatvoreni intervali $[a_n, b_n]$, $(n = 1, 2 \ldots)$. Ako još pretpostavimo da dužina intervala teži nuli, tj. da je $\lim(b_n - a_n) = 0$, tada se ovi intervali nazivaju umetnuti intervali.

Dokazati da svaka familija umetnutih intervala ima jednu i samo jednu zajedničku tačku.

Rešenje. Na osnovu zadatka 255, nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ imaju zajedničku graničnu vrednost c. Kako je a_n rastući, a b_n opadajući niz, imamo da je

$$c = \sup a_n = \inf b_n .$$

Prema tome, za svako $n \in \mathbf{N}$ važi da je $a_n \leq c \leq b_n$; stoga tačka c pripada svim intervalima. Pretpostavimo da je d neka tačka koja takođe pripada svim intervalima. Iz ove pretpostavke imamo da je $d \geq a_n$ za svako n, tj. d je gornja granica niza $\{a_n\}$. Kako je supremum najmanja gornja granica, imamo da je $d \geq \sup a_n = c$. Na sličan način zaključujemo i da je $d \leq \inf b_n = c$, što je mogućno ako i samo ako je $d = c$, pa je c jedinstvena tačka preseka svih intervala.

►► 8.1

2.3 Podnizovi

2.3.1 Podnizovi i njihove granične vrednosti

- *Neka je x_n dati niz, i neka je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ monotono rastući niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$* **podniz** *niza $\{x_n\}$.*

√ *Niz x_n ima graničnu vrednost a ako i samo ako svaki njegov podniz ima graničnu vrednost a.*

√ **Bolzano-Weierstrassov stav.** *Svaki ograničeni niz ima konvergentan podniz (tj. jedan podniz koji konvergira ka konačnoj graničnoj vrednosti).*

257. Ako je x_n dati niz, da li su sledeći nizovi njegovi podnizovi:

a) $x_2, x_4, \ldots$

b) $x_3, x_2, x_5, x_4, x_7, x_6 \ldots$

c) $\{x_{n_k}\}$, gde je x_{n_k} k-ti po redu pozitivan član niza $\{x_n\}$

Rešenje. Nizovi a) i c) jesu podnizovi, dok b) nije (indeksi nisu monotono rastući).

! **258.** Ako se niz x_n može predstaviti kao unija m svojih podnizova, i ako svaki od njih ima graničnu vrednost L, tada je i $\lim x_n = L$. Dokazati.

Primedba. Iz ovog rezultata sleduje da nije potrebno proveravati konvergenciju **svih** podnizova da bi se ustanovila konvergencija niza, već je dovoljno to uraditi sa dva ili više podnizova čija je unija dati niz. Tipičan primer je da se iz $\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = \lim_{k\to+\infty} x_{2k+1} = L$ zaključuje da je i $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$.

Rešenje. Daćemo dokaz za $m = 2$; u slučaju $m > 2$ dokaz je sličan. Neka je x_n dati niz, i neka su x_{n_j} i x_{n_k} njegovi podnizovi, takvi da se svako x_n pojavljuje kao element jednog od navedenih podnizova. Kako oba podniza imaju graničnu vrednost L, sleduje da za svako dato $\varepsilon > 0$ postoje brojevi n' i n'' takvi da

$$(\forall n_j > n')\ |x_{n_j} - L| < \varepsilon, \qquad (\forall n_k > n'')\ |x_{n_k} - L| < \varepsilon .$$

Neka je $n_0 = \max(n', n'')$. Po pretpostavci, za svako x_n postoji indeks j ili k tako da je $x_n = x_{n_j}$ ili x_{n_k}; u oba slučaja iz $n > n_0$ sleduje $|x_n - L| < \varepsilon$, čime je dokazano da je $\lim x_n = L$.

259. Ako su podnizovi $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k+1}\}$ i $\{x_{7k}\}$ konvergentni, dokazati da je tada i niz $\{x_n\}$ konvergentan.

Rešenje. Neka je $\lim x_{2k} = a$, $\lim x_{2k+1} = b$ i $\lim x_{7k} = c$. Podniz $\{x_{7k}\}$ sadrži jedan podniz sa parnim indeksima i jedan podniz sa neparnim indeksima. Odavde zaključujemo da je $a = b = c$, pa je na osnovu zadatka 258 dati niz konvergentan.

260. Ako je $\lim x_n = +\infty$ ili $\lim x_n = -\infty$, dokazati da je

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e\,.$$

Rešenje. Neka je $\lim x_n = +\infty$. Za svako n, postoje dva susedna cela broja između kojih se nalazi broj x_n:

$$N(n) \le x_n < N(n)+1\,.$$

Iz ovih nejednakosti sledi

$$(1)\qquad \left(1+\frac{1}{N(n)+1}\right)^{N(n)} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{N(n)}\right)^{N(n)+1}.$$

Kada se iz niza $N(n)$ uklone elementi koji se eventualno ponavljaju, dobija se neki podniz n_k prirodnih brojeva; na osnovu zadatka 185 imamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{N(n)+1}\right)^{N(n)} &= \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\\ &= \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} = e\,,\end{aligned}$$

jer je $\lim(1+1/(n_k+1))^{n_k+1} = \lim(1+1/n)^n = e$, dok je $\lim(1+1/(n_k+1)) = 1$. Na sličan način imamo da je

$$\lim\left(1+\frac{1}{N(n)}\right)^{N(n)+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e.$$

Na osnovu "teoreme o dva žandara", iz (1) zaključujemo da je $\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, što je i trebalo dokazati.

Slučaj $x_n \to -\infty$ se razmatra analogno, polazeći od činjenice da je $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ (zadatak 245).

261. Dokazati: Ako je $\lim x_n = 0$ $(x_n \neq 0)$, tada je

$$\lim(1+x_n)^{1/x_n} = e\,.$$

Rešenje. Dokaz sledi iz zadataka 258 i 260. Naime, ako se niz x_n rastavi na dva podniza $x_{n'} > 0$ i $x_{n''} < 0$, tada je

$$y_n = \frac{1}{x_{n'}} \to +\infty;\quad z_n = \frac{1}{x_{n''}} \to -\infty\,,$$

pa ćemo imati da je, na primer, za prvi podniz:

$$\lim(1+x_{n'})^{1/x_{n'}} = \lim\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \to e$$

i isto za podniz negativnih elemenata. Iz ovoga se dobija traženi rezultat.

262. Dokazati: Ako je niz x_n monoton, i ako je jedan podniz x_{n_k} konvergentan, tada je i x_n konvergentan niz.

Dokazati analogno tvrđenje u slučaju kada je granična vrednost podniza x_{n_k} beskonačna.

Rešenje. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je niz monotono rastući. Neka je x_{n_k} njegov konvergentan podniz, i neka je $\lim x_{n_k} = L \in \mathbf{R}$. Po definiciji podniza, niz prirodnih brojeva n_k je monotono rastući i teži ka beskonačnosti. Prema tome, za svaki dovoljno veliki dati prirodan broj m, postoji neko $k = k(m)$, tako da je

$$n_{k(m)} \le m \le n_{k(m)+1} .$$

Iz monotonosti niza x_n sleduje da je tada

$$x_{n_{k(m)}} \le x_m \le x_{n_{k(m)+1}} . \tag{1}$$

Uvedimo oznake

$$y_m = x_{n_{k(m)}} , \; z_m = x_{n_{k(m)+1}} .$$

Nizovi y_m i z_m su podnizovi konvergentnog niza x_{n_k}, pa je, prema tome, $\lim y_m = \lim z_m = L$. Tada iz (1) sleduje (teorema o dva žandara) da je $\lim x_m = L$, čime je tvrđenje dokazano.

Ako je $L = \pm\infty$, dokaz je sličan.

2.3.2 Najmanja i najveća granična vrednost podniza

Neka je $\{x_n\}$ dati niz.

- *Najmanju graničnu vrednost nekog podniza $\{x_{n_k}\}$ nazivamo* **limes inferior** *niza $\{x_n\}$, u oznaci $\underline{\lim}\, x_n$ ili $\liminf x_n$.*
- *Najveću graničnu vrednost nekog podniza nazivamo* **limes superior** *niza $\{x_n\}$, u oznaci $\overline{\lim}\, x_n$ ili $\limsup x_n$.*

✓ *$\overline{\lim}\, x_n$ i $\underline{\lim}\, x_n$ mogu da budu realni brojevi ili $\pm\infty$.*

✓ *Niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost ako i samo ako je $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.*

✓ *Niz $\{x_n\}$ je ograničen ako i samo ako su $\underline{\lim}\, x_n$ i $\overline{\lim}\, x_n$ konačni.*

263. Naći $\underline{\lim}\, x_n$ i $\overline{\lim}\, x_n$ ako je

a) $x_n = (-1)^n$, b) $x_n = (-1)^{n-1}(2n-1)$, c) $x_n = n^{1+(-1)^n}$.

Rezultat. a) $-1, 1$ b) $-\infty, +\infty$ c) $1, +\infty$.

264. Dokazati:

$$\underline{\lim}\,(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n\,, \qquad \overline{\lim}\,(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n\,.$$

265. Ako niz $\{x_n\}$ nije ograničen odozdo (odozgo) dokazati da je $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$ ($\overline{\lim}\, x_n = +\infty$).

266. Pod kojim uslovima važe nejednakosti

$$\text{a)}\ \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\,(x_n + y_n) \le \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n\,,$$

$$\text{b)}\ \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \le \overline{\lim}\,(x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n\ ?$$

Rešenje. Nejednakosti neće važiti u slučaju kada je, na primer, $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, $\underline{\lim}\, y_n = +\infty$, jer tada leva strana nejednakosti u a) nije definisana. Pokazaćemo da ove nejednakosti važe kad su svi izrazi definisani, dakle kada se ne pojavljuju izrazi oblika $\infty - \infty$.

a) Dokažimo najpre levu nejednakost. Neka su x_{n_k}, y_{n_j}, x_{n_i}, y_{n_i} podnizovi za koje važi

$$\lim x_{n_k} = \underline{\lim}\, x_n,\ \lim y_{n_j} = \underline{\lim}\, y_n,$$

$$\lim(x_{n_i} + y_{n_i}) = \underline{\lim}\,(x_n + y_n)\,.$$

Kako je $\underline{\lim}$ najmanja granična vrednost nekog podniza, imaćemo da je

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n &= \lim x_{n_k} + \lim y_{n_j} \le \lim x_{n_i} + \lim y_{n_i} \\ &= \underline{\lim}\,(x_n + y_n)\,,\end{aligned}$$

čime je dokazana leva nejednakost u a). Desnu nejednakost u a) nije moguće dokazati na analogan način, ali se ona može izvesti iz leve nejednakosti. Naime, na osnovu zadatka 264, nejednakost

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \le \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$$

je ekvivalentna sa

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) + \underline{\lim}\,(-y_n) \le \underline{\lim}\, x_n\,. \tag{1}$$

Ako u levoj nejednakosti u a) zamenimo x_n sa $x_n + y_n$, i y_n sa $-y_n$, dobijamo

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) + \underline{\lim}\,(-y_n) \le \underline{\lim}\,(x_n + y_n - y_n) = \underline{\lim}\, x_n\,,$$

čime je dokazana nejednakost (1).

b) Kako je $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}\,(-x_n)$ itd., iz a) dobijamo

$$(2)\quad -\overline{\lim}\,(-x_n) - \overline{\lim}\,(-y_n) \leq -\overline{\lim}\,(-x_n - y_n) \leq -\overline{\lim}\,(-x_n) - \underline{\lim}\,(-y_n)\,.$$

Kako (2) važi za proizvoljne nizove (uz navedena ograničenja), možemo da zamenimo $-x_n$ sa x_n i $-y_n$ sa y_n; na taj način, posle množenja sa (-1) dobijamo

$$\overline{\lim}\,(x_n) + \overline{\lim}\,(y_n) \geq \overline{\lim}\,(x_n + y_n) \geq \overline{\lim}\,(x_n) + \underline{\lim}\,(y_n)\,,$$

što je i trebalo dokazati.

267. Dokazati: Ako za pozitivan niz x_n važi

$$\overline{\lim}\, x_n \,\overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = 1\,,$$

tada postoji konačan $\lim x_n$.

268. U zadatku 234 je pokazano da za pozitivan niz x_n važi jednakost $\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim(x_{n+1}/x_n)$. Da li ova jednakost važi i ako se lim zameni sa $\overline{\lim}$?

Rešenje. Ne u opštem slučaju. Neka je $x_n = 1$ ako je n paran broj i $x_n = 2$ ako je n neparan broj. Tada je $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} = 1$, dok je $\overline{\lim}\, x_{n+1}/x_n = 2$.

269. Da li za svaki niz x_n važi

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{1\leq k\leq n} x_k\,, \quad \overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{1\leq k\leq n} x_k ?$$

Rezultat. Ne.

270. Dokazati da je

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} x_k\,, \quad \overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k\,.$$

271. Ako je $l = \underline{\lim}\, x_n$, $L = \overline{\lim}\, x_n$, pri čemu je $l \neq L$, ispitati da li za skoro sve članove niza x_n mora da važi $l \leq x_n \leq L$.

Rešenje. Nejednakost $l \leq x_n \leq L$ ne mora da važi za skoro svako n. Na primer, neka je

$$x_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{ako je } n \text{ neparan broj,} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Tada je $\underline{\lim}\, x_n = 1$, $\overline{\lim}\, x_n = 2$, i svi članovi niza su van intervala $[1, 2]$.

272. Neka je $\overline{\lim}\, x_n = L \in \mathbf{R}$. Dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ može da postoji samo konačno mnogo članova niza koji su veći od $L + \varepsilon$ (tj. skoro svi članovi niza su manji od $L + \varepsilon$).

Rešenje. Možemo pretpostaviti da je niz ograničen odozgo, jer je u suprotnom slučaju $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$. Ako postoji beskonačno mnogo članova niza koji su veći od $L + \varepsilon$, tada postoji i jedan podniz x_{n_k} čiji su svi članovi veći od $L + \varepsilon$. Podniz x_{n_k} je ograničen, pa na osnovu BOLZANO–WEIERSTRASSovog stava on ima jedan konvergentan podniz, recimo $x_{n_{k_j}}$. Granična vrednost ovog podniza je $\geq L + \varepsilon$, jer su svi članovi veći od $L + \varepsilon$. Međutim, to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je L najveća granična vrednost nekog podniza.

273. Dokazati: $\overline{\lim}\, x_n = L \in \mathbf{R}$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo članova niza x_n koji su veći od $L - \varepsilon$ i samo konačno mnogo onih koji su veći od $L + \varepsilon$. Formulisati i dokazati analogno tvrđenje za $\underline{\lim}$.

2.3.3 Tačka nagomilavanja

- *Neka je dat skup A realnih brojeva. Kažemo da je $a \in \mathbf{R}$ tačka nagomilavanja skupa A ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka iz skupa A različita od a.*

  Tačka nagomilavanja skupa A ne mora da pripada skupu A.

- *Ako $x \in A$ nije tačka nagomilavanja skupa A, ona se naziva* **izolovana tačka.** *Za svaku izolovanu tačku skupa A postoji neka njena okolina u kojoj se ne nalazi ni jedna druga tačka iz skupa A.*

- *Tačka nagomilavanja niza $\{x_n\}$ definiše se kao tačka nagomilavanja skupa $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.*[1]

274. Naći sve tačke nagomilavanja skupova **a)** $(0, 1]$, **b)** $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$, **c)** $\mathbf{N}$, **d)** $\mathbf{Q}$.

Rezultat. **a)** Sve tačke zatvorenog intervala $[0, 1]$. **b)** Samo 0. **c)** Nema tačaka nagomilavanja. **d)** Ceo skup $\mathbf{R}$.

275. Naći izolovane tačke skupova **a)** $(0, 1]$, **b)** $(0, 1) \cup 2$, **c)** $\mathbf{N}$, **d)** $\mathbf{Q}$.

Rezultat. **a)** Nema izolovanih tačaka. **b)** 2. **c)** Sve tačke skupa $\mathbf{N}$. **d)** Nema izolovanih tačaka.

[1] Tačka nagomilavanja niza definiše se u literaturi i kao granična vrednost nekog njegovog podniza.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

276. Neka je $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Ispitati da li su tačke 0, 1, 2, 1/3, tačke nagomilavanja ili izolovane tačke skupa S.

Rešenje. Kako je $\lim \frac{1}{n} = 0$, u svakoj okolini tačke 0 nalaze se elementi skupa S, koji su, naravno, različiti od nule po definiciji skupa S. Prema tome, 0 je tačka nagomilavanja skupa S.

Tačka 1 pripada skupu S, ali nije njegova tačka nagomilavanja. Na primer, u okolini $(0.9, 1.1)$ ne nalazi se ni jedan element skupa S različit od 1. Prema tome, 1 je izolovana tačka skupa S. Isto važi i za tačku 1/3.

Tačka 2 ne pripada skupu S, pa ne može da bude izolovana tačka ovog skupa. U okolini, na primer, $(1.5, 2.5)$ ne nalazi se ni jedan element skupa S. Dakle, 2 nije ni tačka nagomilavanja skupa S.

277. Dokazati da svaki beskonačan ograničen podskup skupa **R** ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Rešenje. Neka je A ograničen skup. Ako u skupu A postoji beskonačno mnogo različitih elemenata, onda skup A sadrži i neki niz međusobno različitih brojeva x_n. Na osnovu BOLZANO–WEIERSTRASSovog stava, postoji bar jedan konvergentan podniz x_{n_k}. Neka je $\lim x_{n_k} = a$. Tada se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi podniza x_{n_k}; oni su različiti od a (jer su međusobno različiti) i pripadaju skupu A. Ovo po definiciji znači da je a tačka nagomilavanja skupa A.

278. Dokazati da svaki konvergentan niz čiji su članovi međusobno različiti, ima jedinstvenu tačku nagomilavanja. Objasniti zašto članovi treba da budu različiti da bi ovo važilo.

279. Ako su svi članovi niza međusobno različiti, tada je svaka tačka nagomilavanja istovremeno i granična vrednost nekog podniza i obrnuto. Dokazati.

280. Konstruisati niz za koji su svi članovi datog niza $\{a_n\}$ tačke nagomilavanja. Koje još tačke nagomilavanja ima tako konstruisani niz ?

Rešenje. Neka je $x_n^{(k)} = a_k + \dfrac{1}{n}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$. Formirajmo niz

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \tag{1}$$

Za svako $k \in \mathbf{N}$, niz $x_n^{(k)}$ je podniz niza (1) i imamo da je

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^{(k)} = \lim_{n \to +\infty} \left(a_k + \frac{1}{n} \right) = a_k.$$

Prema tome, a_k je tačka nagomilavanja niza (1).

Niz (1) ima kao svoju tačku nagomilavanja i svaku tačku nagomilavanja niza $\{a_n\}$, ako takve tačke postoje.

2.4 Kompletnost

2.4.1 Cauchyjev niz

- *Za niz* $\{x_n\}$ *kažemo da je* CAUCHYjev *niz ako*

(1) $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \geq n_0) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon \, .$$

✓ *Ekvivalentno, niz je* CAUCHYjev *ako važi da je*

(2) $$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} |x_m - x_n| = 0,$$

tj. ako $|x_m - x_n|$ *teži nuli kada* m *i* n *teže beskonačnosti nezavisno jedan od drugog.*[1]

✓ **Cauchyjev kriterijum konvergencije nizova.** *Niz realnih brojeva ima konačnu graničnu vrednost ako i samo ako je* CAUCHYjev *niz.*

Dakle, niz je konvergentan u skupu $\mathbf{R}$ *ako i samo ako je* CAUCHYjev. *Razlog zašto upotrebljavamo dva posebna termina koji su sinonimi je u tome što ova osobina ne važi ako se skup* $\mathbf{R}$ *zameni nekom drugim skupom (videti 2.4.2).*

281. Dokazati da

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

nije CAUCHYjev niz.

Rešenje. Neka je n proizvoljan prirodan broj i neka je $m > n$. Imamo da je

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m} \, .$$

Ako je $m = 2n$, tada je

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Prema tome, za proizvoljno veliko n, razlika $|x_{2n} - x_n|$ je veća od $1/2$. Ako bi niz bio CAUCHYjev, za $\varepsilon = 1/4$ na primer, postojao bi indeks n_0 tako da za svako $n > n_0$ važi $|x_{2n} - x_n| < \varepsilon$. Dakle, niz $\{x_n\}$ nije CAUCHYjev niz.

282. Pretpostavimo da za (skoro) svako $n \in \mathbf{N}$ i svako $m > n$ važi

$$|x_m - x_n| \leq |y_m - y_n| \, .$$

Ako je niz $\{y_n\}$ CAUCHYjev, tada je i $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz. Dokazati.

[1] Za tačno značenje jednakosti (2) i dokaz ekvivalencije sa (1), videti zadatak 1098 na strani 498.

283. Dokazati da za svaki CAUCHYjev niz $\{x_n\}$ važi

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+k} - x_n| = 0 \qquad \text{za svako } k \in \mathbf{N} . \tag{1}$$

Pokazati da (1) nije dovoljan uslov da niz bude CAUCHYjev.

Rešenje. Neka je dat CAUCHYjev niz $\{x_n\}$ i neka je k dati prirodan broj. Ako u definiciji CAUCHYjevog niza (1) na strani 101 stavimo da je $m = n + k$ dobićemo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon ,$$

što je ekvivalentno sa tvrđenjem da je $\lim_{n\to\infty} |x_{n+k} - x_n| = 0$.

Da bismo pokazali da obrnuto ne važi, posmatrajmo niz definisan sa

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

Kako je za svako $k \in N$,

$$|x_{n+k} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n} ,$$

jednakost (1) je zadovoljena, ali niz nije CAUCHYjev (zadatak 281).

284. Niz $\{x_n\}$ je CAUCHYjev niz ako i samo ako postoji nula niz $\{y_n\}$ tako da za skoro svako $n \in \mathbf{N}$ važi:

$$|x_{n+k} - x_n| \leq y_n \qquad \text{za svako } k \in \mathbf{N} . \tag{1}$$

Dokazati.

Rešenje. Pretpostavimo da (1) važi za neki nula niz $\{y_n\}$ i (bez smanjenja opštosti?) za svako $n \in \mathbf{N}$. Tada za dato $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da $y_n \leq \varepsilon$ za $n \geq n_0$; za $m, n > n_0$ imamo

$$|x_m - x_n| \leq y_{\min\{m,n\}} \leq \varepsilon ,$$

pa je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da nejednakost $|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$ važi za svako $n \geq n_0$ i za svako $k \in \mathbf{N}$, što implicira da je i $\sup_k |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$. Prema tome,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k |x_{n+k} - x_n| = 0.$$

Ako stavimo da je $y_n = \sup_k |x_{n+k} - x_n|$, tada je y_n nula niz i $|x_{n+k} - x_n| \leq y_n$ za svako n i k.

285. Dokazati da niz čiji je opšti član dat sa

$$x_n = \frac{\sin 1}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\sin n}{n(n+1)}$$

ima konačnu graničnu vrednost.

Rešenje. Pokazaćemo da je ispunjen uslov iz zadatka 284:

$$\begin{aligned}
|x_{n+k} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{\sin(n+2)}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{\sin(n+k)}{(n+k)(n+k+1)}\right| \\
&\le \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right| + \left|\frac{\sin(n+2)}{(n+2)(n+3)}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin(n+k)}{(n+k)(n+k+1)}\right| \\
&\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \\
&= \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{(n+k+1)-(n+k)}{(n+k)(n+k+1)} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Kako je $\lim 1/(n+1) = 0$, niz $\{x_n\}$ je CAUCHYjev niz, pa ima konačnu graničnu vrednost u skupu R.

286. Dokazati da je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz, gde je

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\,.$$

287. Kažemo da je $\{x_n\}$ **niz ograničene varijacije** ako postoji neka konstanta C tako da za svako $n = 2, 3, \ldots$ važi

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C\,.$$

Dokazati da je svaki niz ograničene varijacije konvergentan.

Rešenje. Neka je $\{x_n\}$ niz ograničene varijacije. Neka je

$$y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|\,.$$

Niz $\{y_n\}$ je monotono rastući, a po pretpostavci je i ograničen. Prema tome, niz y_n je konvergentan, pa je i CAUCHYjev.

Za svako $n = 2, 3, \ldots$ i $m > n$ imamo

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= y_m - y_n = |y_m - y_n| \,, \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo (zadatak 282) da je i niz $\{x_n\}$ CAUCHYjev, dakle konvergentan.

2.4.2 Kompletan skup

- *Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je* **kompletan skup** *ako granična vrednost svakog* CAUCHYjevog *niza $x_n \in A$ takođe pripada skupu A.*

√ *Intervali oblika $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $[a, b]$ su kompletni skupovi, kao i skup $\mathbf{R}$. Otvoreni intervali $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, (a, b) nisu kompletni. Skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ nije kompletan skup.*

288. Dokazati da je svaki interval $[a, b]$ $(a < b)$ kompletan skup. Isto to dokazati i za intervale $[a, +\infty)$ i $(-\infty, b]$.

Rešenje. Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan CAUCHYjev niz takav da svi njegovi članovi pripadaju intervalu $[a, b]$. Neka je $c = \lim x_n$. Iz osobine zatvorenih intervala u $\mathbf{R}$ (videti zadatak 187) sledi da i $c \in [a, b]$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo kompletnost intervala $[a, +\infty)$. Neka je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz čiji članovi pripadaju $[a, +\infty)$. Kako postoji konačna granična vrednost ovog niza, niz je ograničen, tj, postoji neki broj b takav da su svi članovi niza manji od b, što zajedno sa početnom pretpostavkom implicira da su svi članovi niza u intervalu $[a, b]$. Prema tome, i granična vrednost c pripada ovom intervalu, pa time i intervalu $[a, +\infty)$.

Dokaz kompletnosti intervala $(-\infty, b]$ je analogan prethodnom slučaju.

289. Dokazati da skup $\mathbf{Q}$ racionalnih brojeva nije kompletan.

Rešenje. Dovoljno je da nađemo jedan niz racionalnih brojeva koji je konvergentan (dakle CAUCHYjev), ali njegova granična vrednost nije racionalan broj. Takav je, na primer, niz racionalnih (decimalnih) aproksimacija za $\sqrt{2}$:

$$x_1 = 1 \,,\; x_2 = 1.4 = \frac{14}{10} \,,\; x_3 = 1.41 = \frac{141}{100} \,,\; x_4 = 1.414 = \frac{1414}{1000} \ldots$$

290. Da li je skup **N** kompletan?

Rešenje. Jedini CAUCHYjevi nizovi u **N** su nizovi čiji su skoro svi članovi jednaki fiksiranom prirodnom broju. Kako su ovi nizovi konvergentni, skup **N** jeste kompletan.

2.4.3 Banachov stav o nepokretnoj tački

√ *Neka je* $A \subset \mathbf{R}$ *dati* **kompletan** *skup i* $f(x)$ *funkcija definisana na* A*, tako da*

(i) $f(A) \subset A$,

(ii) $(\forall x, y \in A) \quad |f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ za neko q, $0 < q < 1$.

Tada jednačina

(1) $$x = f(x)$$

ima jedno i samo jedno rešenje na skupu A.

- *Funkcija koja ima osobine (i) i (ii) naziva se* **kontrakcija** *na skupu* A. *Rešenje jednačine (1) se naziva* **nepokretna (fiksna) tačka** *funkcije* f. *U ovim terminima* BANACHov *stav glasi: Kontrakcija na kompletnom skupu* A *ima na tom skupu jedinstvenu nepokretnu tačku.*

Naglasimo da q *u (ii) mora da bude manje od 1 da bi ovo tvrđenje važilo u opštem slučaju.*

Nepokretne tačke su zanimljive u matematici jer se rešavanje jednačina može svesti na nalaženje nepokretnih tačaka. Na primer, jednačina $g(x) = 0$ *može da se napiše u obliku* $x = g(x) + x$, *odakle se* x *dobija kao nepokretna tačka funkcije* $f(x) = g(x) + x$.

291. Ispitati da li je funkcija $f(x) = x^2$ kontrakcija na skupu $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Da li data funkcija ima na ovom skupu nepokretnu tačku?

Rešenje. Data funkcija nije kontrakcija na skupu $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, jer nijedan od dva uslova iz definicije kontrakcije nije ispunjen.

Uslov (i) nije ispunjen, jer je $f(A) = [\frac{1}{4}, \frac{9}{4}] \not\subset A$.

Kada bi uslov (ii) bio ispunjen, tada bi postojala konstanta q, $0 < q < 1$, tako da za svako $x, y \in A$ važi

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq q|x - y| ,$$

što je, za $x \neq y$, ekvivalentno sa $|x + y| \leq q < 1$. Međutim, za (na primer) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$ imamo da je $|x + y| = 2$.

Ipak, na skupu A postoji jedinstvena nepokretna tačka funkcije f. To je tačka $x = 1$.

Primedba. Ovaj primer pokazuje da su uslovi BANACHovog stava samo dovoljni, ali ne i potrebni za postojanje nepokretne tačke.

292. Neka za funkciju f na skupu A važi uslov (i) iz BANACHovog stava i neka, umesto uslova (ii), važi

$$(1) \qquad (\forall x, y \in A, x \neq y) \quad |f(x) - f(y)| < |x - y| \,.$$

Da li f mora da ima nepokretnu tačku na skupu A ?

Rešenje. Ne mora. Neka je, na primer, $f(x) = x + 1/x$ i neka je $A = [1, +\infty)$. Zbog $f(x) > x$ imamo da je $f([1, +\infty)) \subset [1, +\infty)$. Dalje, ako su x, y dva različita realna broja iz A, tada je

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \left(1 - \frac{1}{xy}\right) < |x - y| \,.$$

Funkcija f nema nepokretnu tačku na A, jer bi to značilo da jednačina $x + \frac{1}{x} = x$ ima rešenja.

293. Neka za funkciju f na skupu A važi uslov (ii) iz BANACHovog stava ili samo uslov (1) iz zadatka 292. Dokazati da ako f ima nepokretnu tačku na A, tada je ona jedinstvena.

Rešenje. Pretpostavimo da postoje dve različite nepokretne tačke $x, y \in A$, tj. da je $f(x) = x, f(y) = y$. Tada iz uslova (1) imamo da je

$$|x - y| = |f(x) - f(y)| < |x - y| \,,$$

što nije moguće.

2.4.4 Banachov kriterijum konvergencije nizova i metod iteracije

✓ *Neka je niz $\{x_n\}$ definisan sa*

$$(1) \qquad x_1 \in A \,;\; x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2 \ldots) \,,$$

gde je funkcija f kontrakcija na kompletnom skupu A. Tada niz $\{x_n\}$ ima konačnu graničnu vrednost koja pripada skupu A, i koja je jednaka (jedinstvenoj) nepokretnoj tački funkcije f na skupu A.

Ovo tvrđenje se primenjuje u dva različita konteksta: (i) Ako je dat niz kao u (1), a poznata nam je fiksna tačka c funkcije f na skupu A, tada na osnovu ovog tvrđenja zaključujemo da je $\lim x_n = c$. U tom slučaju kažemo da smo primenili BANACHov

kriterijum konvergencije. (ii) Ako je f funkcija čija je fiksna tačka nepoznata i treba da se odredi, tada možemo da definišemo niz kao u (1) i da dobijemo fiksnu tačku c iz $c = \lim x_n$. U ovom slučaju radi se o metodu iteracije za rešavanje jednačine $x = f(x)$.

294. Dokazati: Ako je A kompletan skup i ako niz $\{x_n\}$ ispunjava uslove:

(i) Za svako $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in A$,

(ii) Postoji $q \in (0,1)$ tako da za svako $n \in \mathbf{N}$, $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq q|x_{n+1} - x_n|$,

tada niz $\{x_n\}$ ima konačnu graničnu vrednost koja pripada skupu A.

Kakva je veza između ovog tvrđenja i BANACHovog kriterijuma konvergencije ?

Rešenje. Iz (ii) zaključujemo (indukcijom) da je

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^{n-1}|x_2 - x_1| \qquad \text{za svako } n \in \mathbf{N}.$$

Dalje je, za $k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
|x_{n+k} - x_n| &= |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq (q^{n+k-2} + q^{n+k-3} + \ldots q^{n-1})|x_2 - x_1| \\
&= q^{n-1}(1 + q + q^2 + \ldots q^{k-1})|x_2 - x_1| \\
&= q^{n-1}\frac{1-q^k}{1-q}|x_2 - x_1| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_2 - x_1| \quad (\text{za } q < 1).
\end{aligned}$$

Neka je

$$y_n = \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_2 - x_1| \, .$$

Ako je $q < 1$, tada $y_n \to 0$, i dokazali smo da

$$|x_{n+k} - x_n| \leq y_n \qquad \text{za svako } n, k \in \mathbf{N} \, .$$

Iz toga sledi (videti zadatak 284) da je niz $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz, pa ima konačnu graničnu vrednost. Kako je A kompletan skup, i kako $x_n \in A$ po uslovu (i), zaključujemo da granična vrednost pripada skupu A, čime je dokaz završen.

Pronađite u izloženom dokazu dva mesta na kojima je neophodno da bude $q < 1$ i objasnite zašto je to neophodno.

Ako važi uslov (1) u BANACHovom kriterijumu konvergencije na strani 106, gde je f kontrakcija, tada važe i uslovi (i) i (ii) ovog zadatka. Međutim, uslovi (i) i (ii) mogu da važe i ako f nije kontrakcija, a ponekad ih je i lakše proveriti. !

295. Ispitati da li niz definisan sa

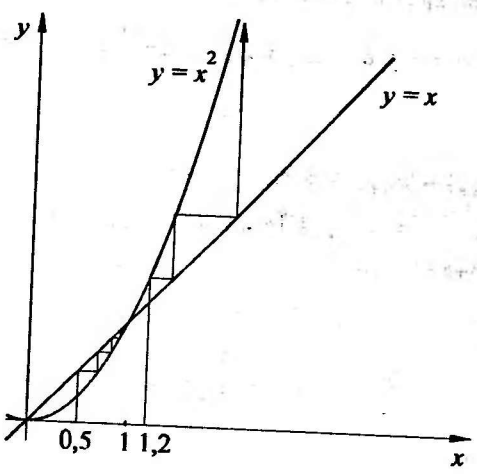
(1) $$x_{n+1} = x_n^2$$

konvergira, ako je a) $x_1 = 1.2$; b) $x_1 = 0.5$.

Rešenje. Pretpostavimo da je $x = \lim x_n$. Ako u (1) pustimo da $n \to \infty$ dobijamo $x = x^2$, odakle je $x = 0$ ili $x = 1$. Ali, **to još ne znači da je granična vrednost niza zaista jednaka nekoj od ove dve vrednosti.** Naime, potrebno je **dokazati** da granična vrednost postoji i da je konačna. Zaista, u slučaju a), lako je videti da niz divergira (videti sliku 10). U slučaju b), imamo da je

$$x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{8}, \ldots, x_n = \frac{1}{2^{2^{n-1}}} \ldots ,$$

pa je granična vrednost niza jednaka 0.



Slika 10. *Iteracioni niz za rešavanje jednačine $x = x^2$ konvergira za $x_1 = 0.5$, ali ne konvergira ako je $x_1 = 1.2$.*

U kontekstu BANACHovog kriterijuma, nije teško pokazati da $f(x) = x^2$ nije kontrakcija na $[1.2, +\infty)$. Ova funkcija takođe nije kontrakcija na $[0, \frac{1}{2}]$, ali jeste na intervalu $[0, \frac{1}{4}]$, a to je skup kome pripadaju skoro svi članovi niza pod b) počevši od drugog. Da bismo to dokazali, uočimo da za $x, y \in [0, \frac{1}{4}]$ važi

$$|f(x) - f(y)| = (x + y)|x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y| ,$$

pa se može uzeti da je $q = \frac{1}{2}$. Kako je, zbog monotonosti funkcije f na datom intervalu,

$$f\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{1}{16}\right] \subset \left[0, \frac{1}{4}\right] ,$$

funkcija f jeste kontrakcija na $[0, \frac{1}{4}]$.

296. Primenom BANACHovog kriterijuma konvergencije, dokazati da niz

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3} \quad n = 1, 2, \ldots$$

ima konačnu graničnu vrednost i odrediti je.[1]

Rešenje. Neka je

$$f(x) = \frac{4x + 2}{x + 3}$$

Kako je

$$|f(x) - f(y)| = 10\frac{|x - y|}{(x + 3)(y + 3)},$$

ova funkcija nije kontrakcija na $[0, +\infty)$, jer je minimalna vrednost za q na tom intervalu jednaka $10/(3 \cdot 3) > 1$. Međutim, ovo bi mogla da bude kontrakcija na $[1, +\infty)$, sa $q = 10/16$. Potrebno je samo još dokazati da se interval $[1, +\infty)$ preslikava u samog sebe, što će biti ispunjeno ako pokažemo da je $f(x) \geq 1$ za svako $x \geq 1$. Neka je, dakle, $x \geq 1$. Tada je

$$f(x) = \frac{4x + 12 - 10}{x + 3} = 4 - \frac{10}{x + 3} > 4 - \frac{10}{4} > 1,$$

čime je dokazano da je f kontrakcija na skupu $[1, +\infty)$. Kako početna vrednost $x_1 = 1$ pripada ovom skupu, niz ima graničnu vrednost $x = 2$ koja se dobija kao rešenje jednačine $x = f(x)$.

297. Niz $\{x_n\}$ dat je sa

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} \quad n = 1, 2, \ldots$$

a) Dokazati da niz $\{x_n\}$ konvergira. b) Odrediti $\lim x_n$.

Rešenje. Očigledno je $x_n > 0$ za svako n, odakle se dobija

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} < \frac{1}{1 + 0} = 1,$$

pa je $x_n < 1$ za $n \geq 2$.

Neka je $f(x) = 1/(1 + x)$. Ispitajmo da li je f kontrakcija na nekom skupu (koji bi trebalo da sadrži skoro sve elemente niza). Imamo da je

$$(1) \qquad |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + y}\right| = \frac{1}{(1 + x)(1 + y)}|x - y|.$$

[1] Videti i zadatak 247 za rešenje bez primene BANACHovog stava.

Kako je

$$\max_{x,y\in[0,1]} \frac{1}{(1+x)(1+y)} = 1,$$

pri čemu se ova maksimalna vrednost dostiže za $x = y = 0$, zaključujemo da skup na kome bi f mogla eventualno da bude kontrakcija, ne može da sadrži nulu. Ispitajmo stoga da li je moguće odrediti neko $\alpha > 0$ tako da je $x_n > \alpha$ za (skoro) sve članove niza x_n. Iz $x_n < 1$ dobija se da je

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

pa zaključujemo da je $x_n > 1/2$ za $n \geq 3$.

Prema tome, pokazali smo da svi članovi niza pripadaju skupu $[1/2, 1]$. Na ovom skupu, maksimalna vrednost izraza $1/(1+x)(1+y)$ se dostiže za $x = y = 1/2$ i iznosi $4/9$. Sada iz (1) sledi

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x-y| \qquad \text{za } x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Iz izloženog dokaza proizilazi da granična vrednost niza $\{x_n\}$ postoji i jednaka je onom rešenju jednačine $x = f(x)$ koje pripada skupu A, a to je $x = (\sqrt{5}-1)/2$.

Primedba. U rešenju nije pokazano da f preslikava A na A (što je sastavni deo definicije kontrakcije), već samo da svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju skupu A. Ovo je dovoljno, na osnovu zadatka 294.

298. Ispitati da li je konvergentan niz definisan sa

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + \sin x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Rešenje. Neka je

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{3}.$$

Kako za svako $x, y \in \mathbf{R}$ važi $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ (videti zadatak 104 na strani 37), imamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{1}{3}|(x-y) + (\sin x - \sin y)| \\ &\leq \frac{1}{3}|x-y| + \frac{1}{3}|\sin x - \sin y| \\ &\leq \frac{2}{3}|x-y|. \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija f je kontrakcija na $\mathbf{R}$, pa je niz x_n konvergentan prema BANACHovom stavu. Ako je njegova granična vrednost jednaka x, tada je $x = (x + \sin x)/3$, odnosno $\sin x = 2x$ i konačno, $x = 0$.

299. Ako je niz $\{x_n\}$ definisan pomoću

$$x_1 \in A, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

gde je f kontrakcija na kompletnom skupu A, za koju je x nepokretna tačka, tada za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

(1) $$|x_n - x| \leq q^{n-1}|x_1 - x|\,,$$

(2) $$|x_n - x| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_2 - x_1|\,,$$

(3) $$|x_n - x| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|,$$

gde je q konstanta koja se pojavljuje u definiciji kontrakcije. Dokazati.

Rešenje. Iz $x = f(x)$ i osobina kontrakcije imamo

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |f(x_{n-1}) - f(x)| \leq q|x_{n-1} - x| = q|f(x_{n-2}) - f(x)| \\ &\leq q^2|x_{n-2} - x| = \ldots \leq q^{n-1}|x_1 - x|\,. \end{aligned}$$

Ovim je dokazana nejednakost (1). Ako u nejednakosti

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_2 - x_1|,$$

koju smo dokazali u rešenju zadatka 294, pustimo da $k \to +\infty$, dobićemo nejednakost (2).

Da bismo dokazali nejednakost (3), uočimo da je

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+1}| &= |(x_n - x) - (x_{n+1} - x)| \geq |x_n - x| - |x_{n+1} - x| \\ &= |x_n - x| - |f(x_n) - f(x)| \geq |x_n - x| - q|x_n - x| \\ &= (1-q)|x_n - x|, \end{aligned}$$

odakle je

$$|x_n - x| \leq \frac{|x_n - x_{n+1}|}{1-q} = \frac{|f(x_{n-1}) - f(x_n)|}{1-q} \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|,$$

što je i trebalo dokazati.

Primedba. Iz zadatka 299 zaključujemo da je za početnu tačku potrebno uzeti vrednost koja je što bliža nepokretnoj tački, da bi se postigla željena tačnost (pri određivanju x) sa što manjim n. Ovo se vidi iz nejednakosti (1). Međutim, kako ne znamo veličinu razlike $|x_1 - x|$, nejednakost (2) je korisnija, jer omogućava da se odredi maksimalno n za koje će razlika $|x_n - x|$ biti manja od neke željene vrednosti. Naime, ako se metodom iteracije rešava jednačina $x = f(x)$, i ako x treba odrediti sa maksimalnom greškom ε, tada iz $(q^{n-1}/(1-q))|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ možemo odrediti

potreban broj iteracija n da bismo imali $|x_n - x| \leq \varepsilon$, pa se onda zaustavljamo na x_n i kažemo da je to rešenje jednačine sa zadatom tačnošću. Kod primene ovog metoda treba da poznajemo jednu vrednost (po mogućnosti što manju) za $q < 1$.

Ako ne možemo da odredimo q, u praksi se primenjuje sledeći metod zaustavljanja iteracije: Ako je $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, tada se pretpostavlja da je približno rešenje x_n nađeno sa greškom manjom od ε. Ovaj metod zaustavljanja iteracije je veoma rasprostranjen u primenama, mada se mogu konstruisati primeri u kojima ovakvo zaključivanje nije ispravno. Ako je $q \leq 1/2$, tada je $q/(1-q) \leq 1$, pa nejednakost (3) opravdava navedeni postupak. Naime, u ovom slučaju iz $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ sledi, na osnovu (3), da je i $|x_n - x| < \varepsilon$.

Nejednakost (3) i njen dokaz predložio je dr Arif Zolić.

300. Objasniti kako bi se metod iteracije primenio na rešavanje jednačine $\sin x - x + 1 = 0$. Zatim odrediti približno rešenje date jednačine sa greškom manjom od 10^{-3}.

Rešenje. Napišimo datu jednačinu u obliku $x = \sin x + 1$. Neka je $f(x) = \sin x + 1$. Tada f preslikava interval $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ u samog sebe (do ideje da se uzme baš ovaj interval može se doći ako se skicira grafik i približno odredi presek prave $y = x$ sa krivom $y = f(x)$). Dalje je, za $x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|\,,$$

jer je $|\sin((x-y)/2)| < |(x-y)/2|$, dok je u datom intervalu $|\cos((x+y)/2)| \leq \sqrt{2}/2$.

Prema tome, funkcija f je kontrakcija na I, sa $q = \sqrt{2}/2$.

Nepokretnu tačku ove funkcije, koja je rešenje date jednačine, možemo da nađemo kao graničnu vrednost niza

$$x_1 = a \in I\,, \qquad x_{n+1} = \sin x_n + 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ako uzmemo $x_1 = \pi/2$, dobijamo $x_2 = 2$. Iz nejednakosti

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{1 - \sqrt{2}/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} |2 - \pi/2|$$

vidimo da će greška biti manja od 10^{-3} ako važi

$$\frac{1}{1 - \sqrt{2}/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} |2 - \pi/2| < 10^{-3}$$

Sređivanjem i logaritmovanjem se dobija da je $n - 1 > 21.06$, tj. $n \geq 23$. Prema tome, x_{23} će se sigurno od tačnog rešenja date jednačine razlikovati za manje od 10^{-3}, kao i svi ostali članovi niza x_n za $n > 23$.

U stvari, tražena tačnost se postiže mnogo ranije. Prvih nekoliko članova niza su (zaokruženo na 4 decimale):

$$x_2 = 2,\ x_3 = 1.9093,\ x_4 = 1.9433, x_5 = 1.9314,$$
$$x_6 = 1.9357,\ \ldots,\ x_{10} = 1.9346,\ x_{11} = 1.9346, \ldots$$

301. Primenom metoda iteracije rešiti jednačinu $x^3 + x = 1000$.

Uputstvo. Napisati datu jednačinu u obliku $x = 1000 - x^3$.

302. Metodom iteracije rešiti jednačinu $x^3 - x - 1 = 0$

Uputstvo. Napisati jednačinu u obliku $x = \sqrt[3]{x+1}$.

303. Metodom iteracije rešiti jednačinu $x = 1 + (\operatorname{arctg} x)/2$.

Rešenje. Neka je $f(x) = 1 + (\operatorname{arctg} x)/2$. Skiciranjem grafika možemo se uveriti da prava $y = x$ seče krivu $y = f(x)$ za $x > 0$. Ispitaćemo da li je f kontrakcija na nekom skupu pozitivnih realnih brojeva. Imamo da je

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| .$$

Ako su x, y istog znaka, tada je (videti zadatak 122)

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} .$$

Iz nejednakosti (zadatak 103)

$$|\alpha| \le |\operatorname{tg} \alpha| \qquad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

dobijamo da je

$$\left|\operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}\right| \le \left|\frac{x-y}{1+xy}\right|$$

Prema tome, za $x, y > 0$

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}\frac{|x-y|}{1+xy} \le \frac{1}{2}|x-y| .$$

Kako je $f(x) > 0$ za $x \ge 0$, funkcija f je kontrakcija na $[0, +\infty)$. Ako uzmemo $x_1 = 1$, dobijamo niz

$$1, 1.393, 1.474, 1.487, 1.489, 1.490, 1.490, \ldots$$

►► 3.2.4, ►► 8.1

2.5 Granične vrednosti funkcija

2.5.1 Granična vrednost funkcije

Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D.

- *Kažemo da je $A \in \mathbf{R}$ granična vrednost funkcije f kad $x \to a$ i pišemo*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{ili} \quad f(x) \to A \text{ kad } x \to a \ .$$

ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ ,$$

- *Ekvivalentna definicija granične vrednosti: Realan broj A je granična vrednost funkcije f kad $x \to a$ ako za svaku ε-okolinu $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ tačke A postoji δ-okolina tačke a tako da*

$$f\big((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}\big) \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \ .$$

- *Neka je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in D$ sa leve strane tačke a (tj. $x < a$). Ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ ,$$

tada kažemo da je A **leva granična vrednost** *funkcije f kad $x \to a$, i pišemo*

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = A \ .$$

Na analogan način se definiše **desna granična vrednost**; *u tom slučaju pišemo*

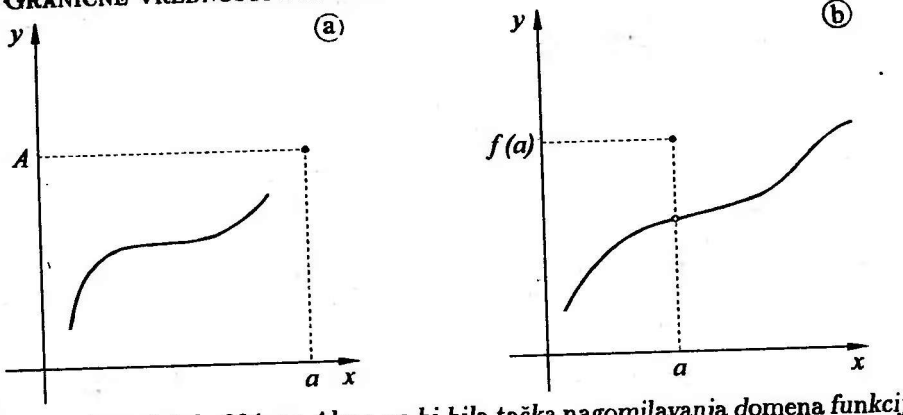
$$\lim_{x \to a_+} f(x) = A \ .$$

√ *Funkcija ima graničnu vrednost A kad $x \to a$ ako i samo ako leva i desna granična vrednost kad $x \to a$ postoje i jednake su A.*

√ *Funkcija f ima graničnu vrednost A kad $x \to a$ ako i samo ako je $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A$ za svaki niz $\{x_n\}$ takav da je $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$.*

304. Objasniti zašto se u definiciji granične vrednosti funkcije f kad $x \to a$ zahteva da a bude tačka nagomilavanja domena funkcije f. Takođe objasniti zašto se traži da $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, tj. zašto se izuzima tačka $x = a$.

Rešenje. Definicija granične vrednosti funkcije je matematička formulacija intuitivne predstave o graničnoj vrednosti. U skladu sa tom intuitivnom predstavom, ako se posmatrač kreće po grafiku funkcije i ako se njegova x-koordinata neograničeno približava tački a, tada y-koordinata treba da se neograničeno pri-



Slika 11. *Uz zadatak 304.* a: *Ako a ne bi bila tačka nagomilavanja domena funkcije f, tada bismo imali* $\lim_{x\to a} f(x) = A$. b: *Ako se tačka a ne bi izuzela, tada granična vrednost funkcije f kad* $x \to a$ *ne bi postojala.*

bližava nekoj vrednosti A. Drugim rečima, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ako se posmatrač koji se kreće po grafiku funkcije može neograničeno približiti tački sa koordinatama (a, A). Ako bi se izostavio uslov da a bude tačka nagomilavanja domena D, tada bi, prema definiciji granične vrednosti, svaka funkcija definisana u nekoj izolovanoj tački $a \in D$ imala u toj tački graničnu vrednost $A = f(a)$. (videti sliku 11a.) Međutim, posmatrač ne može da priđe tački (a, A) krećući se po grafiku funkcije f. Ako bismo zahtevali da $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, bez izuzimanja same tačke a, tada funkcije oblika kao na slici 11b ne bi imale graničnu vrednost, mada posmatrač može da se neograničeno približi tački (a, A).

Primedba. Kako je $|a - a| < \delta$ za svako $\delta > 0$, iz

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,,$$

zaključujemo da je $|f(a) - A| < \varepsilon$ za svako $\varepsilon > 0$, a to je moguće ako i samo ako je $f(a) = A$. Prema tome, ako je $f(a) = A$, tačka a se ne mora izuzeti.

305. Neka je $f(x) = x$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 1$. Naći $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Rešenje. Neka je M pokretna tačka koja se kreće po grafiku date funkcije. Ako se x-koordinata tačke M približava nuli, tada se tačka M približava koordinatnom početku. Pokažimo da je granična vrednost date funkcije zaista jednaka nuli kad $x \to 0$. Naime, kako je $f(x) = x$ za $x \neq 0$, imamo $0 < |x - 0| < \varepsilon \iff |f(x) - 0| < \varepsilon$, pa je uslov iz definicije zadovoljen sa $\delta = \varepsilon$.

306. Neka je (videti zadatak 52)

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Da li postoji $\lim_{x \to 0} H(x)$?

Rezultat. Ne postoji, jer je $\lim_{x \to 0_-} H(x) = 0$; $\lim_{x \to 0_+} H(x) = 1$.

307. Da li postoji $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$?

Rešenje. U svakoj okolini tačke 0 postoji beskonačno mnogo brojeva oblika $x_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$ $(n \in \mathbf{N})$. Neka je $f(x) = \sin 1/x$. Tada je $f(x_n) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n-1}$. Prema tome, u svakoj okolini nule postoje tačke x za koje je $f(x) = 1$, kao i tačke x za koje je $f(x) = -1$. Ako bi postojala granična vrednost A, tada bi se u svakoj okolini broja A nalazili brojevi 1 i -1, što nije moguće. Dakle, granična vrednost ne postoji.

2.5.2 Neprekidna funkcija

Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je $a \in D$ tačka nagomilavanja skupa D.

- *Kažemo da je f neprekidna funkcija u tački a ako je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ekvivalentno, f je neprekidna u tački a ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

- *Funkcija f je* **neprekidna sleva** *u tački a ako je*

$$f(a_-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to a_-} f(x) = f(a).$$

Analogno, f je **neprekidna zdesna** *u tački a ako je*

$$f(a_+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to a_+} f(x) = f(a).$$

√ *Funkcija je neprekidna u tački a ako i samo ako je u toj tački neprekidna sleva i zdesna.*

- *Kažemo da je funkcija f* **neprekidna na skupu** *$S \subset D$ ako je f neprekidna u svakoj tački $a \in S$. Ako je skup S zatvoreni interval $[\alpha, \beta]$, tada je u tačkama α i β dovoljno da funkcija bude neprekidna zdesna, odnosno sleva.*

√ *Sve osnovne elementarne funkcije (videti 1.4.3 na strani 53) su neprekidne u svakoj tački u kojoj su definisane.*

√ *Ako je f neprekidna funkcija u tački a, i ako je $\lim x_n = a$, gde je $\{x_n\}$ niz tačaka iz D, tada je $\lim f(x_n) = f(a)$. Ova činjenica se koristi pri traženju graničnih vrednosti nizova. Na primer, za svaki konvergentan pozitivan niz $\{x_n\}$ važi $\lim \log x_n = \log \lim x_n$, $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim x_n}$ i sl.* !

√ *Isto važi i za granične vrednosti funkcija: Ako je f neprekidna u tački A i ako je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, tada je*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = f(A)\ .$$

308. Dokažati da je funkcija $f(x) = x^2$ neprekidna u svakoj tački $a \in \mathbf{R}$.

Rešenje. Neka je $a \in \mathbf{R}$ i neka je $|x - a| < \delta$. Tada je

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \delta|x + a|$$

Ako uzmemo $\delta < |a|$, tada je $|x + a| = |x - a + 2a| \le |x - a| + 2|a| < 3|a|$, pa važi implikacija

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < 3|a|\delta\ .$$

Iz jednakosti $3|a|\delta = \varepsilon$ nalazimo $\delta = \varepsilon/(3|a|)$, što zajedno sa uslovom $\delta < |a|$ daje $\delta = \min\{|a|, \varepsilon/(3|a|)\}$.

Prema tome, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \min\{|a|, \varepsilon/(3|a|)\}$ tako da za svako x u δ-okolini tačke a važi da je $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Ovim je dokazano da je data funkcija neprekidna u tački a.

309. Dokazati da je funkcija $f(x) = \sin x$ neprekidna u svakoj tački $a \in \mathbf{R}$.

Rešenje. Iz nejednakosti $|\sin x - \sin a| \le |x - a|$, koju smo dokazali u zadatku 104, imamo da za svako x za koje je $|x - a| < \varepsilon$ važi i $|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| < \varepsilon$, pa je data funkcija neprekidna u svakoj tački $a \in \mathbf{R}$ (sa $\delta = \varepsilon$).

310. Dokazati da je funkcija $f(x) = 1/x$ neprekidna u svakoj tački $a \neq 0$.

Rešenje. Neka je $a > 0$. Tada postoji neki interval oko tačke a koji ne sadrži nulu, na primer $I = (a/2, 2a)$. Za svako x u intervalu I važi

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x - a|}{xa} < \frac{|x - a|}{a^2/2}\ .$$

Za dato $\varepsilon > 0$ neka je $\delta = a^2\varepsilon/2$. Tada iz gornje nejednakosti dobijamo da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ za svako $x \in I$ za koje je $|x - a| < \delta$. Ovo je dovoljno da se ♣

zaključi da je $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Naime, uvek se može odrediti δ' koje je manje od nađenog δ i takvo da sve tačke x za koje je $|x-a| < \delta'$ pripadaju intervalu I.

Primedba. Iz rešenja prethodnog zadatka proizilazi da je dovoljno da uslov $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$ bude zadovoljen samo za tačke x u nekoj okolini tačke a, a ne mora se proveravati za svako x iz domena funkcije f, kao što se zahteva u definiciji granične vrednosti.

2.5.3 Beskonačne granične vrednosti

Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D.

- *Ako važi*

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K \ ,$$

tada kažemo da funkcija f ima beskonačnu graničnu vrednost kad $x \to a$ (ili da konvergira ka beskonačnosti, ili da teži beskonačnosti) i pišemo

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ .$$

Slično se definiše beskonačna leva i desna granična vrednost.

- *Ako skup D nije ograničen odozgo (u ovom slučaju kažemo da je $+\infty$ tačka nagomilavanja skupa D) i ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D) \quad x > B \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ ,$$

tada kažemo da je $\lim_{x\to+\infty} = A$.

- *Ako skup D nije ograničen odozgo i ako važi*

$$(\forall K > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D) \quad x > B \Rightarrow f(x) > K \ ,$$

tada kažemo da je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Na analogan način definišu se slučajevi kada je $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to-\infty} = \pm\infty$.

311. Da li postoji $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$? Da li postoje leva i desna granična vrednost ?

Rešenje. Ako je $0 < x-1 < 1/K$, tada je $1/(x-1) > K$. Prema tome, za svako dato $K > 0$ postoji $\delta = 1/K$ tako da za svako x sa desne strane tačke 1 važi $0 < x-1 < \delta \Rightarrow 1/(x-1) > K$. Stoga je desna granična vrednost jednaka $+\infty$. Leva granična vrednost je $-\infty$, jer $0 < 1-x < \delta \Rightarrow 1/(x-1) < -K$, gde je δ isto kao u prvom slučaju. Granična vrednost (obostrana) ne postoji, jer su leva i desna granična vrednost različite.

312. Dokazati da je

$$\lim_{x\to+\infty} q^x = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} q^x = 0 \qquad (q>1)\,.$$

Rešenje. Za $q>1$, funkcija $x \mapsto q^x$ je monotono rastuća, pa važi ekvivalencija

$$q^x > K \iff x > \log_q K\,.$$

Prema tome, za svako dato $K>0$ postoji $B=\log_q K$ tako da za svako $x>B$ imamo $q^x>K$, što po definiciji znači da je $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = +\infty$.

Da bismo dokazali drugu jednakost, stavimo da je $y=-x$. (U većini zadataka u kojima se traži granična vrednost kad $x\to-\infty$, korisno je uvesti smenu $y=-x$ i tražiti graničnu vrednost kad $y\to+\infty$. Time se smanjuje mogućnost eventualne greške zbog zaboravljanja da je $x<0$.)

Za $q>1$, funkcija $y\mapsto q^{-y}$ je monotono opadajuća i važe ekvivalencije

$$0<q^{-y}<\varepsilon \iff -y\log q<\log\varepsilon \iff y>-\frac{\log\varepsilon}{\log q}=\log_q(1/\varepsilon)\,.$$

Odavde zaključujemo da za svako dato $\varepsilon>0$ postoji $K=\log_q(1/\varepsilon)$ tako da je $q^{-y}<\varepsilon$ za $y>K$. Stoga je

$$\lim_{x\to-\infty} q^{-x} = \lim_{y\to+\infty} q^y = 0\,.$$

Primetimo da je $K>0$ samo za $\varepsilon<1$. Ali, to je dovoljno, jer, kao i kod nizova, ovde je važno da definiciona jednakost važi za **malo** ε (videti primedbu u zadatku 171).

313. Ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, dokazati da je tada granična vrednost niza $f(n)$ jednaka A. Pokazati na primeru da obrnuto tvrđenje ne mora da važi.

Uputstvo. Kao primer da obrnuto tvrđenje ne važi može da posluži funkcija $f(x)=\sin\pi x$.

314. Ako je f monotona funkcija na $[b,+\infty)$ i ako je $\lim f(n)=A$, dokazati da je tada i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

Rešenje. Ako je f monotono neopadajuća funkcija, tada iz $n\le x\le n+1$ sledi $f(n)\le f(x)\le f(n+1)$. Ako je $\lim f(n)=A\in\mathbf{R}$, tada za svako ε postoji n_0 tako da su $f(n)$ i $f(n+1)$ u ε-okolini tačke a za svako $n>n_0$.

Neka je $x>n_0+1$. Tada postoje prirodni brojevi n i $n+1$ koji su takođe veći od n_0 i za koje važi $n\le x\le n+1$. Na osnovu izloženog, imaćemo da je

$$A-\varepsilon<f(n)\le f(x)\le f(n+1)<A\,,$$

što znači da se i $f(x)$ nalazi u ε-okolini tačke A.
Dokaz je sličan ako je f monotono nerastuća funkcija ili ako je $A = \pm\infty$.

315. Neka je $b > 1$. Dokazati da je

$$\lim_{x\to+\infty} \log_b x = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 0_+} \log_b x = -\infty\,.$$

316. Dokazati da je

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Rešenje. Kako je funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ monotono rastuća i ograničena odozgo sa $\pi/2$, iz nejednakosti $x > \operatorname{tg}(\pi/2 - \varepsilon)$ sleduje da je $0 < \pi/2 - \operatorname{arctg} x < \varepsilon$.
Pomoću smene $x = -y$, druga jednakost se svodi na prvu.

317. Dokazati da je

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = \begin{cases} +\infty\,, & k > 0 \\ 1\,, & k = 0 \\ 0\,, & k < 0\,. \end{cases}$$

318. Dokazati: Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, tada je $\lim_{x\to a} \big(f(x)\big)^k = +\infty$, gde je $a \in \mathbf{R}'$ i k proizvoljan pozitivan broj.

Uputstvo. Iskoristiti ekvivalenciju $\big(f(x)\big)^k > K \iff f(x) > K^{1/k}$.

319. Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ i ako je $f(x) > 0$ (< 0) u nekoj okolini tačke a, dokazati da je

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad (-\infty)\,.$$

Formulisati i dokazati analogan rezultat za slučaj $a = \pm\infty$, kao i za slučaj levih i desnih graničnih vrednosti.

320. Ispitivanjem znaka funkcije u imeniocu i primenom zadatka 319, odrediti leve i desne granične vrednosti u slučajevima

a) $\dfrac{1}{x}$ $(x \to 0)$, b) $\dfrac{1}{(x-3)^2}$ $(x \to 3)$, c) $\dfrac{1}{\sin x}$ $(x \to 0)$,

d) $\log_x e$ $(x \to 1)$.

321. Dokazati da je, za $a > 1$ i za $k \neq 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty .$$

Rešenje. Ako je $k < 0$, tada iz $a^x \to +\infty$ i $1/x^k \to +\infty$ zaključujemo da i proizvod ima beskonačnu graničnu vrednost.

Neka je $k > 0$. U zadatku 215 dokazali smo da je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty .$$

Odavde je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{(n+1)^k} = \frac{1}{a} \lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = +\infty .$$

Prema tome, za svako $K > 0$ postoji prirodan broj n_0 tako da za $n > n_0$ važi

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} > K .$$

Neka je $x > n_0 + 1$ i neka je $n = [x]$. Tada je $n > n_0$ i $n \leq x < n + 1$, tako da imamo

$$\frac{a^x}{x^k} > \frac{a^n}{(n+1)^k} > K ,$$

čime je traženo tvrđenje dokazano.

322. Dokazati da je, za $b > 1$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x} = 0$.

2.5.4 Osobine graničnih vrednosti

✓ *Funkcija f ima graničnu vrednost A kad $x \to a$ ako i samo ako je* $\lim f(x_n) = A$ *za svaki niz $x_n \in D$ za koji je* $\lim x_n = a$.

- **Limes inferior** *funkcije f kad $x \to a$ definišemo kao najmanju graničnu vrednost niza $\{f(x_n)\}$ po svim nizovima $\{x_n\}$ koji konvergiraju ka a. Analogno,* **limes superior** *funkcije f kad $x \to a$ definiše se kao najveća granična vrednost niza $\{f(x_n)\}$ za $x_n \to a$. Za ove granične vrednosti koristimo oznake*

$$\liminf_{x \to a} f(x) \quad \text{ili} \quad \underline{\lim_{x \to a}} f(x), \quad \text{odnosno} \quad \limsup_{x \to a} f(x) \quad \text{ili} \quad \overline{\lim_{x \to a}} f(x).$$

✓ *Funkcija f ima graničnu vrednost A kad $x \to a$ ako i samo ako je*

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \limsup_{x \to a} f(x) = A .$$

✓ *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$, *i ako je* $A > p$ $(A < p)$, *tada za svako* x *u nekoj okolini tačke* a *važi* $f(x) > p$ $(< p)$.

✓ *Ako funkcija* f *ima konačnu graničnu vrednost kad* $x \to a$, *tada je funkcija* f *ograničena u nekoj okolini tačke* a.

✓ *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *i* $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $(A, B \in \mathbf{R})$, *tada je*

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B, \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB, \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0,\ g(x) \neq 0).$$

✓ *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *tada je*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \operatorname{sgn} A \cdot \infty, \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Sve navedene jednakosti važe ako je a *realan broj ili ako je* $a = \pm\infty$, *pri čemu se pod okolinom tačke* $+\infty$ *podrazumeva interval* $(B; +\infty)$ *za neko* $B \in \mathbf{R}$. *Slično, okolina tačke* $-\infty$ *je interval* $(-\infty, B)$.

I kod funkcija imamo slučajeve **neodređenih graničnih vrednosti** *tipa* $\infty - \infty$, ∞/∞, $0/0$, *itd. (videti 2.1.2 na strani 66.) Ovi slučajevi se rešavaju sličnim postupcima kao kod nizova. Više o nalaženju graničnih vrednosti u ovim slučajevima biće izloženo u 3.2.5 i u 3.4.4.*

323. Konstruisati funkciju koja je definisana u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$, ali nema graničnu vrednost ni u jednoj tački.

Rešenje. Na primer, funkcija definisana sa $f(x) = 1$ za $x \in \mathbf{Q}$ i $f(x) = 0$ za $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ nema graničnu vrednost ni u jednoj tački.

Zaista, ako je $a \in \mathbf{Q}$, tada je $x_n = a + 1/n$ niz racionalnih brojeva koji konvergira ka a, dok je $y_n = a + \sqrt{2}/n$ niz iracionalnih brojeva koji konvergira ka a. Ako bi postojala granična vrednost $\lim_{x\to a} f(x) = c$, tada bismo imali da je $\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = c$, što je nemoguće, jer je $f(x_n) = 1$, dok je $f(y_n) = 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

Neka je sada a proizvoljan iracionalan broj. Neka je x_n niz decimalnih aproksimacija broja a (videti zadatak 238), i neka je $y_n = a + \frac{1}{n}$. Nizovi x_n i y_n konvergiraju ka a; članovi prvog niza su racionalni, dok su članovi drugog niza iracionalni. Dalje nastavljamo na isti način kao u prvom slučaju.

324. **Cauchyjev kriterijum konvergencije funkcija.** Dokazati da funkcija f ima konačnu graničnu vrednost kad $x \to a$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D) \quad |x - a| < \delta \wedge |y - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Uputstvo. Da je traženi uslov dovoljan može se pokazati primenom CAUCHYjevog kriterijuma konvergencije na proizvoljan niz $f(x_n)$, gde $x_n \to a$. Da je uslov potreban zaključuje se neposredno, primenom nejednakosti trougla.

325. Neka je $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$, $a_k \neq 0$, $a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \ldots, k$,, $k \in \mathbf{N}$. Ispitati da li postoje i u potvrdnom slučaju odrediti $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)$.

Rešenje. Dati polinom može se napisati u obliku

$$P_n(x) = x^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_0 \frac{1}{x^k} \right) .$$

Kad $x \to +\infty$, tada svi članovi u zagradi teže nuli sem prvog, dok $x^k \to +\infty$. Stoga je u ovom slučaju granična vrednost jednaka $\operatorname{sgn}(a_k) \cdot \infty$.

Ako $x \to -\infty$, i ako je k paran broj, dobija se isti rezultat kao i u prethodnom slučaju. Ako je k neparan broj, granična vrednost je jednaka $-\operatorname{sgn}(a_k) \cdot \infty$.

326. Neka je

$$R(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_0} ,$$

gde su a_i, b_j proizvoljni realni brojevi, $a_m \neq 0, b_k \neq 0$. Dokazati da je

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_m/b_k) \cdot \infty , & \text{ako } m > k \\ a_m/b_k , & \text{ako } m = k \\ 0 , & \text{ako } m < k . \end{cases}$$

Uputstvo. U slučaju $m \geq k$ podeliti brojilac i imenilac sa x^m; u suprotnom slučaju podeliti sa x^k.

Primedba. Kod graničnih vrednosti oblika $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, gde je $f(x)$ racionalna funkcija argumenta x ili argumenta $x^{1/r}$, gde je r prirodan broj, primenjuje se ista tehnika kao kod rešavanja graničnih vrednosti nizova istog oblika. Videti zadatke 194 – 206.

327. Neka je $R(x)$ racionalna funkcija kao u zadatku 326. Ako je r prirodan broj, dokazati da je

$$\lim_{x\to+\infty} R(x^{1/r}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^{m/r}}{b_k x^{k/r}} .$$

Primedba. Iz ovog rezultata sleduje da je, pri traženju graničnih vrednosti navedenog tipa, potrebno poznavati samo vodeće članove u brojiocu i imeniocu (tj. članove sa najvećim stepenom), dok ostali uopšte ne utiču na graničnu vrednost.

328. Naći $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

Uputstvo. Vodeći član u brojiocu je x^5, a u imeniocu $(5x)^5$, pa je granična vrednost jednaka $1/5^5$.

329. Naći $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-3)^{39}(3x+2)^{92}}{(2x+5)^{131}}$. [$(3/2)^{92}$]

330. Naći $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{(n+1)/2}}$. [$n^{-n(n+1)/2}$]

331. Naći $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$. [1]

332. Naći $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[4]{4x}}{\sqrt{3x+1}}$. [$\sqrt{2/3}$]

333. Naći $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

Rešenje. Izraz pod znakom granične vrednosti je tipa $\infty-\infty$. Granične vrednosti ovog tipa se često rešavaju svođenjem na tip ∞/∞, a zatim deljenjem brojioca i imenioca sa vodećim članom. U ovom slučaju imamo

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x &= \left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}\\ &= \frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}\cdot\frac{1/x}{1/x}\\ &= \frac{(a+b)+(ab)/x}{\sqrt{1+(a+b)/x+ab/x^2}+1} \to \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

334. Naći $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$. [1/2]

335. Naći $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$. [2]

336. Odrediti konstante a, b, c i d iz uslova

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right) = 0 , \tag{1}$$

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} - cx - d\right) = 0 . \tag{2}$$

Rešenje. "Racionališimo" izraz koji se pojavljuje u (1):

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+1} - ax + b &= \left(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right)\cdot \frac{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b} \\ &= \frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b} \\ &= \frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a\right)+b} \qquad (3)\end{aligned}$$

Ako je koeficijent uz x^2 u brojiocu izraza u (3) različit od nule, granična vrednost će biti beskonačna. Prema tome, taj koeficijent mora da bude jednak nuli, odakle je $a^2 = 1$. Za $a = -1$, imamo da je

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} + x - b\right) = +\infty$$

za svako b, pa ova mogućnost ne dolazi u obzir.

Ako je $a = 1$, tada se dobija

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(1+2b)x+1-b^2}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)+b} = -\frac{1+2b}{2} ,$$

odakle sleduje da je $1 + 2b = 0$, tj. $b = -1/2$.

U drugom slučaju možemo da uvedemo smenu $x = -t$, $t \to +\infty$, i da tražimo c i d iz uslova

$$L_2 = \lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{t^2+t+1} + ct - d\right) = 0 .$$

Primenom sličnog postupka kao u (1), nalazimo da je $c = -1$, $d = 1/2$.

Primedba. Preporučujemo čitaocu da uradi drugi deo ovog zadatka najpre direktno, a zatim primenom smene $x = -t$, kako bi stekao uvid u probleme koji se mogu pojaviti.

337. Neka je, u nekoj okolini tačke a, za $x \neq a$, $f(x) = g(x)$, gde je $g(x)$ definisana i neprekidna funkcija u tački a. Dokazati da je

$$\lim_{x\to a} f(x) = g(a) .$$

Rešenje. Kako je $f(x) = g(x)$ u nekoj okolini tačke a, sem u tački a, tada je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$; kako je g neprekidna u a, poslednja granična vrednost je jednaka $g(a)$.

Primedba. Ovaj jednostavan rezultat se koristi za rešavanje nekih neodređenih tipova graničnih vrednosti. Na primer, ako treba naći $\lim_{x\to 1}(x-1)/(x^2-1)$, tada je, za $x \neq 1$, funkcija pod znakom granične vrednosti jednaka neprekidnoj funkciji $g(x) = 1/(x+1)$, odakle je granična vrednost jednaka $g(1) = 1/2$.

Kao što smo već napomenuli u zadatku 304, pri određivanju granične vrednosti funkcije $f(x)$ kad $x \to a$, ne zanima nas vrednost funkcije u tački a, već u okolini tačke a. Stoga funkcija i ne mora da bude definisana u tački a.

338. Naći $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Rešenje. Dati izraz je tipa $0/0$. Kako su brojilac i imenilac polinomi, i kako se oba anuliraju u jedinici, oni imaju faktore oblika $(x-1)^k$. Po izdvajanju tih faktora, granična vrednost se može lako naći. Ovo je ideja koja može da se primeni u svim sličnim slučajevima.

U datom primeru, imamo da je $x^2-1 = (x-1)(x+1)$; $2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$. Prema tome,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

339. Naći $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

Rešenje. Brojilac u razvijenom obliku glasi $6x + 11x^2 + 6x^3$; deljenjem sa x nalazimo da je granična vrednost jednaka 6.

340. Ako su $m, n \in \mathbf{N}$, naći $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$.

Uputstvo. Razvojem oba člana u brojiocu po binomnoj formuli i sređivanjem, dobija se da je granična vrednost jednaka $mn(n-m)/2$.

341. Naći $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$. [$(3/2)^{10}$]

342. Naći $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in \mathbf{N})$.

Uputstvo. Iskoristiti razvoj $x^k - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^{k-1})$, za $k = m, n$.

343. Naći $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Rešenje. Neka je $f(x)$ funkcija pod znakom granične vrednosti. Za $x\neq 4$ imamo

$$f(x)=f(x)\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2x-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$
$$=\frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}.$$

Odavde je $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=4/3$.

344. Za $a>0$ naći $\lim\limits_{x\to a_+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$. $[\,1/\sqrt{2a}\,]$

345. Neka je $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$ i neka je $f(b)=A$, gde je $t\mapsto f(t)$ neprekidna funkcija u $t=b$. Dokazati da je tada $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

Rešenje. Dajemo dokaz za slučaj kada su A i b konačni:
Kako je $\lim\limits_{t\to b}f(t)=A$, tada za dato $\varepsilon>0$ postoji $\delta'>0$ tako da

$$(1)\qquad |t-b|<\delta'\Rightarrow|f(t)-A|<\varepsilon.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, tada za nađeno δ' postoji δ tako da

$$(2)\qquad 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|g(x)-b|<\delta'.$$

Stavljajući u (1) $t=g(x)$, iz (1) i (2) dobijamo da za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ tako da

$$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|g(x)-b|<\delta'\Rightarrow|f(g(x))-A|<\varepsilon,$$

što znači da je $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.
U slučajevima kada su A ili b beskonačni, dokaz je sličan.

Primedba. Gde se u dokazu koristi neprekidnost funkcije f u tački b?

346. Neka je

$$(1)\qquad \lim_{x\to x_0}g(x)=b$$

i neka je $g(x)\neq b$ za $x\neq x_0$ u nekoj okolini tačke x_0. Ako je

$$(2)\qquad \lim_{t\to b}f(t)=A,$$

dokazati da je

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{t\to b} f(t) = A\,.$$

Rešenje. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksirano. Na osnovu (2), postoji $\delta_1 > 0$ tako da važi implikacija

$$0 < |t-b| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - A| < \varepsilon\,.$$

Iz (1) zaključujemo da postoji $\delta_2 > 0$ tako da

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \delta_1.$$

Po pretpostavci, postoji neko $\delta_3 > 0$ tako da

$$0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - b| > 0.$$

Ako uzmemo $\delta = \min(\delta_2, \delta_3)$, imamo niz implikacija

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |g(x) - b| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - b| < \varepsilon\,,$$

odakle zaključujemo da je A granična vrednost funkcije $x \mapsto f(g(x))$ kad $x \to a$, što je i trebalo dokazati.

Primedba. Na osnovu ovog rezultata, može se uvoditi smena promenljive kod nalaženja graničnih vrednosti. Primetimo da se ovde ne zahteva neprekidnost ni jedne od funkcija f i g.

347. Ako je $n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$, odrediti $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/n} - 1}{x}$.

♣ **Rešenje.** Pretpostavimo najpre da je $n > 0$. Uvođenjem smene $(1+x)^{1/n} = t$, $t \to 1$ kad $x \to 0$, imamo na osnovu zadatka 346,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/n} - 1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t^n - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t-1)(1+t+\cdots+t^{n-1})} = \frac{1}{n}\,.$$

Ako je $n < 0$, $n = -m$, tada se na isti način kao u prvom slučaju, uvođenjem smene $(1+x)^{1/m} = t$ dobija rezultat $-1/m$, tj. $1/n$ kao i za $n > 0$.

348. Neka je $P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Odrediti $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x}$ $(m \in \mathbf{N})$.

Rešenje. Neka je $\alpha(x) = \sqrt[m]{1+P(x)}$. Tada je $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 1$, pa je dati izraz tipa $0/0$. Primenom transformacije

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} &= \frac{\alpha(x) - 1}{x} = \frac{\alpha^m(x) - 1}{x(1+\alpha(x)+\alpha^2(x)+\cdots+\alpha^{m-1}(x))} \\ &= \frac{P(x)}{x(1+\alpha(x)+\alpha^2(x)+\cdots+\alpha^{m-1}(x))} \\ &= \frac{a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}}{1+\alpha(x)+\alpha^2(x)+\cdots+\alpha^{m-1}(x)}\,,\end{aligned}$$

nalazimo da je tražena granična vrednost jednaka a_1/m.

349. Dokazati da je $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ $(a \neq 0)$.

Rešenje. Smenom $x = 1/t$ imamo da je $\lim_{x\to 0_+} a^x = \lim_{t\to+\infty} a^{1/t}$. Kako je funkcija $t \mapsto a^{1/t}$ monotona za $t > 0$, imamo da se (videti zadatak 314) njena granična vrednost može dobiti po nizu prirodnih brojeva, tj.

$$\lim_{t\to+\infty} a^{1/t} = \lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1\,,$$

pri čemu smo poslednju graničnu vrednost našli u zadatku 223.
Odavde je $\lim_{x\to 0_+} a^x = 1$. Kako ovaj rezultat važi za svako $a \neq 0$, imamo da je

$$\lim_{x\to 0_-} a^x = \lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 1\,,$$

čime je traženo tvrđenje dokazano.

350. Dokazati da je $\lim_{x\to 0_+} x^a \log_b x = 0$ za $a > 0$ i $b > 1$.

Uputstvo. $x^a \log_b x = -\frac{1}{a} \cdot \frac{\log_b t}{t}$, gde je $t = x^{-a}$. Zatim primeniti zadatak 322.

351. Dokazati: Ako je, za svako x u nekoj okolini tačke a, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, pri čemu je

$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = L,$$

tada je i $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Primedba. Ovaj rezultat je analogan "teoremi o dva žandara" kod nizova.

352. Dokazati da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Rešenje. Polazimo od nejednakosti

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x| \qquad (0 < |x| < \frac{\pi}{2}),$$

koju smo dokazali u zadatku 103 na strani 36. Deljenjem sa $|\sin x|$ dobijamo

$$1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|}\,,$$

ili, uzimanjem recipročnih vrednosti,

$$|\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1. \tag{1}$$

Kako leva i desna strana u (1) konvergiraju ka 1 kada $x \to 0$, $\sin x/x$ takođe ima graničnu vrednost 1, što je i trebalo dokazati.

353. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x}$.

Rešenje. Za $a = 0$, granična vrednost je nula. Ako $a \neq 0$, imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = a \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = a \qquad (t = ax)\,.$$

354. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a, b \neq 0)$

Rešenje. Za $x \neq 0$ važi

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx}\,.$$

Dalje je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,, \quad (t = ax)$$

i na isti način, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx}{\sin bx} = 1$. Tražena granična vrednost je a/b.

355. Za $m, n \in \mathbf{Z}$, naći $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m, n \neq 0)$.

Rešenje. Smenom $x - \pi = t$, $x = t + \pi$ imamo da je

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(mt + m\pi)}{\sin(nt + n\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^m \sin mt}{(-1)^n \sin nt} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}\,.$$

356. Naći granične vrednosti kad $x \to 0$ sledećih funkcija:

a) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, b) $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$, c) $x \operatorname{ctg} ax$ $(a \neq 0)$.

Rezultat. a) 1, b) 1/2, c) $1/a$.

357. Naći $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ $(a\neq b)$

Rešenje. Primenom formule za pretvaranje razlike kosinusa u proizvod nalazimo

$$\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\frac{-2}{x^2}\sin\frac{(a+b)x}{2}\sin\frac{(a-b)x}{2}$$
$$=-2\frac{\sin\left((a+b)x/2\right)}{x}\cdot\frac{\sin\left((a-b)x/2\right)}{x}.$$

Kad $x\to 0$, poslednji izraz teži ka $(b^2-a^2)/2$.

358. Naći granične vrednosti kad $x\to a$:

a) $\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, b) $\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$, c) $\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$ $(a\neq\pi/2+k\pi)$.

Rešenje. a) $\cos a$, b) $-\sin a$, c) $1/\cos^2 a$.

359. Odrediti $\lim_{x\to 0}(1-\cos x\,(\cos 2x)^{1/2})x^{-2}$.

Rešenje.

$$\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\frac{1-\cos^2 x\,\cos 2x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$$
$$=\frac{1-\cos^2 x\,(1-2\sin^2 x)}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$$
$$=\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1+2\cos^2 x}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}\to\frac{3}{2}\qquad\text{kad } x\to 0.$$

360. Naći granične vrednosti:

a) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$ [0]

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ [−1/12]

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$ [$\sqrt{2}$]

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ [3]

361. Naći $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

Rešenje. Imamo da je

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.$$

Kako je (videti zadatak 103)

$$\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| < \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+1-x}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \to 0 \quad (x \to +\infty),$$

i kako je za svako $x \in \mathbf{R}$

$$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \le 1,$$

zaključujemo da je tražena granična vrednost jednaka nuli.

362. Dokazati da je

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Rešenje. U zadatku 260 dokazali smo da za svaki niz x_n koji teži ka $+\infty$ ili ka $-\infty$ važi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

U zadatku 261 dokazali smo da je

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e,$$

za svaki nula niz.

Iz ovoga proizilazi traženo tvrđenje.

Pokušajte da date direktan dokaz, polazeći od definicije broja e pomoću granične vrednosti niza $(1+1/n)^n$.

363. Dokazati da je $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

364. Naći $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$. [1]

365. Naći $\lim_{x\to+\infty}(1+a/x)^x$.

Rešenje. Ako je $a = 0$, tada je $f(x) = (1+a/x)^x = 1$ za svako $x \neq 0$, tako da je i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Neka je $a > 0$. Smenom $a/x = t$ dobijamo da je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty}(1+t)^{a/t} = \lim_{x\to+\infty}\left((1+t)^{1/t}\right)^a = \left(\lim_{x\to+\infty}(1+t)^{1/t}\right)^a = e^a.$$

Rešenje. Kako je, za $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$, imamo da je $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$; ako je $a = 4$ tada je funkcija neprekidna u tački a. U ostalim tačkama je neprekidna za svako a.

Ako je $a = 1$, tada funkcija ima otklonjiv prekid u tački 2, jer granične vrednosti kad $x \to 2$ postoje i jednake su međusobno, ali nisu jednake $f(2)$.

Primedba. Kao što se može naslutiti iz ovog primera, funkcija koja ima otklonjiv prekid u nekoj tački postaje neprekidna ako se izmeni definicija funkcije u toj tački.

396. Da li je funkcija $f(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1}$ neprekidna u $x = 1$?

Rešenje. Kako f nije definisana u $x = 1$, ona nije neprekidna. Međutim, ovo je otklonjiv prekid. Naime, za $x \neq 1$, faktorizacijom polinoma u brojiocu nalazimo da je

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3 \; ; \; \lim_{x \to 1} f(x) = -8 \, .$$

Ako definišemo $f(1) = -8$, funkcija postaje neprekidna.

397. Ispitati neprekidnost funkcije f definisane sa

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} \, , & x \neq 0 \\ 0 \, , & x = 0 \end{cases}$$

398. Neka su funkcije $x \mapsto u(x)$ i $x \mapsto v(x)$ neprekidne u tački x_0. Naći potreban i dovoljan uslov da funkcija definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} u(x) \, , & x \leq x_0 \\ v(x) \, , & x > x_0 \end{cases}$$

bude neprekidna u tački x_0.

Rezultat. $u(x_0) = v(x_0)$.

399. Odrediti tačke prekida i ispitati vrstu prekida sledećih funkcija:
a) $f(x) = x - [x]$, b) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, c) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, d) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.

Rezultat. a) $x = k \in \mathbf{Z}$ prekidi prve vrste; b) $x = 0$, prekid prve vrste; c) $x = 0$ otklonjiv prekid; d) $x = 0$ prekid druge vrste.

400. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{za } x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ x, & \text{u ostalim tačkama iz } \mathbf{R} \end{cases}$$

Ispitati za koje $x \in \mathbf{R}$ je ova funkcija neprekidna.

Rezultat. Samo za $x = 1$.

2.6.2 Osobine neprekidnih funkcija

√ *Ako je funkcija f neprekidna u tački a i ako je $f(a) \neq 0$, tada postoji neka okolina tačke a u kojoj funkcija ima isti znak kao u tački a.*

√ *Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i ako je $f(a)f(b) < 0$, tj. ako f uzima vrednosti različitog znaka na krajevima intervala $[a, b]$, tada postoji neka tačka $c \in (a, b)$ tako da je $f(c) = 0$.*

√ *Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i ako je $f(a) \neq f(b)$, tada za svaki realan broj C između $f(a)$ i $f(b)$ postoji neko $x \in [a, b]$ tako da je $f(x) = C$.*

√ *Ako je f neprekidna i monotono rastuća (ili opadajuća) funkcija na $[a, b]$, tada ona ima inverznu funkciju f^{-1} koja je definisana, neprekidna i monotona na $[f(a), f(b)]$.*

401. Dokazati: Ako je g neprekidna funkcija na skupu A i ako je f neprekidna na skupu $g(A)$, tada je funkcija $x \mapsto f(g(x))$ neprekidna na skupu A.

402. Neka je funkcija f definisana u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$, i neka za neko $a > 0$ i za svako $x \in \mathbf{R}$ važi

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} . \tag{1}$$

Dokazati da je f periodična funkcija. Da li je f neprekidna na $\mathbf{R}$?

Konstruisati jednu funkciju f koja zadovoljava postavljene uslove.

Rešenje. Iz uslova da je f definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ i iz (1) sledi da je $f(x) \neq 1$ za svako $x \in \mathbf{R}$. Dalje iz (1) nalazimo

$$f(x + 2a) = \frac{1 + f(x + a)}{1 - f(x + a)} = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)} . \tag{2}$$

Dvostrukom primenom (2) dobijamo da je $f(x + 4a) = -1/f(x + 2a) = f(x)$, pa je f periodična funkcija, sa periodom $4a$.

Kako je f definisana za svako $x \in \mathbf{R}$, iz (2) to je $f(x) \neq 0$ za svako $x \in \mathbf{R}$. Kako je $f(x+2a)f(x) = -1$, funkcija f ima u tačkama x i $x+2a$ vrednosti različitog znaka; ako bi bila neprekidna, postojala bi tačka ξ između x i $x + 2a$ u kojoj je $f(\xi) = 0$,

što nije moguće. Prema tome, f nije neprekidna na $\mathbf{R}$. U stvari, iz dokazanog sleduje da f nije neprekidna ni na jednom intervalu dužine $2a$.

Na primer, funkcija f definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0,a) \\ 3, & x \in [a,2a) \\ -1/2, & x \in [2a,3a) \\ 1/3, & x \in [3a,4a) \end{cases}, \quad f(x+4ka) = f(x) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

zadovoljava postavljene uslove.

403. Data je neprekidna funkcija $f : [-1,1] \mapsto \mathbf{R}$, $f(-1) = f(1)$. Dokazati da postoje tačke a i b tako da $|a-b| = 1$ i $f(a) = f(b)$.

Rešenje. Na intervalu $[0,1]$ definišimo funkciju φ pomoću $\varphi(x) = f(x) - f(x-1)$. Tada je

$$\varphi(0) = f(0) - f(-1), \quad \varphi(1) = f(1) - f(0).$$

Kako je, na osnovu pretpostavke, $f(-1) = f(1)$, imamo da je $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = -A$, za neko $A \in \mathbf{R}$.

Ako je $A = 0$, tada je $f(0) = f(-1)$ i tvrđenje je dokazano (sa $a = -1, b = 0$). Ako je $A \neq 0$, tada za neprekidnu funkciju φ koja uzima vrednosti različitog znaka u tačkama 0 i 1, postoji neka tačka $b \in (0,1)$ tako da je $\varphi(b) = 0$; odavde je $f(b) - f(b-1) = 0$ i tvrđenje je dokazano (sa $a = b - 1$).

2.6.3 Infimum i supremum funkcije

Infimum i supremum funkcije f na datom skupu A, definišu se kao infimum, odnosno supremum skupa vrednosti funkcije f (videti definiciju u 1.1.3) kada argument pripada skupu A:

$$\inf_{t \in A} f(t) = \inf\{f(t) \mid t \in A\}, \quad \sup_{t \in A} f(t) = \sup\{f(t) \mid t \in A\}.$$

U opštem slučaju, infimum ili supremum funkcije na datom skupu mogu da budu beskonačni. Ako su infimum i supremum na skupu A konačni, kažemo da je funkcija **ograničena** *na skupu A.*

√ *Ako je f neprekidna funkcija, tada na svakom zatvorenom intervalu $[a,b]$ ona* **dostiže svoj minimum i maksimum**, *tj. postoje tačke $c_1, c_2 \in [a,b]$ tako da je*

$$f(c_1) = \min_{t \in [a,b]} f(t) = \inf_{t \in [a,b]} f(t) > -\infty.$$

$$f(c_2) = \max_{t \in [a,b]} f(t) = \sup_{t \in [a,b]} f(t) < +\infty.$$

404. Navesti primer funkcije koja je definisana u svakoj tački intervala $[0, 1]$, ali nije ograničena na tom intervalu.

Rešenje. Funkciju sa navedenim osobinama nije teško naći. Na primer, takva je funkcija f definisana pomoću $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

405. Ispitati da li je tačno tvrđenje: Ako je funkcija f definisana za svako $x \in \mathbf{R}$, tada postoji bar jedan segment $[a, b]$, $a < b$, na kome je funkcija f ograničena.

Rešenje. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} n\,, & \text{ako je } x = \dfrac{2k+1}{2^n} \text{ za neko } k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \\ 0\,, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je $[a, b]$ dati segment, pri čemu je $b - a > \dfrac{1}{2^{n_0-1}}$.
Kako je

$$\frac{2k+1}{2^n} - \frac{2(k-1)+1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

zaključujemo da se za svako $n > n_0$ u segmentu $[a, b]$ nalazi bar jedna tačka oblika $x_n = \dfrac{2k+1}{2^n}$. S obzirom na definiciju funkcije f, to znači da funkcija nije ograničena na $[a, b]$.

Prema tome, tvrđenje nije tačno.

406. Ako je funkcija f definisana u nekoj okolini nule i ako postoji konačan $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, dokazati da postoji interval $[a, b]$ na kome je funkcija ograničena.

407. Dokazati da za svake dve funkcije f i g definisane na proizvoljnom skupu A važi:

$$\sup_{t\in A}\big(f(t)+g(t)\big) \le \sup_{t\in A} f(t) + \sup_{t\in A} g(t)\,,$$

$$\inf_{t\in A}\big(f(t)+g(t)\big) \ge \inf_{t\in A} f(t) + \inf_{t\in A} g(t)\,.$$

Rešenje. Neka je

$$M_0 = \sup_{t\in A}\big(f(t)+g(t)\big),\ M_1 = \sup_{t\in A} f(t),\ M_2 = \sup_{t\in A} g(t)\,.$$

Po definiciji supremuma, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $t_0 \in A$ tako da je $f(t_0) + g(t_0) > M_0 - \varepsilon$. Kako je supremum gornja granica, imamo da je $f(t_0) \le M_1$ i $g(t_0) \le M_2$, pa je

$$M_0 - \varepsilon < f(t_0) + g(t_0) \le M_1 + M_2\,.$$

Prema tome, za svako $\varepsilon > 0$ imamo

$$M_0 - \varepsilon \leq M_1 + M_2 .$$

Ako ovde pustimo da $\varepsilon \to 0$, dobijamo nejednakost za supremum. Nejednakost za infimum se analogno izvodi. ♣

408. Dokazati:

$$\sup_{t\in A} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t\in A} |f(t)| + \sup_{t\in A} |g(t)| ,$$

Rešenje. Kako je $|f + g| \leq |f| + |g|$, to je

$$\sup_{t\in A} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t\in A} (|f(t)| + |g(t)|) . \tag{1}$$

Ako prvu nejednakost iz zadatka 407 primenimo na funkcije $|f|$ i $|g|$, dobijamo

$$\sup_{t\in A} (|f(t)| + |g(t)|) \leq \sup_{t\in A} |f(t)| + \sup_{t\in A} |g(t)| . \tag{2}$$

Tražena nejednakost se dobija iz (1) i (2).

409. Da li važi

$$\inf_{t\in A} |f(t) + g(t)| \geq \inf_{t\in A} |f(t)| + \inf_{t\in A} |g(t)| \ ?$$

Rezultat. Ne. Kao primer može da posluži slučaj $f = -g$.

2.6.4 Uniformna neprekidnost

- *Za funkciju f kažemo da je uniformno neprekidna na skupu A, ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A) \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon . \tag{1}$$

Ako uporedimo ovu definiciju sa definicijom neprekidnosti u tački, vidimo da δ ne zavisi od tačke, već jedno δ važi za sve tačke skupa A. Prema tome, uniformno neprekidna funkcija na skupu A je neprekidna u svakoj tački tog skupa; obrnuto ne važi u opštem slučaju.

√ *Svaka funkcija koja je neprekidna u svakoj tački zatvorenog intervala $[a, b]$ je uniformno neprekidna na tom intervalu.*

Logička negacija formule (1) je

$$(2) \qquad (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x, y \in A) \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \, .$$

Iz (2) se može izvesti da je funkcija f nije uniformno neprekidna na A ako i samo ako postoje dva niza $x_n, y_n \in A$ tako da je $\lim(x_n - y_n) = 0$, ali $|f(x_n) - f(y_n)|$ ne teži nuli kad $n \to \infty$. Odavde dobijamo:

√ *Funkcija f je uniformno neprekidna na skupu A ako i samo ako je za svaka dva niza x_n i y_n, čiji članovi pripadaju skupu A, ispunjen uslov:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0 \, .$$

410. Dokazati da funkcija $f(x) = 1/x$ nije uniformno neprekidna na $(0, 1)$.

Rešenje. Neka je $x_n = 1/n$, $y_n = 1/(n+1)$. Tada svi članovi ovih nizova za $n > 1$ pripadaju intervalu $(0, 1)$ i

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0 \qquad (n \to +\infty) \, .$$

S druge strane, $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \not\to 0$.

411. Dokazati da je funkcija $f(x) = 1/\sqrt{x}$ neprekidna u svakoj tački $x_0 > 0$. Ispitati uniformnu neprekidnost date funkcije na intervalima $(a, +\infty)$, za $a \geq 0$.

Rešenje. Neka je $a > 0$ i neka su x_n, y_n nizovi realnih brojeva iz $(a, +\infty)$. Tada je

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x_n}} - \frac{1}{\sqrt{y_n}}\right| = \frac{|x_n - y_n|}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})\sqrt{x_n}\sqrt{y_n}}$$

$$(1) \qquad < |x_n - y_n| \cdot \frac{1}{2a^{3/2}} .$$

Iz (1) zaključujemo da ako $x_n - y_n \to 0$, tada i $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, što znači da je f uniformno neprekidna na $(a, +\infty)$.

Svako $x_0 > 0$ pripada nekom intervalu oblika $(a, +\infty)$; kako je f uniformno neprekidna na $(a, +\infty)$, ona je i neprekidna u svakoj tački tog intervala. Prema tome, data funkcija je neprekidna u svakoj tački $x_0 > 0$.

Na $(0, +\infty)$ data funkcija nije uniformno neprekidna. Na primer, za nizove $x_n = 1/n^2$ i $y_n = 1/(n+1)^2$ imamo da je $\lim(x_n - y_n) = 0$, dok je $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$.

412. Dokazati da je funkcija

$$f(x) = x + \sin x$$

uniformno neprekidna na $(-\infty, +\infty)$, iako nije ograničena.

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |x+\sin x - y - \sin y| \le |x-y| + |\sin x - \sin y| \\ &= |x-y| + \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \\ &\le |x-y| + 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x-y| + 2\frac{|x-y|}{2} = 2|x-y|.\end{aligned}$$

Neka su x_n i y_n dva proizvoljna niza čija razlika teži nuli. Tada iz dokazanog sledi

$$|f(x_n)-f(y_n)| \le |x_n - y_n| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

što znači da je f uniformno neprekidna na $\mathbf{R}$.

413. Dokazati da funkcija

$$f(x) = \sin x^2$$

nije uniformno neprekidna na $(-\infty, +\infty)$, mada je ograničena i neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$.

Rešenje. Neka su nizovi tačaka x_n i y_n definisani pomoću

$$x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \sqrt{2n\pi}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Kad $n \to +\infty$, imamo

$$x_n - y_n = \frac{\pi}{2(\sqrt{2n\pi + \pi/2} + \sqrt{2n\pi})} \to 0.$$

Međutim, $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Iz ovoga zaključujemo da data funkcija nije uniformno neprekidna na $\mathbf{R}$.

414. Ispitati uniformnu neprekidnost funkcije $f(x) = \sqrt{x}\log x$ na intervalu $(0, 1)$.

Rešenje. Posmatrajmo funkciju f^* definisanu na $[0, 1]$ pomoću

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{za } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

Kako je

$$\lim_{x \to 0_+} f^*(x) = \lim_{x \to 0_+} \sqrt{x}\log x = 0,$$

funkcija f^* je neprekidna na zatvorenom intervalu $[0, 1]$, pa je i uniformno neprekidna na tom intervalu .

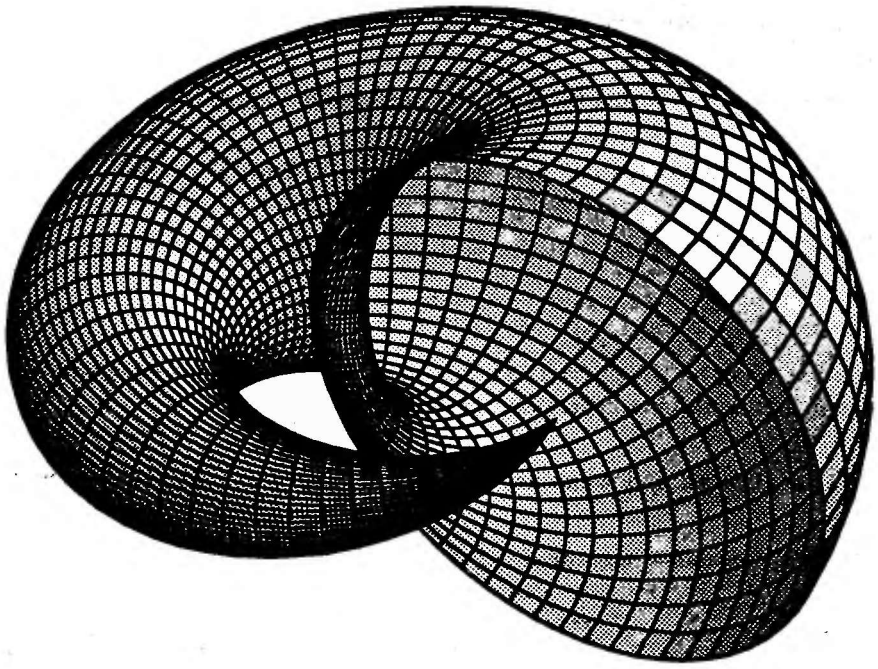
Neka su x_n i y_n dva niza čiji članovi pripadaju otvorenom intervalu $(0,1)$. Kako se na $(0,1)$ funkcije f^* i f poklapaju, iz uniformne neprekidnosti funkcije f^* sledi

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim_{n\to\infty}(f^*(x_n)-f^*(y_n))=0.$$

Prema tome, funkcija f je uniformno neprekidna na $(0,1)$.

Primedba. Iz gornjeg rešenja može se izvesti jedan dovoljan uslov za uniformnu neprekidnost date funkcije f na intervalu (a,b). Koji je to uslov?

►► 3.2.3, ►► 8.2.2



U opštem slučaju, ako je dat određeni stepen ili koren, x^z, $\mathrm{d}x^z$ će biti jednak $zx^{z-1}\,\mathrm{d}x$. Ako je $z = \frac{1}{2}$, tj. ako je x^z jednako $\sqrt[2]{x}$, $\mathrm{d}x^z$ ili $\mathrm{d}\sqrt[2]{x}$ biće $\frac{1}{2}x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ ili $\mathrm{d}x/2\sqrt{x}$.

Gottfried Leibniz, Calculus Tangentium Differentialis, 1676.

Glava 3

Diferencijalni račun funkcija jedne promenljive

Diferencijalni račun se pojavio u 17. veku, zajedno sa integralnim računom. Prvi udžbenik iz ove oblasti napisao je JOHANNES BERNOULLI za svog učenika, markiza FRANÇOISa L'HOSPITALa.

U ovoj glavi dajemo osnove klasičnog diferencijalnog računa, sa nekim primenama. TAYLOROva formula je detaljno obrađena u odeljku 3.4.

3.1 Izvod i diferencijal

3.1.1 Definicija izvoda

- *Neka je f data funkcija definisana u nekoj okolini tačke $x_0 \in \mathbf{R}$. Ako postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost*

$$(1) \qquad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,,$$

tada kažemo da je $f'(x_0)$ **prvi izvod** *ili samo* **izvod** *funkcije f u tački $x_0 \in \mathbf{R}$. Izvod funkcije f je takođe funkcija, definisana u onim tačkama $x_0 \in \mathbf{R}$ u kojima je granična vrednost u (1) konačna. Prvi izvod funkcije f u datoj tački x_0 označavamo i sa $f'(x)\big|_{x=x_0}$, naročito u slučajevima kada treba napraviti razliku između funkcije $x \mapsto f'(x)$ i njene vrednosti u datoj tački. Postupak nalaženja izvoda naziva se* **diferenciranje**.

✓ *Ako funkcije f i g imaju konačne izvode u tački x, tada važe sledeća pravila diferenciranja:*

$$c' = 0, \quad c = \text{const.} \qquad \textit{(izvod konstante)},$$
$$\big(af(x) + bg(x)\big)' = af'(x) + bg'(x), \quad a, b = \text{const.} \qquad \textit{(linearnost)},$$
$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \textit{(izvod proizvoda)},$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0 \qquad \textit{(izvod količnika)}.$$

√ **Izvod složene funkcije.** *Ako funkcije $y = f(u)$ i $u = g(x)$ imaju konačne izvode, tada je*

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(u)\big|_{u=g(x)}\; g'(x)$$

√ **Izvod inverzne funkcije.** *Neka je $y = f(x)$, gde je f monotona i neprekidna funkcija u nekoj okolini tačke x_0 i ima konačan izvod $f'(x_0) \neq 0$. Neka je $x = f^{-1}(y)$ inverzna funkcija. Tada je*

$$\big(f^{-1}(y_0)\big)' = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0 = f(x_0)).$$

√ **Izvod kompleksne funkcije realnog argumenta.** *Ako je $f(x) = u(x) + iv(x)$, tada je*

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

*Na osnovu navedenih pravila i tablice izvoda osnovnih elementarnih funkcija, možemo nalaziti izvode složenijih funkcija bez pozivanja na definiciju izvoda. U stvari, dovoljno je poznavati samo izvode označene znakom * u tablici na strani 153.*

415. Odrediti izvod funkcije $f(x) = x^a$, gde je $a \in \mathbf{R}$. U kojim tačkama $x \in \mathbf{R}$ je definisana funkcija $x \mapsto f'(x)$?

Rešenje. Za $x \neq 0$ imamo da je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \lim_{h\to 0} x^a \frac{(1+h/x)^a - 1}{h}$$
$$= x^{a-1} \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^a - 1}{t} \qquad (t = h/x).$$

U zadatku 373 je pokazano da je poslednja granična vrednost jednaka a. Prema tome, traženi izvod je ax^{a-1}.

Navedeni rezultat važi za $x > 0$ i za svako $a \in \mathbf{R}$. U specijalnim slučajevima, kada je data funkcija f definisana za $x < 0$, izvod je takođe definisan u tim tačkama. Ostaje da se razmotri slučaj $x = 0$. U ovom slučaju je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^a}{h} = \lim_{h\to 0} h^{a-1}.$$

Ova granična vrednost postoji (kao obostrana) i konačna je ako je $a \geq 1$ i ako je funkcija $x \mapsto x^a$ definisana i za negativne vrednosti argumenta, a to je slučaj ako je $a = p/q$ gde je $p = 0, 1, 2, \ldots$, $q = 1, 3, 5, \ldots$

Videti i zadatak 428 za alternativno rešenje.

Funkcija	Izvod [zadatak br.]	Funkcija	Izvod [zadatak br.]
* x^a	ax^{a-1} [415, 428]	$\frac{1}{x^a}$	$-\frac{a}{x^{a+1}}$
* $\sin x$	$\cos x$ [358]	* $\cos x$	$-\sin x$ [358]
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ [358, 418]	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$ [419]
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [416]	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [417]
* $\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$ [420]	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$ [421]
a^x	$a^x \log a$ [427]	* e^x	e^x [375]
$\log_b x$	$\frac{1}{x \log b}$ [422]	* $\log x$	$\frac{1}{x}$ [374]
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$ [426]	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$ [426]
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ [429]	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ [429]

*Tablica izvoda. Znakom * označeni su osnovni izvodi.*

416. Naći izvod funkcije $f(x) = \arcsin x$. U kojim tačkama je ovaj izvod definisan i konačan?

Rešenje. I način: Po definiciji izvoda imamo da je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h}. \tag{1}$$

Ako uvedemo smenu $u = \arcsin(x+h)$, $a = \arcsin x$, tada je $x+h = \sin u$, $x = \sin a$. Za fiksirano x, zbog neprekidnosti funkcije $x \mapsto \arcsin x$, $h \to 0$ je ekvivalentno sa $u \to a$, tako da je (1) ekvivalentno sa

$$f'(x) = \lim_{u \to a} \frac{u-a}{\sin u - \sin a} = \frac{1}{\cos a} \quad \text{(zadatak 358)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Funkcija f' je definisana u svim tačkama $x \in (-1, 1)$.

II način: Neka je $y \triangleq \arcsin x$. Po pravilu o izvodu inverzne funkcije, za $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $x = \sin y \in (-1, 1)$ važi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Kako je, za $y \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

imamo da je

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

417. Odrediti izvod funkcije $x \mapsto \arccos x$.

Rešenje. Polazeći od jednakosti

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

koja, prema zadatku 119 važi za svako $x \in [-1, 1]$, i primenom pravila za nalaženje izvoda, imamo

$$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0.$$

Odavde je

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

418. Znajući izvode funkcija $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$, naći izvod funkcije $x \mapsto \operatorname{tg} x$.

Rešenje. Prema pravilu o izvodu količnika,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

419. Naći izvod funkcije $x \mapsto \operatorname{ctg} x$.

Rešenje. **I način:** Prema pravilu o izvodu količnika,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

II način: Prema pravilu o izvodu složene funkcije,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}(\operatorname{tg} x)' = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

420. Naći izvod funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

Rešenje. Prema pravilu o izvodu inverzne funkcije, za svako $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $x = \operatorname{tg} y \in \mathbf{R}$, imamo

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y .$$

Kako je

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

nalazimo da je izvod funkcije $y \mapsto \operatorname{arctg} x$ jednak $1/(1+x^2)$.

421. Znajući izvod funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, odrediti izvod funkcije $x \mapsto \operatorname{arcctg} x$.

Rešenje. Kako je $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$ za svako $x \in \mathbf{R}$, imamo da je

$$(\operatorname{arctg} x)' + (\operatorname{arcctg} x)' = 0 ,$$

odakle je

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} .$$

422. Znajući da je $(\log x)' = 1/x$, odrediti izvod funkcije $x \mapsto \log_b x$.

Rešenje. Iz jednakosti

$$\log_b x = \frac{1}{\log b} \log x ,$$

primenom linearnosti, nalazimo

$$(\log_b x)' = \frac{1}{\log b}(\log x)' = \frac{1}{x \log b} .$$

423. Znajući da je $(e^x)' = e^x$, naći izvod funkcije $x \mapsto e^{ax}$.

Rešenje. Ako je $f(u) = e^u$, $u = g(x) = ax$, tada je $e^{ax} = f(g(x))$. Odavde je

$$(e^{ax})' = (e^u)'\,|_{u=ax}\ (ax)' = e^{ax} \cdot a .$$

424. Dokazati da je $\big(f(ax)\big)' = af'(ax)$, gde je a data konstanta.

425. Dokazati da je izvod parne funkcije neparna funkcija i obrnuto.

426. Naći izvode funkcija $x \mapsto \operatorname{sh} x$ i $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

Rešenje. Kako je $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$ (zadatak 423), primenom linearnosti dobijamo

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

i na isti način,

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

427. Znajući da je $(e^x)' = e^x$, naći izvod funkcije $x \mapsto a^x$.

Rešenje. Kako je $a^x = e^{x \log a}$, imamo da je $a^x = f(\log a \cdot x)$, gde je $f(x) = e^x$. Stoga je (zadatak 424):

$$(a^x)' = \log a \cdot f'(\log a \cdot x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

428. Polazeći od izvoda logaritamske i eksponencijalne funkcije, odrediti izvod funkcije $x \mapsto x^a$, za $x > 0$.

Rešenje. Kako je, $x^a = e^{a \log x}$ $(x > 0)$, prema pravilu o izvodu složene funkcije imamo da je

$$(x^a)' = \left(e^{a \log x}\right)' = e^{a \log x}(a \log x)' = e^{a \log x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

429. Naći izvode funkcija $x \mapsto \operatorname{th} x$ i $x \mapsto \operatorname{cth} x$.

Rešenje. Prema pravilu o izvodu količnika,

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Na sličan način se dobija da je $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

430. Naći izvode funkcija: **a)** x^{77}, **b)** $x^{3/4}$, **c)** $x^{-5/2}$, **d)** $\sqrt{x}$, **e)** $\sqrt[4]{x^5}$, **f)** $\sqrt[5]{x^4}$, **g)** $\dfrac{x^{3/2}}{\sqrt[3]{x^2}}$, **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Rezultat. **a)** $77x^{76}$, **b)** $\frac{3}{4}x^{-1/4}$, **c)** $-\frac{5}{2}x^{-7/2}$, **d)** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, **e)** $\frac{5}{4}x^{1/4}$, **f)** $\frac{4}{5}x^{-1/5}$, **g)** $\frac{5}{6}x^{-1/6}$, **h)** $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$.

431. Neka je $f: u \mapsto f(u)$ data funkcija i neka je $g(x) = f(x+a)$, gde je a konstanta. Dokazati da je $g'(x) = f'(u)\,|_{u=x+a}$.

432. Naći izvode funkcija: **a)** e^{x-3}, **b)** $\dfrac{1}{x+5}$, **c)** $\log(x+31)$, **d)** $\sin(x+\pi/5)$, **e)** $\operatorname{tg}(12+x)$, **f)** $\operatorname{arctg}(x-1)$, **g)** $(x+21)^{76}$, **h)** $\dfrac{1}{(x-2)^3}$.

Rezultat. **a)** e^{x-3}, **b)** $-\dfrac{1}{(x+5)^2}$, **c)** $\dfrac{1}{x+31}$, **d)** $\cos(x+\pi/5)$, **e)** $\dfrac{1}{\cos^2(12+x)}$, **f)** $\dfrac{1}{1+(x-1)^2}$, **g)** $76(x+21)^{75}$, **h)** $-3(x-2)^{-4}$.

433. Neka je $u \mapsto f(u)$ data funkcija i neka je $g(x) = f(ax+b)$, gde su a i b konstante. Dokazati da je $g'(x) = af'(u)\,|_{u=ax+b}$.

434. Naći izvode funkcija:
a) $(2x+6)^{100}$, **b)** $\sqrt[3]{x\sqrt{2}-\pi}$, **c)** 2^{3x-2}, **d)** $\log(8x-7)$.
e) $\operatorname{tg}(5x+11)$, **f)** $\operatorname{arctg}(2-x)$, **g)** $\operatorname{sh}(2x+8)$, **h)** $\dfrac{1}{4-3x}$.

Rezultat. **a)** $200(2x+6)^{99}$, **b)** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}(x\sqrt{2}-\pi)^{-2/3}$, **c)** $3\cdot 2^{3x-2}\log 2$, **d)** $\dfrac{8}{8x-7}$, **e)** $\dfrac{5}{\cos^2(5x+11)}$, **f)** $-\dfrac{1}{1+(2-x)^2}$, **g)** $2\operatorname{ch}(2x+8)$, **h)** $\dfrac{3}{(4-3x)^2}$.

435. Ako je poznat izvod funkcije f, navedite dva načina kako se može naći izvod funkcije $1/f$.

Rešenje. Kako je $1/f(x) = \big(f(x)\big)^{-1}$, izvod možemo naći ili primenom pravila o izvodu količnika ili primenom pravila o izvodu složene funkcije. Primenom pravila o izvodu količnika imamo

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{(1)'f(x) - 1\cdot f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Primenom pravila o izvodu složene funkcije nalazimo

$$\Big(\big(f(x)\big)^{-1}\Big)' = (-1)\cdot\big(f(x)\big)^{-2}\cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Drugi način je jednostavniji i preporučujemo čitaocu da ga isključivo koristi. !

436. Naći izvode funkcija:

a) $\sec x$, b) $\operatorname{cosec} x$, c) $\log_x a$, d) $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(2x+3)}$,

e) $\dfrac{1}{2^x - 2^{-x}}$, f) $\dfrac{1}{\sin x - \sin a}$, g) $\dfrac{1}{e^{-2x}+3}$, h) $-\dfrac{1}{\sqrt{5x}+\sqrt{6x}}$.

Rezultat. a) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$, b) $-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$, c) $-\dfrac{\log a}{x \log^2 x}$, d) $-\dfrac{2\operatorname{sh}(2x+3)}{\operatorname{ch}^2(2x+3)}$,

e) $-\dfrac{(2^x + 2^{-x})\log 2}{(2^x - 2^{-x})^2}$, f) $-\dfrac{\cos x}{(\sin x - \sin a)^2}$, g) $\dfrac{2e^{-2x}}{(e^{-2x}+3)^2}$,

h) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2(\sqrt{5x}+\sqrt{6x})^2\sqrt{x}}$.

437. Dokazati pravilo o izvodu inverzne funkcije.

Rešenje. Neka su ispunjeni uslovi navedeni na starni 151. Tada je

$$f^{-1}(f(x)) = x\,.$$

Nalaženjem izvoda leve i desne strane (leve strane kao složene funkcije), dobijamo

$$(f^{-1}(y))'\big|_{y=f(x)}\; f'(x) = 1\,,$$

odakle je

$$(f^{-1}(y))'\big|_{y=f(x)} = \frac{1}{f'(x)}\,,$$

što je i trebalo dokazati.

438. Naći izvod funkcije $x \mapsto \operatorname{arsh} x$.

Rešenje. **I način:** Neka je $x = \operatorname{sh} y$. Primenom pravila o izvodu inverzne funkcije imamo da je

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

II način: Polazeći od eksplicitne formule

$$\operatorname{arsh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})\,,$$

nalazimo da je

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

439. Naći izvode funkcija:

a) $\operatorname{arch} x$, **b)** $\operatorname{arth} x$, **c)** $\operatorname{arcth} x$.

Rezultat. **a)** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, **b)** $\frac{1}{1-x^2}$, **c)** $\frac{1}{1-x^2}$.

440. Dokazati da važi generalisano pravilo o izvodu proizvoda:

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x))' = \sum_{i=1}^{n} f_1(x)\cdots f_i'(x)\cdots f_n(x).$$

441. Naći izvod funkcije $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Rešenje. Primenom generalisanog pravila o izvodu proizvoda, imamo da je

$$\begin{aligned}&((x-1)(x-2)(x-3))' = \\ &= (x-1)'(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)'(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)' \\ &= (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) \\ &= 3x^2 - 12x + 11.\end{aligned}$$

442. Ako je $f(x) = x(x+1)\cdots(x+n)$, odrediti $f'(0)$. [$n!$]

443. Neka je $x \mapsto P(x)$ polinom n-tog stepena, čiji su koreni $x_1, \ldots, x_n$. Dokazati da je, za $x \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$,

$$P'(x) = P(x)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} = P(x)\cdot \sum \frac{k_j}{x - x_j},$$

gde je k_j red korena x_j i gde se sumira po svim različitim korenima x_j.

444. Naći izvode funkcija:

a) $\dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$ [$\frac{3x^5-5x^4-2x^3+6x^2+6x-12}{(x-1)^3}$]

b) $(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$ [$\frac{3x^5+2x^4+4x^3+8x^2+3x+6}{(3+x^3)^{2/3}\sqrt{2+x^2}}$]

c) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ [$\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$]

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ [$\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$]

445. Naći izvode funkcija:

a) $\sin(\cos x)\cos(\sin x)$ $[\,-\sin x\cos(\sin x)\cos(\cos x)-\cos x\sin(\sin x)\sin(\cos x)\,]$

b) $\log\dfrac{x^2+3x+2}{x^5+7x+9}$ $[\,\frac{2x+3}{x^2+3x+2}-\dfrac{5x^4+7}{x^5+7x+9}\,]$

c) $\log(\log(\log x)))$ $[\,\frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,]$

d) $\exp(x^2+2x+3)$ $[\,(2x+2)\exp(x^2+2x+3)\,]$

e) $2^{\cos x^2}$ $[\,-2^{\cos x^2+1}(\log 2)x\sin x^2\,]$

f) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $[\,-\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}\,]$

g) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ $[\,\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\,]$

h) $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x$ $[\,\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,]$

446. Dokazati formulu za izvod determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}(x) & \dots & a_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k1}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Po definiciji determinante, imamo da je

$$(1)\qquad D'(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}(x) & \dots & a_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum(-1)^s\left(a_{1i_1}(x)a_{2i_2}(x)\cdots a_{ni_n}(x)\right)',$$

gde se sumira po svim permutacijama $i_1 i_2 \dots i_n$ brojeva $1, 2, \dots n$, i gde je s broj inverzija u tekućoj permutaciji. Kako je

$$\left(a_{1i_1}(x)a_{2i_2}(x)\cdots a_{ni_n}(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} a_{1i_1}(x)\cdots a'_{ki_k}(x)\cdots a_{ni_n}(x),$$

i, takođe po definiciji determinante,

$$\sum(-1)^s a_{1i_1}(x)\cdots a'_{ki_k}(x)\cdots a_{ni_n}(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k1}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

smenom u (1) dobijamo traženu jednakost.

447. Naći $f'(x)$ ako je

$$f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \operatorname{tg} x \\ \cos x & -\sin x & \cos^{-2} x \\ \sin x & \cos x & 2\cos^{-3} x \end{vmatrix}.$$

Rezultat. $\cos^{-2} x + 6 \sin x \cos^{-4} x$.

448. Naći izvod funkcije $f(x) = \log|x|$.

Rešenje. Funkcija f je definisana za svako $x \neq 0$. Kako je $|x| = -x$ za $x < 0$, imamo da je

$$(\log|x|)' = [\log(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad (x < 0).$$

Za $x > 0$ je $|x| = x$, odakle sleduje

$$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Prema tome, za svako $x \neq 0$,

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}.$$

449. Ako funkcije f i g imaju konačne izvode, naći izvode sledećih funkcija:

a) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, b) $\operatorname{arctg} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, c) $g(x) \log f(x)$.

Rezultat. a) $\dfrac{f'f + g'g}{\sqrt{f^2 + g^2}}$, b) $\dfrac{f'g - g'f}{f^2 + g^2}$, c) $g' \log f + \dfrac{f'g}{f}$.

450. Naći izvod funkcije $f(x) = \log(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$.

Rešenje. Neka je $u(x) = \cos^2 x$ i $v(u) = \sqrt{1 + u^2}$. Tada je

$$f'(x) = \left(\log(u(x) + \sqrt{1 + u^2(x)})\right)' = \frac{1}{u + v}\left(u' + \frac{uu'}{\sqrt{1 + u^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{u + v} \cdot \frac{u'(u + v)}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$$

451. Naći izvode funkcija:

a) $\dfrac{e^{-x^2}\arcsin e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\log(1-e^{-2x^2})$ $\left[-\dfrac{2xe^{-x^2}\arcsin e^{-x^2}}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}\right]$

b) $\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg} a^{-x}$ $\left[4\log a\dfrac{a^{2x}\operatorname{arcctg} a^{-x}}{(1+a^{2x})^2}\right]$

3.1.2 Logaritamski izvod

Za nalaženje izvoda funkcije oblika

$$f(x)=u(x)^{v(x)}$$

koristi se sledeći postupak: Diferenciranjem obe strane jednakosti

$$\log f(x)=v(x)\log u(x)$$

nalazimo

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=v'(x)\log u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)},$$

odakle je

$$f'(x)=f(x)\left(v'(x)\log u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

i konačno dobijamo

(1) $$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\log u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Formula (1) može da se izvede i polazeći od

$$u(x)^{v(x)}=e^{u(x)\log v(x)}$$

i primenjujući pravila diferenciranja složenih funkcija.

452. Naći izvode funkcija:

a) x^x, b) $x^{1/x}$, c) x^{x^x}.

Rezultat. a) $x^x(\log x+1)$, b) $x^{1/x-2}(1-\log x)$, c) $x^{x^x+x}\left(\log^2 x+\log x+\dfrac{1}{x}\right)$.

453. Naći izvode funkcija:

a) $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$, b) $y=\dfrac{(\log x)^x}{x^{\log x}}$, c) $y=\left(\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right)^{\operatorname{arctg}^2 x}$

Rešenje. a) Izvod prvog sabirka je:

$$((\sin x)^{\cos x})' = \left(e^{\cos x \log \sin x}\right)' = e^{\cos x \log \sin x}(\cos x \log \sin x)'$$
$$= (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}) .$$

Na isti način nalazimo izvod drugog člana:

$$\left((\cos x)^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \log \cos x}\right)' = e^{\sin x \log \cos x}(\sin x \log \cos x)'$$
$$= (\cos x)^{\sin x}(\cos x \log \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}) .$$

b) Kako je

$$\log y = x \log \log x - (\log x)^2 ,$$

diferenciranjem leve i desne strane ove jednakosti, dobijamo

$$\frac{y'}{y} = \log \log x + x\frac{1/x}{\log x} - 2(\log x)\frac{1}{x} = \log \log x + \frac{1}{\log x} - 2\frac{\log x}{x} ,$$

odakle je

$$y' = \frac{(\log x)^x}{x^{\log x}}\left(\log \log x + \frac{1}{\log x} - 2\frac{\log x}{x}\right) .$$

c) Kao i u slučaju b), polazimo od

$$\log y = \operatorname{arctg}^2 x \, (\log \operatorname{arcsin} \sin^2 x - \log \operatorname{arccos} \cos^2 x) .$$

Diferenciranjem obe strane nalazimo:

$$y' = y(A + B),$$

gde je

$$A = 2\operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2}(\log \operatorname{arcsin} \sin^2 x - \log \operatorname{arccos} \cos^2 x),$$
$$B = \operatorname{arctg}^2 x \left(\frac{1}{\operatorname{arcsin} \sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}} \cdot 2 \sin x \cos x\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\operatorname{arccos} \cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\cos^4 x}} \cdot 2 \sin x \cos x\right).$$

3.1.3 Levi i desni izvod. Beskonačan izvod

- *Granične vrednosti*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

ako postoje, nazivaju se, redom, **levi i desni izvod** *funkcije f u tački x_0.*

√ *Funkcija f ima izvod u tački x_0 ako i samo ako postoje levi i desni izvod u x_0 i jednaki su.*

√ *Ako funkcija f ima konačan izvod u tački x_0, tada je f neprekidna u x_0. Ako f ima konačan levi (desni) izvod u x_0, tada je f neprekidna sleva (zdesna) u x_0.*

454. Navesti primer jedne neprekidne funkcije koja nema (ni konačan ni beskonačan) izvod u nekoj tački.

Rešenje. Na primer, funkcija $f(x) = |x|$ nema izvod u $x = 0$. Naime, kako je

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0)-f(-h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h}{h} = 1,$$

levi i desni izvod u nuli nisu jednaki, pa funkcija nema izvod.

455. Konstruisati neprekidnu funkciju koja nema izvod u datim tačkama $x_1, \dots x_n$.

Rešenje. Na primer, funkcija

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - x_k|$$

je neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$, ali nema izvod u tačkama $x_1, \dots x_n$.

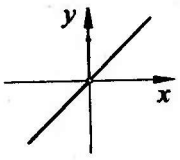
456. Navesti primer funkcije koja je neprekidna u datoj tački a, ali u toj tački ima beskonačan izvod.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x-a}$ zadovoljava postavljene uslove. Ova funkcija je neprekidna u tački a; po definiciji izvoda imamo da je

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

457. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x\,, x < 0 \\ 1\,, x = 0 \\ x\,, x > 0 \end{cases}$$



Slika 12.

Da li je za ovu funkciju levi izvod u nuli jednak desnom izvodu ? Koliko iznose ovi izvodi ?

Rezultat. $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = -\infty$.

458. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ima izvod u tački x, dokazati da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)\,.$$

459. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \le 0 \\ e^x - 1\,, & x > 0 \end{cases}$$

Da li data funkcija ima izvod u $x = 0$?

Rešenje. Levi i desni izvod funkcije f možemo da odredimo na dva načina.

I način: Kako se analitički izrazi kojima je zadata funkcija razlikuju sa leve i desne strane nule, izvode tražimo po definiciji:

$$f'_- = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0) - f(-h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{0 - (-h)}{h} = 1\,.$$

$$f'_+ = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{(e^h - 1) - 0}{h} = 1\,,$$

gde je poslednja granična vrednost nađena u zadatku 375.

II način: Primetimo da je funkcija neprekidna u tački $x = 0$, jer je $x = e^x - 1$ za $x = 0$. Stoga je levi izvod date funkcije u tački $x = 0$ jednak izvodu funkcije $u(x) = x$, dok je desni izvod date funkcije u nuli jednak izvodu funkcije $v(x) = e^x - 1$ u istoj tački. Odavde je $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$. □

Kako su levi i desni izvod jednaki, funkcija f ima izvod $f'(0) = 1$.

460. Neka su funkcije $x \mapsto u(x)$ i $x \mapsto v(x)$ definisane u nekoj okolini tačke x_0, neprekidne u x_0 i imaju konačne izvode u x_0. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} u(x)\,, & x \le x_0 \\ v(x)\,, & x > x_0 \end{cases}$$

Pod kojim uslovima funkcija f ima izvod u x_0?

Rezultat. Funkcija f ima izvod u x_0 ako i samo ako je $u(x_0) = v(x_0)$ i $u'(x_0) = v'(x_0)$.

461. Da li se realni brojevi a i b mogu odrediti tako da funkcija f, definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & (x \leq 1) \\ 3 - bx^2, & (x > 1) \end{cases}$$

bude neprekidna u tački $x = 1$ i da ima konačan izvod u toj tački?

Rešenje. Neka je

$$u(x) = ax + 1, \qquad v(x) = 3 - bx^2.$$

Funkcije u i v su neprekidne u tački $x = 1$ i imaju konačne izvode u toj tački. Na osnovu zadatka 460, funkcija f će biti neprekidna i imaće konačan izvod u $x = 1$ ako važe jednakosti

$$u(1) = v(1) \iff a + 1 = 3 - b,$$
$$u'(1) = v'(1) \iff a = -2b.$$

Rešavanjem ovog sistema nalazimo $a = 4, b = -2$.

462. Neka je funkcija $x \mapsto g(x)$ neprekidna u tački a. Dokazati da funkcija

$$f(x) = (x - a)g(x)$$

ima konačan izvod u tački a.

Rešenje. Za svako $h \neq 0$ imamo

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a + h - a)g(a + h)}{h} = g(a + h),$$

pa je, zbog neprekidnosti funkcije g u tački a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} g(a + h) = g(a),$$

čime je tvrđenje dokazano.

Primedba. Iz dokazanog tvrđenja sleduje da sve funkcije oblika

$$f(x) = (x - a)|x - a|^{2k+1} \qquad (k > 0)$$

imaju izvod $f'(a) = 0$.

463. Da li funkcija može da ima izvod u izolovanoj tački svog domena?

Rešenje. Ne može. Naime, granična vrednost

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

je definisana samo ako je tačka $h=0$ tačka nagomilavanja domena funkcije $h\mapsto (f(x_0+h)-f(x_0))/h$. To znači da funkcija $h\mapsto f(x_0+h)$ mora da bude definisana u nekoj okolini nule, tj. da funkcija $x\mapsto f(x)$ mora da bude definisana u nekoj okolini tačke x_0.

464. Ako funkcija f ima konačan izvod u tački x_0 da li ona mora da bude neprekidna u nekoj okolini tačke x_0?

Rezultat. Ne mora (videti primer u zadatku 465).

465. Ispitati u kojim tačkama ima izvod funkcija f definisana sa

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

Rešenje. Neka je x racionalan broj, $x\neq 0$. Neka je h_n niz racionalnih brojeva, $\lim h_n=0$ i neka je u_n jedan nula niz iracionalnih brojeva. Tada je

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{(x+h_n)^2-x^2}{h_n}\to 2x\neq 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{f(x+u_n)-f(x)}{u_n}=0\,. \tag{2}$$

Prema tome, ne postoji izvod u racionalnoj tački $x\neq 0$. Na isti način se dokazuje da ne postoji izvod ni u jednoj iracionalnoj tački x. Ako je $x=0$, tada nizovi u (1) i (2) imaju istu graničnu vrednost; izvod postoji i jednak je nuli.

466. Za koje m i n funkcija

$$f(x)=|x|^n\sin\frac{1}{|x|^m}\ (x\neq 0),\quad f(0)=0\qquad (m>0)\,,$$

ima konačan izvod u nuli? Za koje vrednosti m i n je izvod ove funkcije ograničen u nekoj okolini nule?

Rezultat. Konačan izvod u nuli postoji ako je $n>1$. Izvod je ograničen u okolini nule ako je $n\geq m+1$.

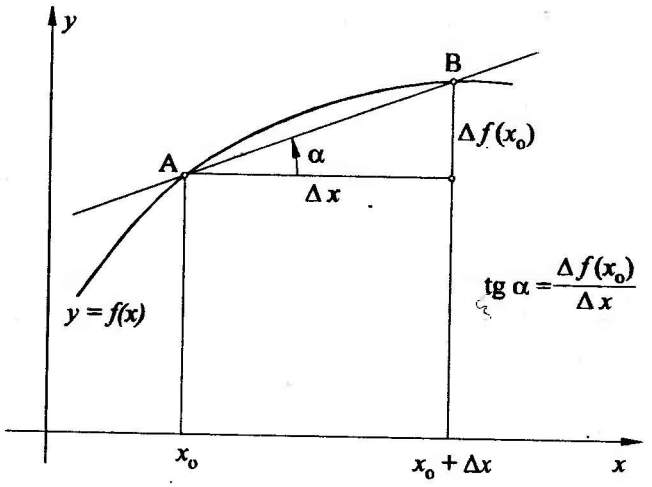
3.1.4 Geometrijska interpretacija izvoda

Neka je funkcija f neprekidna u tački x_0 i definisana u nekoj njenoj okolini.

Neka je, kao na slici 13, x_0 data tačka i Δx proizvoljna (obično mala) veličina koju nazivamo **priraštaj argumenta** *x. Kada se x promeni od x do $x+\Delta x$, funkcija f se promeni od $f(x)$ do $f(x+\Delta x)$; veličinu $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ nazivamo* **priraštaj funkcije** *f. Količnik $\Delta f(x_0)/\Delta x$ je jednak tangensu ugla koji sečica AB zaklapa sa x-osom. Ako postoji granična vrednost ove veličine kad $\Delta x \to 0$, ona je jednaka izvodu funkcije f u tački x_0:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

S druge strane, kada $\Delta x \to 0$, sečica AB postaje tangenta u tački $A(x_0, y_0)$. Ovo zapažanje dovodi do sledeće interpretacije izvoda:



Slika 13. *Kad $\Delta x \to 0$, sečica AB postaje tangenta u tački A.*

√ *Izvod funkcije $y = f(x)$ u tački (x_0, y_0) jednak je tangensu ugla koji tangenta u toj tački (orijentisana u pravcu u kome funkcija raste) zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose.*

U stvari, tangenta se striktno definiše pomoću izvoda:

- *Ako postoji konačan izvod $f'(x_0)$, tada pravu čija je jednačina*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (y_0 = f(x_0))$$

nazivamo **tangentom** *krive $y = f(x)$ u tački (x_0, y_0). Ako postoji izvod u (x_0, y_0), ali je beskonačan, tada je jednačina tangente data sa $x = x_0$. Ako ne postoji ni konačan ni beskonačan izvod, tada u posmatranoj tački kriva nema tangentu.*

Ovakva definicija tangente je u skladu sa intuitivnom predstavom o tangenti kao pravoj koja "dodiruje" krivu u datoj tački.

- *Ako postoji tangenta krive $y = f(x)$ u tački (x_0, y_0), prava koja je normalna na tangenti i sadrži tačku (x_0, y_0) naziva se* **normalom** *krive $y = f(x)$ u tački (x_0, y_0). Ako je izvod konačan i različit od nule, tada je jednačina normale data sa*

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

U slučaju da je izvod beskonačan, jednačina normale je $y = y_0$; u slučaju da je izvod jednak nuli, jednačina normale glasi $x = x_0$.

- *Ako su $y = f(x)$ i $y = g(x)$ dve krive koje se seku u tački čija je apscisa $x = x_0$, tada* **ugao između krivih** *f i g definišemo kao oštar ugao između njihovih tangenti u presečnoj tački (ako obe tangente postoje). Tangens ugla između krivih se nalazi po formuli*

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|.$$

- *Za krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ kažemo da se* **dodiruju** *u tački x_0 ako je $f(x_0) = g(x_0)$ i $f'(x_0) = g'(x_0)$, tj. ako u tački x_0 imaju zajedničku tangentu (odnosno, ako je ugao između ovih krivih jednak nuli).*

467. Naći jednačinu tangente i normale krive

$$y = (x-2)\sqrt[3]{x+1},$$

u tačkama M_1, M_2, M_3 čije su apscise $x_1 = 0$, $x_2 = -1/4$, $x_3 = -1$.

Rezultat. Jednačine tangente i normale su:

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{3} - 2, y = -3x - 2 \qquad & \text{u tački } M_1, \\ y = -9 \cdot \frac{\sqrt[3]{6}}{8}, x = -1/4 \qquad & \text{u tački } M_2, \\ x = -1, y = 0 \qquad & \text{u tački } M_3. \end{aligned}$$

468. Da li se parametri a i b mogu odrediti tako da kriva $y = x^3 + ax + b$ dodiruje x-osu?

Rešenje. Ako kriva dodiruje x-osu u tački x_0, tada je $y(x_0) = 0$ (uslov preseka) i $y'(x_0) = 0$ (uslov dodira), odakle je

$$\begin{aligned} x_0^3 + ax_0 + b = 0, \\ 3x_0^2 + a = 0. \end{aligned}$$

Eliminacijom x_0 iz dobijenih jednačina, nalazimo da je

$$a = -3\left(\frac{b}{2}\right)^{2/3}.$$

Prema tome, za svako a i b za koje važi ova jednakost, data kriva dodiruje x-osu.

469. Odrediti ugao između krivih $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

Rešenje. Date krive se seku u tački $x = 1$, u kojoj imaju izvode 2 i 1/2 respektivno. Ako je α oštar ugao između njihovih tangenti u tački preseka, tada je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 - 1/2}{2} = 3/4,$$

odakle je $\alpha = \operatorname{arctg}(3/4)$.

470. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $M(1/2, 2)$, dodiruje grafik funkcije $y = -x^2/2 + 2$ i seče grafik funkcije $y = \sqrt{4 - x^2}$ u dve različite tačke.

Rezultat. $y = -x + 5/2$

3.1.5 Diferencijal funkcije

Neka je data funkcija $x \mapsto f(x)$ koja u datoj tački x_0 ima konačan izvod $f'(x_0)$.

- *Za funkciju koja ima konačan izvod u tački x_0 kažemo da je* **diferencijabilna** *u toj tački.*
- *Za datu vrednost priraštaja Δx, definišemo* **diferencijal** *funkcije f u tački x_0, u oznaci $\mathrm{d}f(x_0)$, sa*

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Diferencijal u datoj tački je **linearna funkcija priraštaja argumenta** *Δx.*

√ *Kako je izvod funkcije $f(x) = x$ jednak 1, imamo da je $\mathrm{d}x \equiv \Delta x$. Odavde je $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.*

√ *Za izvod funkcije $f'(x)$ važi jednakost*

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

što se može shvatiti kao običan razlomak ili kao simbol koji označava operaciju diferenciranja.

√ *Za nalaženje diferencijala važe pravila analogna nalaženju izvoda. Na primer,*

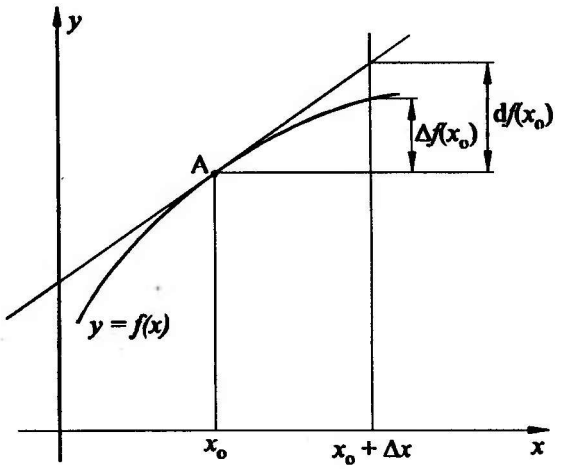
$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u\,, \quad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}\,.$$

Oblik formula ostaje isti bez obzira da li su u i v dve funkcije neke treće nezavisne promenljive, ili je $u = f(v)$, odnosno obrnuto. Ova osobina se naziva **invarijantnost diferencijala.**

√ *U tački u kojoj je funkcija diferencijabilna, njen priraštaj se može aproksimirati diferencijalom (videti sliku 14):*

$$\Delta f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0).$$

Značaj ove aproksimacije je u tome što se (u opštem slučaju nelinearna) funkcija Δf zamenjuje linearnom funkcijom $\mathrm{d}f$.



Slika 14. *Aproksimacija priraštaja diferencijalom.* $\mathrm{d}f(x_0)$ *je priraštaj ordinate tangente u tački A.*

471. Dokazati da je funkcija $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna u tački x_0 ako i samo ako postoji realna konstanta A tako da u nekoj okolini tačke x_0 važi

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)\,. \tag{1}$$

Ako ova jednakost važi za neko $A \in \mathbf{R}$, dokazati da je $A = f'(x_0)$.

Rešenje. Neka je f diferencijabilna funkcija u tački x_0. Tada postoji konačan izvod u tački x_0, i prema definiciji izvoda imamo da je

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,,$$

odnosno,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + o(1) \quad (\Delta x \to 0).$$

Množenjem obe strane ove jednakosti sa Δx, dobijamo (1) sa $A = f'(x_0)$.

Obrnuto, neka u nekoj okolini tačke x_0 važi (1). Deljenjem obe strane jednakosti (1) sa Δx, imamo da je

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1) \qquad (\Delta x \to 0),$$

odakle nalazimo da je

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A,$$

pa je funkcija f diferencijabilna u x_0. Ovim je istovremeno dokazano da je $A = f'(x_0)$.

472. Ako je $f(x) = x^{11}$, da li postoji diferencijal u tački $x = 10$? Ako postoji, odrediti brojnu vrednost diferencijala za $\mathrm{d}x = 10000$.

Rešenje. Data funkcija je diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$. Za $x = 10$ imamo da je $f'(10) = 11 \cdot 10^{10}$. Za $\mathrm{d}x = 10^4$ dobijamo da je

$$\mathrm{d}f(10) = f'(10)\,\mathrm{d}x = 11 \cdot 10^{14}.$$

Primedba. Česta je greška da se kaže da su $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}f$ beskonačno male veličine. Kao što je već rečeno, priraštaj $\Delta x = \mathrm{d}x$ može da ima proizvoljnu vrednost (koja je ograničena samo domenom funkcije), dok je, za fiksirano x, $\mathrm{d}f(x)$ linearna funkcija od $\mathrm{d}x$. Međutim, aproksimacija $\Delta f(x) \approx \mathrm{d}f(x)$ ima smisla samo za male vrednosti $\mathrm{d}x$.[1]

473. Neka su u, v, w diferencijabilne funkcije. Naći diferencijal proizvoda uvw, a zatim dobijeni rezultat primeniti na slučajeve: a) $v = v(u)$, $w = w(u)$, u– nezavisna promenljiva; b) $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$, x– nezavisna promenljiva; c) $u = u(x), v = v(x), w = w(x), x = x(t)$, t– nezavisna promenljiva.

Rešenje. Primenom pravila za nalaženje diferencijala imamo da je

$$\mathrm{d}(uvw) = vw\,\mathrm{d}u + uw\,\mathrm{d}v + uv\,\mathrm{d}w. \tag{1}$$

U slučaju a), kada su v i w funkcije nezavisno promenljive u, imamo da je $\mathrm{d}v = v'\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}w = w'\,\mathrm{d}u$, odakle je

$$\mathrm{d}uvw = (vw + uv' + uvw')\,\mathrm{d}u.$$

[1] Naravno, koliko mali $\mathrm{d}x$ treba da bude, zavisi od funkcije f

U slučaju b), sve tri promenljive zavise od x, pa je $du = u'\,dx$ i slično za v i w. Zamenom u (1) dobijamo

$$d(uvw) = (u'vw + uv'w + uvw')\,dx\,.$$

U slučaju c) imamo da je $du = u'(x)\,dx = u'(x)\dot{x}(t)\,dt$, gde je sa tačkom označen izvod po promenljivoj t. Ista formula važi i za v i w. Zamenom u (1) imamo

$$d(uvw) = (u'vw + uv'w + uvw')\dot{x}\,dt\,.$$

474. Ako su u i v diferencijabilne funkcije, izraziti diferencijale sledećih funkcija pomoću du i dv:

a) $\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, b) $\log\sqrt{u^2+v^2}$, c) u^v.

Rezultat. a) $\dfrac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}$, b) $\dfrac{u\,du + v\,dv}{u^2+v^2}$, c) $u^v\left(\log u\cdot dv + \dfrac{v\,du}{u}\right)$.

475. Ako je funkcija $y = f(x)$ zadata parametarskim jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$, gde su x i y diferencijabilne funkcije promenljive t, odrediti izvod $f'(x)$.

Rešenje. Iz $x = x(t)$, $y = y(t)$, nalaženjem diferencijala imamo

$$dx = \dot{x}\,dt\,, \quad dy = \dot{y}\,dt\,,$$

gde je sa tačkom označen izvod po parametru t. Iz prve jednakosti je $dt = dx/\dot{x}$; smenom u drugu jednakost dobijamo

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,.$$

476. Funkcija $y = f(x)$ je zadata parametarskim jednačinama:

$$x = 2t - t^2\,,\ y = 3t - t^3 \qquad (t > 1)\,.$$

Naći $y'(x)$.

Rešenje.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t)\,.$$

Iz jednakosti $x = 2t - t^2$, rešavanjem po $t > 1$ dobijamo $t = 1 + \sqrt{1-x}$, odakle je

$$y'(x) = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{1-x}\,.$$

Primedba. Ne može se uvek $f'(x)$ izraziti u obliku eksplicitne funkcije promenljive x, već se dobija izraz oblika $y'(t) = F(t)$ ili oblika $y'(x) = G(x,y)$.

477. Naći dy/dx ako je

a) $x = a\cos t, y = b\sin t$ $\quad [-\frac{b\cos t}{a\sin t}]$

b) $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$ $\quad [-1]$

c) $x = e^{2t}\cos^2 t, y = e^{2t}\sin^2 t$ $\quad [\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg}(t + \pi/4)]$

478. Ispitati da li funkcija $y = f(x)$ definisana parametarskim jednačinama

$$x = 2t + |t|, \qquad y = 5t^2 + 4t|t|,$$

ima izvod u $x = 0$.

Rešenje. U ovom slučaju ne može se primeniti postupak diferenciranja kao u prethodnim zadacima, jer funkcija $t \mapsto x(t)$ nije diferencijabilna za $t = 0$, tj za $x = 0$. Ali to ne znači da ni funkcija $y = y(x)$ nije diferencijabilna.

Kako je $x = 0$ samo za $t = 0$, imamo da je $f(0) = y(0) = 0$. Prema tome,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t(5t + 4|t|)}{2t + |t|} = 0.$$

479. Funkcija $y = f(x)$ je zadata implicitno jednačinom

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Naći $f'(x)$.

Rešenje. Nalaženjem diferencijala obe strane date jednakosti imamo

$$2x\,dx + 2y\,dx + 2x\,dy - 2y\,dy = 2\,dx.$$

Deljenjem obe strane dobijene jednakosti sa dx i sređivanjem, dobijamo

$$2x + 2y - 2 = 2(y - x)\frac{dy}{dx},$$

odakle je $f'(x) = dy/dx = (x + y - 1)/(y - x)$.

480. Naći dy/dx ako je

a) $y^2 = 2px$ $\quad [\frac{p}{y}]$

b) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ $\quad [-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x-\alpha}{y-\beta}]$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $\quad [-\sqrt{\frac{y}{x}}]$

d) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad [\frac{x+y}{x-y}]$

481. Dokazati da je jednačinom

$$y^3 + 3y = x$$

definisana jedna funkcija $y = f(x)$ i naći njen izvod.

Rešenje. Kako su funkcije $y \mapsto y^3$ i $y \mapsto 3y$ monotono rastuće i neprekidne na $\mathbf{R}$, takav je i njihov zbir. Stoga postoji inverzna funkcija, definisana na $\mathbf{R}$ (videti 2.6.2), tj. data jednačina za svako $x \in \mathbf{R}$ ima jedinstveno rešenje. Izvod nalazimo diferenciranjem:

$$3y^2\,\mathrm{d}y + 3\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3(1+y^2)}.$$

482. Dokazati da za svako fiksno $a \in [0,1)$ i za svako $x \in \mathbf{R}$ jednačina po y

$$y - a\sin y = x$$

ima jedinstveno rešenje $y = f(x)$, a zatim odrediti $f'(x)$.

Rešenje. Da jednačina ima jedinstveno rešenje može se dokazati primenom BANACHovog stava (videti zadatak 1219).

Diferenciranjem date jednakosti imamo

$$\mathrm{d}y - a\cos y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1 - a\cos y}.$$

483. Naći $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ako je funkcija $y = f(x)$ zadata u polarnim koordinatama sa $r = a\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$ (ARHIMEDova spirala).

Rešenje. Diferenciranjem jednakosti $r = a\varphi$ dobijamo

$$\mathrm{d}r = a\,\mathrm{d}\varphi. \tag{1}$$

Kako je[1]

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2},$$

zamenom u (1) nalazimo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ay + x\sqrt{x^2+y^2}}{ax - y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

[1] Primetimo da iako $\varphi \neq \operatorname{arctg} y/x$, kao što je pokazano u zadatku 127, ipak je $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}(\operatorname{arctg} y/x)$.

484. Neka je data kriva u polarnim koordinatama pomoću jednačine $r = r(\varphi)$. Ako je ovom jednačinom određena jedna funkcija $y = f(x)$, naći $f'(x)$ u tački $M(x_0, y_0)$.

$$\left[\frac{y_0\dot{r}/r + x_0}{x_0\dot{r}/r - y_0} \right]$$

485. Dokazati da se familije hiperbola $x^2 - y^2 = a$ i $xy = b$ seku pod pravim uglom.

486. Neka je kriva (astroida) zadata pomoću jednačine

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Dokazati da je dužina odsečka tangente ove krive između koordinatnih osa konstantna.

487. Naći jednačine tangente i normale krive date parametarskim jednačinama:

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^2},$$

u tački $t = 0$.

$$[\, y = x,\ y = -x \,]$$

488. Napisati jednačine tangente i normale krive $xy + \log y = 1$ u tački $A(1, 1)$.

$$[\, x + 2y - 3 = 0,\ 2x - y - 1 = 0 \,]$$

489. Primenom aproksimacije $\Delta f \approx \mathrm{d}f$, izračunati približnu vrednost $\sqrt[3]{28}$.

Rešenje. Neka je $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Tada je $\mathrm{d}f(x_0) = (1/3)x_0^{-2/3}\Delta x$. Ako stavimo $x_0 = 27$, $\Delta x = 1$, imamo da je $\mathrm{d}f(x_0) = 1/27$. Iz približne formule $\Delta f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)$ dobijamo

$$\sqrt[3]{27 + 1} - \sqrt[3]{27} \approx \frac{1}{27}.$$

Odavde je $\sqrt[3]{28} \approx 3 + 1/27 \approx 3.0370$. Tačna vrednost na četiri decimale je 3.0366.

490. Izračunati približnu vrednost $\sin 29°$.

Uputstvo. Uzeti $f(x) = \sin x$, $x_0 = 30° = 30\pi/180$, $\Delta x = 1° = \pi/180$. Kod trigonometrijskih funkcija, sve izvedene formule važe samo ako su argumenti izraženi u radijanima.

491. Ako je relativna greška[1] određivanja veličine u jednaka r_1 i ako je relativna greška veličine v jednaka r_2, tada se uzima da je relativna greška određivanja

[1] Relativna greška se definiše kao količnik greške i tačne vrednosti.

proizvoda uv jednaka $r_1 + r_2$. Obrazložiti sa gledišta aproksimacije priraštaja diferencijalom.

Rešenje. Neka su tačne vrednosti jednake u, v i neka su greške Δu, Δv. Tada je

$$\frac{\Delta u}{u} = r_1\,, \quad \frac{\Delta v}{v} = r_2\,.$$

Relativna greška proizvoda je $(\Delta uv)/(uv)$. Ako se priraštaj zameni diferencijalom, dobija se

$$\frac{\Delta uv}{uv} \approx \frac{\mathrm{d}(uv)}{uv} = \frac{v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v}{uv} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}v}{v} \approx \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} = r_1 + r_2.$$

O BROJU π

Da je odnos obima kruga i njegovog prečnika konstantan, naslućivalo se još u pradavna vremena. U Bibliji se procenjuje da je $\pi \approx 3$. Najstariji sačuvani zapis u kome se pominje broj π je jedan papirus otkriven 1858. godine, za koga se smatra da potiče iz 1650. godine pre naše ere. U ovom papirusu se navodi da je $\pi \approx 3.16$. Arhimed je dokazao da je $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. U petom veku, Kinezi su znali da je $\pi \approx \frac{355}{113}$.
EULERova formula $e^{i\pi} + 1 = 0$ daje vezu između četiri najvažnije konstante u matematici. Pošto je 1873. godine HERMITE dokazao da je broj e transcendentan, ova formula je omogućila LINDEMANNu da 1882. godine dokaže transcendentnost broja π. Tako je stavljena tačka na stari problem kvadrature kruga, koji se pokazao nerešivim. Jer, ako je broj π transcendentan, tada se njegova vrednost ne može dobiti konstrukcijom pomoću lenjira i šestara, pa se zato ne može konstruisati kvadrat čija bi površina bila jednaka površini datog kruga.
Navodimo vrednost broja π na 540 decimala:

$\pi \approx 3.1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510\ 5820974944$
$5923078164\ 0628620899\ 8628034825\ 3421170679\ 8214808651\ 3282306647$
$0938446095\ 5058223172\ 5359408128\ 4811174502\ 8410270193\ 8521105559$
$6446229489\ 5493038196\ 4428810975\ 6659334461\ 2847564823\ 3786783165$
$2712019091\ 4564856692\ 3460348610\ 4543266482\ 1339360726\ 0249141273$
$7245870066\ 0631558817\ 4881520920\ 9628292540\ 9171536436\ 7892590360$
$0113305305\ 4882046652\ 1384146951\ 9415116094\ 3305727036\ 5759591953$
$0921861173\ 8193261179\ 3105118548\ 0744623799\ 6274956735\ 1885752724$
$8912279381\ 8301194912\ 9833673362\ 4406566430\ 8602139494\ 6395224737$

Nekoliko načina za približno izračunavanje broja π dato je u zadacima 1557 – 1561.

3.2 Teoreme o srednjoj vrednosti u diferencijalnom računu i njihove primene

3.2.1 Teoreme o srednjoj vrednosti

✓ **Rolleova teorema.** *Neka je funkcija f definisana na $[a,b]$ $(a<b)$, pri čemu važi:*

f je neprekidna na $[a,b]$,
f ima izvod (konačan ili beskonačan) na (a,b),
$f(a)=f(b)$.

Tada postoji $c\in(a,b)$ tako da je $f'(c)=0$.

✓ **Lagrangeova teorema.** *Neka je f funkcija definisana na $[a,b]$, $(a<b)$ i neka važi:*

f je neprekidna na $[a,b]$,
f ima izvod na (a,b).

Tada postoji $c\in(a,b)$ tako da je $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

✓ **Cauchyjeva teorema.** *Neka su f i g funkcije definisane na $[a,b]$ $(a<b)$ i neka važi:*

f i g su neprekidne na $[a,b]$,
f i g imaju izvode na (a,b),
$g'(x)\neq 0$ za $x\in(a,b)$.

Tada postoji $c\in(a,b)$ tako da je $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Realan broj c koji se pojavljuje u navedenim teoremama piše se i u obliku

$$c=a+\theta(b-a),\quad \text{za neko } \theta\in(0,1).$$

492. Za funkciju $f(x)=|x|$ važi $f(-1)=f(1)=0$, ali ne postoji tačka $c\in(-1,1)$ takva da je $f'(c)=0$. Koji uslov ROLLEove teoreme nije ispunjen?

493. Da li se može primeniti ROLLEova teorema na funkciju $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ na intervalu $(-1,1)$?

494. **Generalisana Rolleova teorema.** Neka funkcija f ima izvod u svakoj tački konačnog ili beskonačnog intervala (a,b) i neka je

$$\lim_{x\to a_+} f(x)=\lim_{x\to b_-} f(x)=L\in\mathbf{R}.$$

Dokazati da postoji tačka $c \in (a,b)$ tako da je $f'(c) = 0$.

Rešenje. U slučaju konačnog intervala (a,b), posmatrajmo funkciju f^* definisanu pomoću

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, x \neq b \\ L & x = a \text{ ili } x = b. \end{cases}$$

Izvodi funkcija f i f^* su jednaki u svim tačkama intervala (a,b). Funkcija f^* zadovoljava uslove ROLLEove teoreme na (a,b), što znači da postoji $c \in (a,b)$ tako da je $f^{*\prime}(c) = f'(c) = 0$.

Neka je sada interval (a,b) beskonačan, na primer $(-\infty, +\infty)$. Posmatrajmo funkciju $y \mapsto F(y)$ definisanu na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ pomoću ♣

$$F(y) = f(\operatorname{tg} y).$$

Kako je

$$\lim_{y \to -\pi/2} F(y) = \lim_{y \to \pi/2} F(y) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L,$$

na osnovu dokazanog u prvom slučaju (konačan interval), postoji neka tačka $C \in (-\pi/2, \pi/2)$ u kojoj je $F'(C) = 0$. Kako je

$$F'(C) = f'(\operatorname{tg} C) \cdot \frac{1}{\cos^2 C},$$

iz $F'(C) = 0$ sledi da je $f'(\operatorname{tg} C) = 0$, tj. $f'(c) = 0$ za $c = \operatorname{tg} C$.

Dokaz je analogan za slučaj kada je interval oblika $(a, +\infty)$ ili $(-\infty, b)$.

Primedba. Umesto funkcije $y \mapsto \operatorname{tg} y$ može se uzeti i proizvoljna monotona funkcija koja preslikava konačan interval u $(-\infty, +\infty)$.

495. **Generalisana Cauchyjeva teorema.** Neka su funkcije f i g neprekidne na $[a, +\infty)$ i imaju izvode na $(a, +\infty)$, pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, +\infty)$. Neka je, dalje,

$$f(\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \neq \pm\infty, \quad g(\infty) = \lim_{x \to +\infty} g(x) \neq pm\infty.$$

Dokazati da postoji tačka $c \in (a, +\infty)$ tako da je

$$\frac{f(\infty) - f(a)}{g(\infty) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Rešenje. Neka je ♣

$$F(x) = \big(f(\infty) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(\infty) - g(a)\big).$$

Tada je $F(a) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$. Ako primenimo generalisanu ROLLEovu teoremu iz zadatka 494 na funkciju F i na intervalu $(a, +\infty)$, zaključujemo da postoji $c \in (a, +\infty)$ tako da je

$$F'(c) = \big(f(\infty) - f(a)\big)g'(c) - f'(c)\big(g(\infty) - g(a)\big) = 0,$$

odakle, deljenjem sa $g(\infty) - g(a)$ sledi traženo tvrđenje.

Uslov da je $g'(x) \neq 0$ na $(a, +\infty)$ obezbeđuje da je $g(\infty) - g(a) \neq 0$. Naime, na osnovu zadatka 494 jednakost $g(\infty) = g(a)$ je dovoljan uslov da postoji jedna tačka na $(a, +\infty)$ u kojoj je izvod jednak nuli.

496. Formulisati i dokazati rezultat koji je analogan zadátku 495 za slučaj kada funkcije f i g nisu obavezno neprekidne na krajevima a i b konačnog ili beskonačnog intervala (a, b).

497. Ako je funkcija f diferencijabilna, ali nije ograničena na konačnom intervalu $[a, b)$ $(a < b)$, tada njen izvod takođe nije ograničen na $[a, b)$. Dokazati. Da li tvrđenje važi ako je interval beskonačan?

Rešenje. Pretpostavimo da skup vrednosti funkcije f nije ograničen sa gornje strane. To znači da za svaki dati (proizvoljno veliki) realan broj K, postoji tačka u (a, b) u kojoj je vrednost funkcije veća od K.

Neka je $K_n = n(b-a) + f(a)$, i neka je x_n tačka u (a, b) takva da je $f(x_n) > K_n$. Primenom LAGRANGEove teoreme na intervalu $[a, x_n]$ zaključujemo da postoji tačka $\xi_n \in [a, x_n]$ takva da je

$$f'(\xi_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} > \frac{n(b-a) + f(a) - f(a)}{b-a} = n\,.$$

Ako pustimo da $n \to +\infty$, dobijamo niz tačaka ξ_n u intervalu (a, b) takvih da $f'(\xi_n) \to +\infty$, odakle sledi da izvod nije ograničen.

Na beskonačnom intervalu ovo tvrđenje ne važi. Na primer, funkcija $f(x) = x$ je diferencijabilna i neograničena na $\mathbf{R}$, ali je njen izvod ograničen.

3.2.2 Prekidi izvoda

✓ *Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i ima izvod na intervalu (a, b) za neko $b > a$, i ako postoji*

$$\lim_{x \to a_+} f'(x) = D \qquad (-\infty \leq D \leq +\infty)\,,$$

tada postoji i desni izvod funkcije f u tački a i važi jednakost

$$f'_+(a) = D\,.$$

Analogno tvrđenje važi i za levi izvod.

✓ *Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a - h, a + h]$, i ima izvode u svim tačkama iz skupa $[a - h, a) \cup (a, a + h]$, pri čemu postoji (konačan ili beskonačan)*

$$\lim_{x \to a} f'(x) = D\,,$$

***tada** u tački a takođe postoji izvod i jednak je D.*

Dokazi ovih tvrđenja izvode se primenom LAGRANGEove *teoreme. Naime, iz*

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = f'(a+\theta\Delta x) \qquad (0<\theta<1)$$

sleduje da ako postoji $\lim_{x\to a} f'(x)$, *tada postoji i granična vrednost sa leve strane i te dve granične vrednosti su jednake.*

Ovakav način određivanja izvoda je od pomoći u slučajevima kada imamo funkciju definisanu sa dva analitička izraza. Umesto nalaženja izvoda po definiciji, može da se nađe granična vrednost izvoda. Međutim, ukoliko granična vrednost izvoda ne postoji, to ne znači da izvod ne postoji (videti primer u zadatku 500).

Na osnovu ovih rezultata zaključujemo da

√ *Funkcija* $x \mapsto f'(x)$ *može imati prekide samo druge vrste.*

498. Ispitati neprekidnost izvoda u $x = 0$ funkcija definisanih sa

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \log(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$$

Rešenje. **a)** Za $x \neq 0$ imamo da je

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}\,.$$

Kad $x \to 0$, granične vrednosti izvoda nalazimo na sledeći način:

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) = \lim_{t\to+\infty} -t^2e^{-t} = 0 \quad (t=-1/x)\,, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{t\to+\infty} -t^2e^{t} = -\infty \quad (t=1/x)\,. \tag{2}$$

Funkcija f je neprekidna sleva u tački $x = 0$, pa iz (1) imamo da je $f'_-(0) = 0$.
Desni izvod tražimo po definiciji:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{e^{1/h}}{h} = +\infty.$$

Ovde je $\lim_{h\to 0_+} f'(x) \neq f'_+(0)$, jer funkcija f nije neprekidna zdesna u nuli.

b) Funkcija g je neprekidna u nuli (sa obe strane). Za $x \neq 0$ izvod funkcije g je

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

Kako je

$$\lim_{x\to 0_-} g'(x) = \lim_{x\to 0_+} g'(x) = 1,$$

zaključujemo da je $g'(0) = 1$. Prema tome, funkcija $x \mapsto g'(x)$ je neprekidna na $\mathbf{R}$.

499. Pokazati da za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1), \qquad f(1) = 0$$

postoji konačna granična vrednost $\lim_{x\to 1} f'(x)$, ali da funkcija f nema konačne izvode $f'_-(1)$ ni $f'_+(1)$. Objasniti.

500. Neka je fukcija f definisana sa

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \ (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

Pokazati da postoji $f'(0)$, a da ne postoji granična vrednost $f'(x)$ kad $x \to 0$. Objasniti zašto *ovo* nije u suprotnosti sa LAGRANGEovom teoremom.

Rešenje. Za $x \neq 0$ izvod nalazimo na uobičajen način:

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Lako je videti da $f'(x)$ nema graničnu vrednost kad $x \to 0$ (zbog drugog sabirka). Međutim,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Dakle, funkcija $x \mapsto f'(x)$ ima u nuli prekid druge vrste.

Iz LAGRANGEove teoreme sleduje da je

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\theta x). \tag{1}$$

Ako se u (1) pusti da $x \to 0$, dobiće se

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(\theta x). \tag{2}$$

Kako je $f'(0) = 0$, iz (2) zaključujemo da je $\lim_{x\to 0} f'(\theta x) = 0$.

Ovo ne protivreči činjenici da granična vrednost izvoda kad $x \to 0$ ne postoji. Naime, θ nije konstanta, već zavisi od x, tako da, u opštem slučaju može da se dogodi da postoji $\lim_{x\to 0} f'(\theta x)$, ali da ne postoji $\lim_{x\to 0} f'(x)$.

Videti i zadatak 1293.

3.2.3 Uniformna nepekidnost funkcija

501. Neka je I proizvoljan interval (konačan ili beskonačan, zatvoren ili otvoren). Neka je funkcija f definisana i diferencijabilna u svakoj tački intervala I i neka je

$$\sup_{x\in I}|f'(x)| = M < \infty\,.$$

Dokazati da je f uniformno neprekidna funkcija na I.

Rešenje. Neka su x, y dve proizvoljne tačke iz intervala I. Primenom LAGRANGEove teoreme imamo

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\cdot|x-y| \le M|x-y| \qquad (\xi\in I). \tag{1}$$

Neka su x_n, y_n dva proizvoljna niza iz I takva da je $\lim(x_n - y_n) = 0$. Tada iz (1) sledi da je $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$, pa je f uniformno neprekidna.

502. Ispitati uniformnu neprekidnost funkcije $f(x) = \sqrt{x}\log x$ na intervalu $[1,\infty)$.

Rešenje. Funkcija $x \mapsto f'(x) = \dfrac{\log x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $[1,\infty)$ pozitivna i opadajuća. Prema tome, $0 < f'(x) < f'(1) = 1$. Na osnovu zadatka 501, funkcija f je uniformno neprekidna na datom intervalu.

503. Dokazati da su sledeće funkcije uniformno neprekidne na naznačenim intervalima:

b) $\sqrt{x}$ na $(1,+\infty)$, c) $\operatorname{arctg} x$ na $(-\infty,+\infty)$.

3.2.4 Kontrakcija i Lagrangeova teorema

√ *Neka je A interval (konačan ili beskonačan, otvoren ili zatvoren) i neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna na A, pri čemu je*

$$\sup_{x\in A}|f'(x)| < 1\,.$$

Ako je, pored toga, $f(A) \subset A$, tada je f kontrakcija na skupu A.

Dokaz navedenog tvrđenja izvodi se pomoću LAGRANGEove *teoreme. Naime, za svake dve tačke $x, y \in A$, $x \lesssim y$, ispunjeni su uslovi* LAGRANGEove *teoreme za funkciju f na intervalu $[x,y]$, pa je*

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)(x-y)| \le q|x-y| \qquad (q = \sup_{x\in A}|f'(x)| < 1)\,,$$

što znači da je f kontrakcija na A (videti definiciju u 2.4.3).

504. Primenom BANACHovog stava ispitati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza datog sa

$$x_0 > 0\ ;\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots\ ; a \geq 0)$$

Rešenje. Ovaj zadatak smo već rešili primenom teoreme o ograničenom i monotonom nizu (videti zadatak 251). Primenom BANACHovog stava i LAGRANGEove teoreme dobija se nešto jednostavnije rešenje.

Neka je $f(x) = (x + a/x)/2$; $f'(x) = (1 - a/x^2)/2$. Za $x \geq \sqrt{a}$ imamo da je $a/x^2 \leq a/a = 1$, pa je $f'(x) \geq 0$. S druge strane je $1 - a/x^2 \leq 1$, pa je $f'(x) \leq 1/2$. Skup $[\sqrt{a}, +\infty)$ preslikava se u samog sebe jer je za $x \geq \sqrt{a} \geq 0$:

$$f(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - \sqrt{a} = \frac{x^2 + a - 2x\sqrt{a}}{2x} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x} \geq 0,$$

odakle je $f(x) \geq \sqrt{a}$.

Prema tome, f je kontrakcija na kompletnom skupu $[\sqrt{a}, +\infty)$, pa dati niz ima graničnu vrednost koja se dobija kao rešenje jednačine $x = f(x)$. Jedino pozitivno rešenje ove jednačine je $x = \sqrt{a}$ i to je granična vrednost datog niza.

505. Niz $\{x_n\}$ dat je sa

$$x_1 = c > 0\ ;\ x_{n+1} = \frac{6 + 6x_n}{7 + x_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ispitati konvergenciju datog niza i odrediti njegovu graničnu vrednost, ako postoji.

Rešenje. Neka je $f(x) = 6(1 + x)/(7 + x)$. Tada je , za $n \geq 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Očigledno f preslikava $[0, +\infty)$ u $[0, +\infty)$. Pored toga, za $x \geq 0$ imamo:

$$f'(x) = \frac{36}{(7 + x)^2} \leq \frac{36}{49} < 1\ ,$$

pa je f kontrakcija na skupu $[0, +\infty)$. Kako je ovaj skup kompletan, niz x_n je konvergentan i njegova granična vrednost je nepokretna tačka funkcije f na $[0, +\infty)$. Kako je

$$x = f(x) \iff x = 6\frac{1 + x}{7 + x} \iff x = -3 \text{ ili } x = 2\ ,$$

zaključujemo da je granična vrednost niza jednaka 2.

Ispitati da li je neophodno da bude $x_1 > 0$ da bi niz imao graničnu vrednost 2. Koje sve vrednosti može da uzima x_1 da bi niz x_n imao graničnu vrednost 2 ?

Primedba. Zadatak se može rešiti i bez primene LAGRANGEove teoreme, ako se uoči da je za $x, y \geq 0$:

$$|f(x) - f(y)| = 36\frac{|x - y|}{(7 + x)(7 + y)} \leq \frac{36}{49}|x - y|\ ,$$

odakle sledi da je f kontrakcija na $[0, +\infty)$.

506. Dat je niz

$$x_1 = a > 0\ ,\ x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{2x_n + 3}\ ,\quad n = 1, 2, \ldots$$

Pokazati da je niz konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Neka je $f(x) = (x+4)/(2x+3)$. Tada je $f'(x) = -5/(2x+3)^2$, tako da za svako $x \geq 0$ važi

$$|f'(x)| \leq \frac{5}{9} < 1\ .$$

Pored toga, za $x \geq 0$ je očigledno i $f(x) > 0$, što znači da je f kontrakcija na skupu $[0, +\infty)$. Jednačina $x = (x+4)/(2x+3)$ ima dva rešenja: 1 i -2, od kojih je prvo u posmatranom intervalu. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

3.2.5 L'Hospitalovo pravilo

√ *Neka su f i g date funkcije, diferencijabilne u nekoj okolini tačke a (sem eventualno u samoj tački a), gde je $a \in \mathbf{R}_p$. Neka je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \textit{ili} \quad \pm\infty$$

i neka je $g'(x) \neq 0$ u nekoj okolini tačke a. Tada je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$

ako postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost sa desne strane ove jednakosti.

Direktnom primenom ovog pravila nalaze se granične vrednosti tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, svođenjem na granične vrednosti količnika izvoda.

U slučaju neodređenosti tipa $0 \cdot \infty$ i $\infty - \infty$, treba najpre algebarski transformisati datu funkciju da se dobije oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, pa zatim na ovaj oblik primeniti L'HOSPITALovo *pravilo.*

U slučaju neodređenosti tipa 0^0, ∞^0 ili 1^∞, datu funkciju treba logaritmovati, čime dobijamo jedan od već pomenutih slučajeva.

507. Dokazati L'HOSPITALovo pravilo za slučaj granične vrednosti tipa $0/0$.

Rešenje. Neka su f i g diferencijabilne funkcije u nekoj okolini tačke $a \in \mathbf{R}$, i neka obe funkcije teže nuli kada $x \to a$. Funkcije f i g ne moraju biti neprekidne u tački a, ali su neprekidne funkcije f^* i g^*, definisane pomoću

$$f^*(x) = f(x)\ ,\quad g^*(x) = g(x)\quad (x \neq a)\ ,\qquad f^*(a) = g^*(a) = 0.$$

Pri tome, na osnovu CAUCHYjeve teoreme, za $x \neq a$ važi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^*(x)}{g^*(x)} = \frac{f^*(x) - f^*(a)}{g^*(x) - g^*(x)} = \frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))},$$

za neko $\theta \in (0,1)$. Ako postoji granična vrednost količnika $f'(x)/g'(x)$ kad $x \to a$, tada je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

čime je dokazano L'HOSPITALovo pravilo za slučaj konačnog a. Ako je $a = \pm\infty$, dokaz se izvodi primenom generalisane CAUCHYjeve teoreme iz zadatka 495.

508. Dokazati L'HOSPITALovo pravilo za slučaj granične vrednosti tipa ∞/∞.

509. Da li se može primeniti L'HOSPITALovo pravilo na nalaženje granične vrednosti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \ ?$$

Rešenje. Formalnom primenom L'HOSPITALovog pravila dobili bismo da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \cos x .$$

Kako granična vrednost na desnoj strani ne postoji, odavde ne možemo ništa da zaključimo o traženoj graničnoj vrednosti. U stvari, nije teško videti da je ona jednaka nuli.

510. Ako se na izračunavanje granične vrednosti

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x}$$

formalno primeni L'HOSPITALovo pravilo, dobiće se

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{1} = +\infty .$$

Međutim, kako je $\log x < 0$ za $x < 1$, ovaj rezultat nije tačan. Objasniti.

511. Funkcija $x \mapsto x \log x$ je neprekidna u $x = 1$ pa je $\lim_{x\to 1} x \log x = 1 \cdot \log 1 = 0$. S druge strane,

$$\lim_{x\to 1} x \log x = \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 1} \frac{(\log x)'}{(1/x)'}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-1/x^2} = -1 .$$

Odavde se dobija da je $0 = -1$. Objasniti.

512. Dokazati da je, za $a > 0$,

$$\lim_{x\to 0_+} x^a \log x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0\,.$$

Rešenje. Primenom L'HOSPITALovog pravila imamo

$$\lim_{x\to 0_+} x^a \log x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x^{-a}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^{-1}}{-ax^{-a-1}}$$
$$= -a \lim_{x\to 0_+} \frac{x^a}{-a} = 0\,.$$

Druga granična vrednost se nalazi na sličan način:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ax^a} = 0\,.$$

513. Dokazati da je, za $a > 0$ i $b \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^a} \log x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^b e^{-x^a} = 0\,.$$

Rešenje. Prva jednakost se lako dokazuje:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^a} \log x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^{x^a}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{ax^{a-1}e^{x^a}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ax^a e^{x^a}} = 0\,.$$

Druga jednakost je očigledno tačna za $b \le 0$. Dokažimo da ona važi za $a = 1$ i za proizvoljno $b > 0$:

$$L = \lim_{x\to+\infty} x^b e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx^{b-1}}{e^x}\,.$$

Ako je $0 < b \le 1$, tada iz poslednje jednakosti dobijamo da je $L = 0$. Ako je $1 < b \le 2$, još jednom primenom L'HOSPITALovog pravila nalazimo

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{b(b-1)x^{b-2}}{e^x} = 0\,.$$

Ako je $2 < b \le 3$, tada ćemo posle još jedne primene L'HOSPITALovog pravila dobiti $L = 0$. U opštem slučaju, ako je $n-1 < b \le n$, tada iz n primena L'HOSPITALovog pravila nalazimo $L = 0$, čime je dokazano da je $L = 0$ za svako $b > 0$.

Konačno, neka je $a > 0$ i $b > 0$. Tada je

$$L = \lim_{x\to+\infty} x^b e^{-x^a} = \lim_{x\to+\infty} (x^a)^{b/a} e^{-x^a}$$
$$= \lim_{t\to+\infty} t^{b/a} e^{-t} \qquad (\text{smena } x^a = t)$$
$$= 0 \qquad \text{na osnovu prethodnog slučaja.}$$

514. Dokazati da je, za $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)e^{-x^a} = 0,$$

gde je $P(x)$ polinom proizvoljnog stepena.

515. Naći $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+xe^x)}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}$.

Rešenje. Data granična vrednost je očigledno tipa 0/0. Primenom L'HOSPITALovog pravila nalazimo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+xe^x}(xe^x+e^x)}{\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)} = 1\,.$$

516. Naći $L = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Rešenje. Dati izraz je tipa $\infty-\infty$. Dovođenjem na zajednički imenilac dobijamo izraz tipa 0/0, na koji primenjujemo L'HOSPITALovo pravilo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x} \qquad (0/0)\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1-1/x}{\log x + 1 - 1/x} \qquad (0/0)\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1/x^2}{1/x + 1/x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

517. Naći $L = \lim_{x\to 0_+} x^x$

Rešenje. Data granična vrednost je tipa 0^0. Logaritmovanjem nalazimo

$$\log L = \lim_{x\to 0_+} x\log x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0,$$

odakle je $L = 1$.

518. Naći $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Rešenje. Dati izraz je tipa 1^∞. Logaritmovanjem dobijamo izraz tipa 0/0 na koji možemo da primenimo L'HOSPITALovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x)/\cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{-2x\sin x + 2\cos x}$$
$$= -\frac{1}{2}.$$

Odavde je tražena granična vrednost jednaka $e^{-1/2}$.

519. Naći $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{x^x-1}$.

Rešenje. Neka je $f(x) = x^{x^x-1}$. Tada je

$$L = \lim_{x\to 0_+} \log f(x) = \lim_{x\to 0_+} (x^x - 1)\log x = \lim_{x\to 0_+} \left(e^{x\log x} - 1\right)\log x$$
$$= \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} \cdot x\log^2 x.$$

Primenom L'HOSPITALovog pravila, dobijamo da je ♣

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u}{1} = 1 \quad (u = x\log x),$$

$$\lim_{x\to 0_+} x\log^2 x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} 2x\log x = 0,$$

pa zaključujemo da je $L = 0$, odnosno da je tražena granična vrednost jednaka 1.

Rešenje zadatka dao je mr Nenad Cakić.

520. Naći granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 0_+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\log\frac{1}{x}\right)^x$.

Rezultat. a) $e^{-1/2}$, b) e^{-1}, c) 1, d) 1.

►► 3.4.4 , ►► 8.2.1

3.3 Izvodi i diferencijali višeg reda

3.3.1 Izvod reda n

Neka je $f(x)$ data funkcija koja na nekom intervalu (a,b) ima izvod f'. Izvodi višeg reda definišu se induktivno na sledeći način:

- *Izvod drugog reda (drugi izvod) $f''(x)$ je izvod funkcije $x \mapsto f'(x)$*

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x}.$$

- *Ako je određen izvod reda $n-1$ u oznaci $f^{(n-1)}$, tada se izvod reda n definiše kao izvod funkcije $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$:*

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}f^{(n-1)}(x)}{\mathrm{d}x}.$$

- *Izvod reda nula, $f^{(0)}(x)$ je po definiciji jednak funkciji $f(x)$:*

$$f^{(0)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

- *Za funkciju koja ima konačan n-ti izvod u tački x kažemo da je u toj tački n puta diferencijabilna.*

Za prva četiri izvoda obično koristimo oznake $f', f'', f''', f^{(iv)}$ respektivno, dok izvode višeg reda označavamo sa $f^{(n)}$. Takođe se koristi oznaka $\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$ (videti 3.3.3). Ponekad ćemo koristiti i oznaku $\mathrm{D}^n f(x)$ za n-ti izvod funkcije f.
Domen funkcije $x \mapsto f^{(n)}(x)$ je podskup domena funkcije $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$. Prema tome, ako postoji izvod $f^{(n-1)}(x)$ u datoj tački, tada u toj tački može, ali ne mora postojati izvod $f^{(n)}(x)$.

521. Naći drugi izvod funkcija:
a) $\sqrt{1+x^2}$, b) $x(1+x)^{1/3}$, c) e^{x^2}, d) $\sin\log x$.

Rezultat. a) $(1+x^2)^{-3/2}$, b) $\frac{2(2x+3)}{9(1+x)^{5/3}}$, c) $e^{x^2}(4x^2+2)$,
d) $-\frac{\cos\log x + \sin\log x}{x^2}$.

522. Ispitati za koje $x \in \mathbf{R}$ važi

$$(\operatorname{tg} x)'' - 2\operatorname{tg} x + 2(\operatorname{tg} x)^3 = 0.$$

523. Neka su $x \mapsto u(x)$ i $x \mapsto v(x)$ dva puta diferencijabilne funkcije promenljive x. Naći drugi izvod sledećih funkcija:

a) u^k $\quad [\, k(k-1)u^{k-2}(u')^2 + ku^{k-1}u'' \,]$

b) $\sqrt{u^2+v^2}$ $\quad \left[\, \dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} \,\right]$

c) $\log \dfrac{u}{v}$ $\quad \left[\, \dfrac{uu''-(u')^2}{u^2} - \dfrac{vv''-(v')^2}{v^2} \,\right]$

524. Dokazati: Ako postoji $f''(x_0)$, tada je

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

Rešenje. Granična vrednost na desnoj strani date jednakosti je tipa 0/0. Primenom L'HOSPITALovog pravila, nalazimo (traženjem izvoda po h):

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2}(f''(x_0)+f''(x_0)) = f''(x_0).\end{aligned}$$

Primedba. Videti zadatak 1282 za generalizaciju.

525. Dokazati: Ako je $f''(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$, tada je $f(x) = \alpha x + \beta$, za neko $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i za svako $x \in (a,b)$.

Rešenje. Iz pretpostavke da je $f''(x) = 0$ za $x \in (a,b)$, primenom LAGRANGEove teoreme na funkciju $f'(x)$ na intervalu $(x,y) \subset (a,b)$, dobijamo

$$\frac{f'(x)-f'(y)}{x-y} = 0,$$

odakle sledi da je za svako $x \in (a,b)$, $f'(x) = \text{const} = \alpha$. Dalje je, takođe primenom LAGRANGEove teoreme,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \alpha,$$

tj. $f(x) = \alpha(x-y)+f(y)$, gde su x, y proizvoljni realni brojevi u (a,b). Ako fiksiramo neko $y = c \in (a,b)$ i stavimo $f(c) - \alpha c = \beta$, dobijamo

$$f(x) = \alpha x + f(c) - \alpha c = \alpha x + \beta,$$

što je i trebalo dokazati.

Primedba. U stvari, traženu jednakost smo izveli pod pretpostavkom (koja nije eksplicitno pomenuta) da je $x \neq c$. Da li jednakost važi i za $x = c$?

526. Ako je $f^{(n+1)}(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$, dokazati da je tada funkcija f polinom reda n po promenljivoj $x \in (a, b)$.

527. Naći n-ti izvod funkcije $x \mapsto f(x) = x^a$ $(a \in \mathbf{R})$. Naći domen funkcije $x \mapsto f^{(n)}(x)$ i ispitati kada je $f^{(n)}(x) = 0$.

Rešenje. Imamo da je $f'(x) = ax^{a-1}$, odakle je drugi izvod jednak $(ax^{a-1})' = a(a-1)x^{a-2}$. Pretpostavimo da je

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}. \tag{1}$$

Tada je

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)x^{a-n-1}.$$

Ovim je dokazano da (1) važi za svako $n = 1, 2, \ldots$.

Domen funkcije $x \mapsto f^{(n)}(x)$ jednak je domenu funkcije $x \mapsto f'(x)$ (videti zadatak 415).

Primetimo da, ako je $a = m$ prirodan broj, tada je za $n > m$ jedna zagrada sa desne strane u (1) jednaka nuli. Stoga je u ovom slučaju $f^{(n)}(x) \equiv 0$ za $n > m$. Ako a nije prirodan broj, tada nijedan izvod nije jednak nuli za $x \neq 0$.

528. Dokazati da je

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

529. Dokazati da je

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\log a)^n.$$

Izvesti odavde da je

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}, \quad (e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

530. Dokazati da je

$$(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

531. Ako je $f^{(n)}(x) = g(x)$, dokazati da je n-ti izvod funkcije $x \mapsto f(ax+b)$ po promenljivoj x jednak $a^n g(ax+b)$.

Rešenje. Matematičkom indukcijom: Za $n = 1$ imamo da je

$$\frac{\mathrm{d}f(ax+b)}{\mathrm{d}x} = af'(ax+b).$$

Pretpostavimo da je

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

Tada je

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} f(ax+b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^n f^{(n)}(ax+b) = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b),$$

čime je tvrđenje dokazano.

Primedba. Kao i kod prvog izvoda, $f^{(n)}(ax+b)$ znači: naći n-ti izvod funkcije f po promenljivoj t, a **zatim** u dobijenoj funkciji zameniti $t = ax+b$. Treba razlikovati $f^{(n)}(ax+b)$ od $(f(ax+b))^{(n)}$.

532. Odrediti n-ti izvod funkcije $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Rešenje. Kako je

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a(cx+d)+bc-ad}{cx+d} = \frac{1}{c}\left(a + (bc-ad)(cx+d)^{-1}\right),$$

imamo

$$f^{(n)}(x) = \frac{bc-ad}{c}\left((cx+d)^{-1}\right)^{(n)}.$$

Znajući da je (zadatak 527)

$$\left(x^{-1}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-1-n+1)x^{-(n+1)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)},$$

dobijamo

$$\left((cx+d)^{-1}\right)^{(n)} = (-1)^n c^n n! (cx+d)^{-(n+1)},$$

odakle je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n c^{n-1} n! (bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}.$$

533. Matematičkom indukcijom dokazati:

$$\left(x^{n-1} e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

534. Dokazati da je n-ti izvod funkcije $x \mapsto 1/(1+x^2)$ dat sa

$$(-1)^n n!(1+x^2)^{-(n+1)/2}\sin\left((n+1)\operatorname{arcctg} x\right).$$

♣ **Rešenje.** Iz jednakosti

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

nalazimo da je

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^n\left(\frac{1}{1+x^2}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{D}^n\left(\frac{1}{x-i}\right) - \mathrm{D}^n\left(\frac{1}{x+i}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left((x-i)^{-(n+1)} - (x+i)^{-(n+1)}\right).\end{aligned}$$

Kako je

$$x \pm i = \sqrt{1+x^2}(\cos\theta \pm i\sin\theta), \qquad \theta = \operatorname{arcctg} x,$$

pomoću MOIVREove formule dobijamo

$$(x \pm i)^{-(n+1)} = (1+x^2)^{-(n+1)/2}\left(\cos(n+1)\theta \mp \sin(n+1)\theta\right),$$

odakle je

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^n\left(\frac{1}{1+x^2}\right) &= \frac{(-1)^n n!}{2i}(1+x^2)^{-(n+1)/2}\\ &\quad\times\left(\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\right)\\ &= (-1)^n n!(1+x^2)^{-(n+1)/2}\sin(n+1)\theta,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

535. Koristeći se rezultatom zadatka 534, odrediti n-ti izvod funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

536. Dokazati formulu

$$\left(e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\right)^{(n)} = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + n\theta).$$

Rešenje. Primenom matematičke indukcije, uz osnovne trigonometrijske identitete, nije teško pokazati da je data formula tačna. Međutim, prirodniji i elegantniji ♣ dokaz se dobija uz pomoć kompleksnih funkcija.

Neka je

$$f(x) = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta) \qquad (\theta = \text{const.})$$

Tada je

$$f(x) = \operatorname{Re}\left(e^{x\cos\theta}e^{ix\sin\theta}\right) = \operatorname{Re}\, e^{x(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$= \operatorname{Re}\, e^{xe^{i\theta}}\,. \tag{1}$$

Kako $e^{i\theta}$ ne zavisi od x, iz (1) sleduje da je

$$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{xe^{i\theta}})\right) = \operatorname{Re}\left(e^{in\theta}e^{xe^{i\theta}}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left((\cos n\theta + i\sin n\theta)e^{x\cos\theta}(\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta))\right)$$

$$= e^{x\cos\theta}\left(\cos n\theta\cos(x\sin\theta) - \sin n\theta\sin(x\sin\theta)\right)$$

$$= e^{x\cos\theta}\cos(n\theta + x\sin\theta),$$

što je i trebalo dokazati.

537. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & (\text{za } x \neq 0)\,, \\ 0, & (\text{za } x = 0)\,. \end{cases}$$

Da li su funkcije f, f', f'' diferencijabilne ? Ukoliko neke od ovih funkcija imaju prekide, odrediti vrstu prekida.

Rešenje. Diferencijabilnost funkcije f možemo ispitati na dva načina.

I način: Primenom pravila diferenciranja nalazimo da je

$$f'(x) = 4x^3\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}\,, \qquad (x \neq 0)\,. \tag{1}$$

U tački $x = 0$ imamo

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^3\sin\frac{1}{x} = 0. \tag{2}$$

II način: Funkcija f je neprekidna u nuli, jer je

$$\lim_{x\to 0} x^4\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Iz (1) imamo da je

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

odakle sleduje (videti 3.2.2 na strani 180) da je $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, pa je funkcija f diferencijabilna u nuli. □

Za drugi izvod dobijamo:

$$f''(x) = \begin{cases} (12x^2 - 1)\sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x}, & (x \neq 0)\,, \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(h) - f'(0)}{h} = 0 & (x = 0)\,. \end{cases} \tag{3}$$

Prema tome, funkcija f' je diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$.

Primetimo da se diferencijabilnost funkcije f' ne može ustanoviti primenom II načina, jer je

$$f''(x) \sim -\sin\frac{1}{x} \qquad (x \to 0)\,,$$

tako da funkcija f'' nema graničnu vrednost kad $x \to 0$, pa u $x = 0$ ima **prekid druge vrste**.

Iz ovoga takođe sledi da f'' nije diferencijabilna u nuli, jer nije ni neprekidna u toj tački.

538. Koliko izvoda u nuli ima funkcija

$$f(x) = |x|^k \qquad (k \in \mathbf{N})\ ?$$

Rezultat. Ako je k paran prirodan broj, funkcija ima u nuli izvode proizvoljnog reda. Ako je k neparan broj, funkcija ima samo prvih $k-1$ izvoda.

539. Dokazati da funkcija definisana pomoću

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0\,,$$

ima u nuli sve izvode koji su jednaki nuli. Skicirati grafik ove funkcije.

Rešenje. Za $x \neq 0$, imamo da je

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}\,.$$

Matematičkom indukcijom se može pokazati da je za $x \neq 0$ i za $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}\,,$$

gde je P_n polinom. Prema tome,

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to\pm\infty} P_n(t)e^{-t^2} = 0 \quad (t = 1/x)\,. \tag{1}$$

Za $n = 0$, iz (1) nalazimo da je funkcija f neprekidna u nuli. Iz (1) za $n = 1$ sledi da je $f'(0) = 0$ (videti 3.2.2). Pretpostavimo da je $f^{(n)}(0) = 0$. Iz (1) imamo da je funkcija $f^{(n)}$ neprekidna u $x = 0$, i (sa $n+1$ umesto n) da je $f^{(n+1)} = 0$. Prema tome, matematičkom indukcijom smo dokazali da svi izvodi u nuli postoje i da su jednaki nuli.

540. Neka je funkcija f diferencijabilna n puta u tački a i neka je

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0. \tag{1}$$

Dokazati da za x u nekoj okolini tačke a važi

$$f(x) = o((x-a)^n) \qquad (x \to a).$$

Rešenje. Za $n = 1$ imamo da je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 0,$$

pa je $f(x) = o(x-a)$ kad $x \to a$. Prema tome, tvrđenje je tačno za sve funkcije koje ispunjavaju navedene uslove za $n = 1$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ i neka je funkcija f diferencijabilna $n+1$ put u tački a, pri čemu je

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n+1)}(a) = 0.$$

Funkcija $x \mapsto f'(x)$ je tada n puta diferencijabilna u a i za ovu funkciju važe uslovi (1), gde je f zamenjeno sa f'. Po pretpostavci imamo da je

$$f'(x) = o((x-a)^n) \qquad (x \to a), \tag{2}$$

u nekoj okolini tačke a. Kako je $n \geq 1$, a po pretpostavci funkcija f je $n+1$ put diferencijabilna u a, zaključujemo da je f neprekidna i bar jedanput diferencijabilna u nekoj okolini tačke a. Stoga se može primeniti LAGRANGEova teorema:

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(a+\theta(x-a))(x-a), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Kako je $a+\theta(x-a)$ broj između x i a, iz (2) zaključujemo da je $f'(a+\theta(x-a)) = o((x-a)^n)$, pa je

$$f(x) = o((x-a)^n)(x-a) = o\left((x-a)^{n+1}\right) \qquad (x \to a),$$

čime je dokazano da tvrđenje važi i za $n+1$.

Ovim je, prema principu matematičke indukcije, dokazano da tvrđenje važi za svako $n \in \mathbf{N}$.

3.3.2 Leibniz-ova formula

✓ *Ako funkcije* $x \mapsto u(x)$ *i* $x \mapsto v(x)$ *imaju konačne izvode do reda* n, *tada je*

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x).$$

541. Ako funkcije u i v imaju konačne izvode do reda n, dokazati da važi LEIBNIZova formula za n-ti izvod proizvoda uv.

542. Dokazati:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{e^x}{x}\right) = (-1)^n n! \frac{e^x}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

Rešenje. Primenom LEIBNIZove formule nalazimo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{e^x}{x}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{-1})^{(n-k)} (e^x)^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(n-k)!\, x^{-(n-k+1)} e^x \\ &= (-1)^n n! \frac{e^x}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

543. Naći n-ti izvod funkcije $y = x^2 \sin x$.

Rešenje. Prema LEIBNIZovoj formuli, imamo da je

$$\begin{aligned}(x^2 \sin x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (\sin x)^{(n-k)} \\ &= x^2 (\sin x)^{(n)} + 2nx(\sin x)^{(n-1)} + n(n-1)(\sin x)^{(n-2)} \\ &= x^2 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - n(n-1)\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

gde smo koristili zadatak 528, kao i činjenicu da su izvodi funkcije $x \mapsto x^2$ reda većeg od dva jednaki nuli.

544. **Laguerreov polinom** $L_n(x)$ definisan je pomoću

$$L_n(x) = e^x \mathrm{D}^n \left(x^n e^{-x}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Polazeći od ove definicije, odrediti eksplicitan oblik polinoma L_n.

Rešenje. Direktnom primenom LEIBNIZove formule nalazimo

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \mathrm{D}^n \left(x^n e^{-x}\right) \\ &= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^n\right)^{(n-k)} \left(e^{-x}\right)^{(k)} \\ &= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-(n-k)+1) x^{n-(n-k)} (-1)^k e^{-x} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

545. Polinom $x \mapsto P_n(x)$ **(Legendreov polinom)** definisan je pomoću

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \mathrm{D}^n (x^2 - 1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dokazati jednakost

$$P_n'(x) - x P_{n-1}'(x) = n P_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Rešenje. Data jednakost je ekvivalentna sa

$$\mathrm{D}^{n+1}(x^2 - 1)^n = 2nx \mathrm{D}^n (x^2 - 1)^{n-1} + 2n^2 \mathrm{D}^{n-1} (x^2 - 1)^{n-1}. \tag{1}$$

Transformacijom leve strane i primenom LEIBNIZove formule dobijamo

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}^{n+1}(x^2 - 1)^n = \mathrm{D}^n \left((x^2 - 1)^n\right)' = \mathrm{D}^n \left(2nx(x^2 - 1)^{n-1}\right) \\ &= 2n \mathrm{D}^n \left(x(x^2 - 1)^{n-1}\right) = 2nx \mathrm{D}^n (x^2 - 1)^{n-1} + 2n^2 \mathrm{D}^{n-1} (x^2 - 1)^{n-1}, \end{aligned}$$

čime je dokazana jednakost (1).

546. Polazeći od definicije LEGENDREovih polinoma P_n, date u zadatku 545, dokazati da je

$$x P_n'(x) - P_{n-1}'(x) = n P_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

547. Dokazati da za LEGENDREove polinome važi

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

548. Ako je P_n LEGENDREov polinom, odrediti $P_n(1)$ i $P_n(-1)$.

Rezultat. $P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n$.

3.3.3 Diferencijal reda n

Neka je f data funkcija koja ima konačan izvod na intervalu (a, b). Neka je **fiksiran** *priraštaj nezavisne promenljive $\Delta x = \mathrm{d}x$.*

- *Diferencijal reda n se definiše analogno izvodu reda n, tj. za fiksirano $\mathrm{d}x$,*

$$\mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{n-1} f(x)\right).$$

√ *Diferencijal reda n postoji ako i samo ako postoji konačan izvod reda n, i važi*

$$\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n.$$

√ *Iz ove formule nalazimo da je*

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

√ *Ako je x nezavisna promenljiva, treba razlikovati sledeće:*

$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x^n \equiv (\mathrm{d}x)^n, \quad \mathrm{d}^n x = 0 \ (n > 1).$$

√ *Za diferencijale višeg reda* **ne važi** *osobina invarijantnosti, tj. u opštem slučaju,*

$$\mathrm{d}^n f(u(x)) \neq f^{(n)}(u(x))\,\mathrm{d}u^n.$$

549. Polazeći od definicije, naći d^2uv, gde su u i v dva puta diferencijabilne funkcije promenljive x.

Rešenje. Neka je $\Delta x = \mathrm{d}x$ fiksirana veličina. Tada je

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u = uv'\,\mathrm{d}x + vu'\,\mathrm{d}x.$$

Prvi diferencijal je, sa $\mathrm{d}x = \text{const.}$, funkcija koja zavisi samo od x. Kako je $\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = 0$, diferenciranjem gornje jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2uv &= \mathrm{d}(\mathrm{d}uv) = \mathrm{d}(uv')\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}(vu')\,\mathrm{d}x \\ &= (u'v' + uv'')(\mathrm{d}x)^2 + (v'u' + vu'')(\mathrm{d}x)^2 = (uv'' + 2u'v' + u''v)(\mathrm{d}x)^2.\end{aligned}$$

Primedba. Kao što smo već napomenuli, umesto $(\mathrm{d}x)^2$ obično se piše $\mathrm{d}x^2$. I mi ćemo u ovoj knjizi koristiti poslednju oznaku, osim u slučajevima kada bi moglo da dođe do zabune.

550. Ako je $\Delta x = 5$, odrediti brojnu vrednost drugog diferencijala funkcije $f(x) = x^5$ u tački $x = 3$.

Rešenje. Kako je $f''(x) = 20x^3$, imamo da je

$$\mathrm{d}^2 f = f''(x)\,\mathrm{d}x^2 = 20x^3 \cdot (\Delta x)^2 = 20 \cdot 27 \cdot 5^2 = 13500\,.$$

551. Ako je $u = u(v)$, odrediti $\mathrm{d}^2 u$ ako je

a) v nezavisna promenljiva, b) v funkcija nezavisne promenljive x, c) $v = v(h(x))$, gde je h funkcija nezavisne promenljive x.

U sva tri slučaja ispitati da li je $\mathrm{d}^2 u = u''(v)\,\mathrm{d}v^2$. Pretpostaviti da su sve pomenute funkcije dva puta diferencijabilne.

Rešenje. Prvi diferencijal funkcije u je

$$\mathrm{d}u(x) = u'(v)\,\mathrm{d}v\,. \tag{1}$$

a) Ako je v nezavisna promenljiva, tada se pri traženju drugog diferencijala uzima da je $\mathrm{d}v = \text{const}$, tj. $\mathrm{d}^2 v = \mathrm{d}(\mathrm{d}v) = 0$. Diferenciranjem izraza (1) dobijamo:

$$\mathrm{d}^2 u = \mathrm{d}(\mathrm{d}u) = \mathrm{d}(u'(v))\,\mathrm{d}v + u'(v)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}v) = u''(v)\,\mathrm{d}v^2\,.$$

b) Ako je $v = v(x)$, tada je $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$. Pri traženju drugog diferencijala uzimamo da je $\mathrm{d}x = \text{const}$, odnosno $\mathrm{d}^2 x = 0$, tako da iz (1) nalazimo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 u &= \mathrm{d}\big(u'(v)v'(x)\,\mathrm{d}x\big) = \mathrm{d}\big(u'(v)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \big(u''(v)v'(x)\,\mathrm{d}v + u'(v)v''(x)\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}x = \big(u''(v)(v'(x))^2\,\mathrm{d}x + u'(v)v''(x)\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \big(u''(v)(v'(x))^2 + u'(v)v''(x)\big)\,\mathrm{d}x^2\,.\end{aligned}$$

U ovom slučaju je

$$\mathrm{d}^2 u - u''(v)\,\mathrm{d}v^2 = \mathrm{d}^2 u - u''(v)(v'(x))^2\,\mathrm{d}x^2 = u'(v)v''(x)\,\mathrm{d}x^2\,,$$

iz čega zaključujemo da je $\mathrm{d}^2 u = u''(v)\,\mathrm{d}v^2$ ako i samo ako je $u'(v) = 0$ (u ne zavisi od v) ili $v''(x) = 0$ (v je linearna funkcija promenljive x).

c) U slučaju kada je $v = h(x)$, gde je x nezavisna promenljiva, imamo da je $\mathrm{d}v = v'(h(x))h'(x)\,\mathrm{d}x$. Na sličan način kao u prva dva slučaja, dobija se

$$\mathrm{d}^2 u = \big(u''(v)(v'(h))^2(h'(x))^2 + u'(v)v''(h)(h'(x))^2 + u'(v)v'(h)h''(x)\big)\,\mathrm{d}x^2\,.$$

Prvi sabirak je jednak $u''(v)\,\mathrm{d}v^2$. Zbir druga dva sabirka biće nula ako su $x \mapsto h(x)$ i $h \mapsto v(h)$ linearne funkcije.

552. Funkcija $y = y(x)$ data je parametarskim jednačinama $x = f(t)$, $y = g(t)$. Naći $y''(x)$.

Rešenje. Diferenciranjem dobijamo

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{1}{(\dot{x})^2}\left(\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\dot{x} - \dot{y}\cdot\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)$$
$$= \frac{1}{(\dot{x})^2}\left(\frac{\ddot{y}\dot{x}}{\dot{x}} - \frac{\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}}\right) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}.$$

553. Naći drugi i treći izvod funkcije $y = y(x)$ ako je

a) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ b) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

Rezultat. a) $y'' = -\dfrac{1}{a\sin^3 t}$, $y''' = -\dfrac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$

b) $y'' = \dfrac{3}{4(1-t)}$, $y''' = \dfrac{3}{8(1-t)^3}$.

554. Neka je funkcija $y = y(x)$ zadata implicitno pomoću jednakosti

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Naći $y''(x)$.

Rešenje. Diferenciranjem date jednakosti dobijamo

(1) $$2x\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0,$$

Ponovnim diferenciranjem, vodeći računa o tome da je x nezavisna promenljiva ($\mathrm{d}^2x = 0$), imamo

(2) $$2\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x\mathrm{d}y - x\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y^2 + 2y\mathrm{d}^2y = 0$$

Iz jednakosti (1) dobijamo, deljenjem sa $\mathrm{d}x$,

(3) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x - y}{x - 2y}.$$

Ako obe strane jednakosti (2) podelimo sa $\mathrm{d}x^2$ i iskoristimo (3), dobijamo

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{6}{(x-2y)^3}.$$

3.4 Taylorova formula

3.4.1 Taylorov polinom i ostatak

√ *Ako funkcija* $x \mapsto f(x)$ *ima u nekoj okolini tačke* a *konačne izvode do reda* $n+1$, *tada u toj okolini važi jednakost*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{1}$$

gde je

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!},$$

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Polinom T_n *naziva se* **Taylorovim polinomom** *stepena* n *funkcije* f *u okolini tačke* a. R_n *je* **ostatak** *u* TAYLORovoj *formuli.*

Ostatak može da se napiše u sledećim oblicima:

- **Lagrangeov oblik**

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad c \text{ između } a \text{ i } x,$$

ili

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \theta = \theta(x) \in (0,1).$$

- **Cauchyjev oblik**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}, \quad \theta = \theta(x) \in (0,1).$$

Iz LAGRANGEovog *i* CAUCHYjevog *oblika dobija se da je*

$$R_n(x) = O((x-a)^{n+1}), \quad (x \to a).$$

- **Peanoov oblik**

$$R_n(x) = o((x-a)^n), \quad (x \to a).$$

Formula (1) sa ostatkom u nekom od navedenih oblika, naziva se TAYLORovom *formulom ili* TAYLORovim *razvojem funkcije* f *u okolini tačke* a.

- *U posebnom slučaju, ako je* $a = 0$, *dobija se*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Taylor-ova formula za $a = 0$ naziva se MACLAURINovom formulom, *a odgovarajući polinom se u ovom slučaju naziva* MACLAURINovim polinomom.

Smisao TAYLORove *formule je da se funkcija aproksimira polinomom. Ostatak je, u stvari, greška te aproksimacije. Kao što se vidi iz oblika ostatka, aproksimacija je utoliko bolja ukoliko je tačka x bliža tački a. U tom smislu, ovo je* **lokalna aproksimacija**, *tj. može da se koristi samo u dovoljno maloj okolini tačke a.*

Za dato i fiksirano x, pod određenim uslovima (v. zadatak 564), greška aproksimacije se smanjuje sa povećanjem n. Prema tome, TAYLORov *polinom višeg stepena bolje aproksimira funkciju od polinoma manjeg stepena.*

TAYLORova *formula važi i ako su izvodi funkcije f definisani samo u nekoj jednostranoj (levoj ili desnoj) okolini tačke a, pri čemu se u tom slučaju $f^{(k)}(a)$ zamenjuje sa odgovarajućim jednostranim izvodom.*

Funkcija	MACLAURINov polinom	Ostatak (LAGRANGEov oblik)
e^x	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$	$\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$
$\sin x$	$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$	$(-1)^n \cos\theta x \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-1)^{n+1} \cos\theta x \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$
$(1+x)^a$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k$	$\binom{a}{n+1}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$	$(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$
$\log(1+x)$	$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$	$(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^n}$

Tablica osnovnih MACLAURINovih *razvoja.*

555. Dokazati TAYLORovu formulu sa ostatkom u PEANOovom obliku: Ako funkcija f ima u tački a konačne izvode do reda n, tada za x u nekoj okolini tačke a važi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n) \quad (x \to 0).$$

Rešenje. Neka je

$$R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Tada je funkcija R diferencijabilna n puta u tački a i važi da je

$$R(a) = R'(a) = \cdots = R^{(n)}(a) = 0.$$

Iz ovih osobina, na osnovu zadatka 540, sleduje da je

$$R(a) = o((x-a)^n) \qquad (x \to a),$$

što je i trebalo dokazati.

556. Izvesti izraze za MACLAURINove polinome iz tablice osnovnih razvoja.

557. Polazeći od binomnog razvoja

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n),$$

naći MACLAURINove razvoje stepena n sledećih funkcija:

a) $\frac{1}{1+x}$, b) $\frac{1}{1-x}$, c) $\sqrt{1+x}$, d) $\sqrt[3]{1+x}$.

Rešenje. a) Polazeći od binomnog razvoja imamo da je

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1}{k} x^k + o(x^n).$$

Kako je

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k,$$

dobijamo da je

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

b) Ako u prethodnom razvoju zamenimo x sa $-x$, dobijamo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

c) Imamo da je $\binom{1/2}{0}=1$, $\binom{1/2}{1}=\frac{1}{2}$, dok je, za $k=2,3\ldots$,

$$\binom{1/2}{k}=\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)\cdots(1/2-k+1)}{k!}$$
$$=(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}=(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}.$$

Zamenom ovih izraza u formulu za binomni razvoj, dobijamo

$$\sqrt{1+x}=\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}x^k+o(x^n)$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k+o(x^n)$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5-\cdots+o(x^n).$$

d) Na osnovu binomnog razvoja imamo da je, za $n\geq 2$,

$$\sqrt[3]{1+x}=\sum_{k=0}^{n}\binom{1/3}{k}x^k$$
$$=1+\frac{1}{3}x+\sum_{k=2}^{n}\frac{(1/3)(1/3-1)(1/3-2)\cdots(1/3-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$$
$$=1+\frac{1}{3}x+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3k-4)}{3^k k!}x^k+o(x^n).$$

558. Da li se na funkciju $x\mapsto\sqrt{x}$ može primeniti MACLAURINova formula?

Rešenje. Ne može. Ova funkcija ima beskonačan prvi izvod u nuli.

559. Neka je $f(x)=\sqrt{x}$. Naći TAYLOROV polinom $T_n(x)$ za funkciju f u okolini tačke $x=3$. Zatim napisati $T_3(x)$ u razvijenom obliku.

Rešenje. Na osnovu zadatka 527 imamo, za $k=2,3,\ldots$

$$(\sqrt{x})^{(k)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)x^{1/2-k}=(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k}x^{1/2-k}.$$

Za $x=3$ dobijamo

$$f(3)=\sqrt{3},\quad f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad f^{(k)}(3)=(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3^k},\quad k=2,3,\ldots$$

Odavde nalazimo TAYLOROv polinom stepena n:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(3)\frac{(x-3)^k}{k!}$$
$$= \sqrt{3} + \frac{x-3}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{k!}\cdot\left(\frac{x-3}{6}\right)^k .$$

Za polinom T_3 u razvijenom obliku dobija se

$$T_3(x) = \sqrt{3}\left(\frac{63}{265} + \frac{105}{256}x - \frac{35}{384}x^2 + \frac{7}{384}x^3\right) .$$

560. Neka je $P_n(x)$ TAYLOROv polinom funcije $x \mapsto f(x)$ u okolini tačke a. Dokazati da je

$$P_n(x) = P_n^*(x-a) ,$$

gde je $P^*(t)$ MACLAURINOv polinom funkcije $t \mapsto f(a+t)$.

Rešenje. Neka je

$$F(t) = f(a+t) .$$

Nije teško dokazati da važi jednakost

$$F^{(k)}(0) = f^{(k)}(a) , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ako je P^* MACLAURINOv polinom funkcije F, tada je

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{n} F^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} .$$

Odavde je

$$P^*(x-a) = \sum_{k=0}^{n} F^{(k)}(0)\frac{(x-a)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} ,$$

a ovo je TAYLOROv polinom funkcije f u okolini tačke a.

Primedba. Iz ovog rezultata proizilazi da je dovoljno izučavati MACLAURINOve razvoje funkcija, jer se TAYLOROv razvoj u proizvoljnoj tački može dobiti iz odgovarajućeg MACLAURINOvog razvoja.

561. Napisati TAYLOROv razvoj funkcije $x \mapsto e^x$ u okolini tačke -1.

Rešenje. Na osnovu zadatka 560, TAYLOROv polinom date funkcije je $P_n^*(x+1)$, gde je P_n^* MACLAURINOv polinom funkcije $t \mapsto e^{t-1} = e^{-1}\cdot e^t$. Kako je

$$\left(e^{-1}e^t\right)^{(n)} = e^{-1}e^t ,$$

imamo da je

$$P_n^*(t) = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!},$$

pa je

$$e^x = P_n^*(x+1) + o((x+1)^n) = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+1)^k}{k!} + o((x+1)^n).$$

562. Napisati TAYLOROv razvoj funkcije $x \mapsto \cos x$ u okolini tačke $\pi/2$.

Rezultat. $\cos x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(x-\pi/2)^{2k-1}}{(2k-1)!} + o\left((x-\pi/2)^{2k+1}\right)$.

563. Dokazati da MACLAURINov polinom parne funkcije sadrži samo parne stepene i da MACLAURINov polinom neparne funkcije sadrži samo neparne stepene promenljive.

Rešenje. Ako je g diferencijabilna funkcija, tada je (zadatak 458)

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2}.$$

Dakle, ako je g parna funkcija, tada je $g'(0) = 0$.

Kako je izvod parne funkcije neparna funkcija i obrnuto (zadatak 425), zaključujemo da, ako je f parna funkcija, tada su i funkcije f'', f^{iv}, $f^{(6)}$, ... parne funkcije. Stoga je

$$f'''(0) = f^{(5)}(0) = \cdots = 0.$$

Prema tome, u MACLAURINov polinomu parne funkcije, koeficijenti uz neparne stepene su jednaki nuli.

Ako je f neparna funkcija, tada su funkcije f', f''', $f^{(5)}$, ... parne, pa je

$$f''(0) = f^{iv}(0) = \cdots = 0$$

i koeficijenti uz parne stepene su jednaki nuli. U ovom slučaju je i $f(0) = 0$, što sleduje iz neprekidnosti funkcije u nuli.

564. Neka funkcija f ima izvode proizvoljnog reda u nekoj okolini U tačke a, i neka su svi izvodi ograničeni, tj.

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall x \in U) \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

za neko $M \in \mathbf{R}$. Dokazati da je tada

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0,$$

gde je R_n ostatak u TAYLOROvoj formuli za funkciju f u okolini tačke a.

Rešenje. Ako su ispunjeni uslovi zadatka, tada je

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Neka je $|x-a| = b$. Tada je (videti zadatak 217)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

odakle sleduje tvrđenje koje je trebalo dokazati.

565. Naći primer funkcije f koja ima izvode proizvoljnog reda u nekoj okolini tačke a, ali ni za jedno $x \neq a$ ne važi da je $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Rešenje. Neka je g funkcija definisana pomoću

$$g(x) = e^{-1/x^2} \quad (x \neq 0), \qquad g(0) = 0.$$

U zadatku 539 dokazano je da su svi izvodi funkcije g u nuli jednaki nuli. Očigledno je da ova funkcija ima izvode proizvoljnog reda u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = e^x + g(x)$. Za funkciju $x \mapsto e^x$ ispunjeni su uslovi zadatka 564 u okolini tačke $a = 0$, pa je

$$e^x = T_n'(x) + R_n'(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} R_n'(x) = 0.$$

Kako su za funkciju g svi izvodi jednaki nuli, njen MACLAURINov polinom proizvoljnog stepena jednak je nuli. Primenom MACLAURINove formule na funkciju f, nalazimo

$$f(x) = T_n'(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = R_n'(x) + g(x).$$

Prema tome, za $x \neq 0$ imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = g(x) \neq 0.$$

3.4.2 Procena ostatka u Taylorovoj formuli

Kako je smisao primene TAYLOROve *formule aproksimacija funkcije polinomom, od interesa je poznavanje greške te aproksimacije. Naravno, tačna vrednost greške je nepoznata, ali se ona može proceniti, polazeći od* LAGRANGEovog *ili* CAUCHYjevog *oblika ostatka. Na primer, ako posmatramo* MACLAURINovu *formulu sa ostatkom u* LAGRANGEovom *obliku, cilj procene greške je da se nađe gornja granica za*

$$|R_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

gde x ima datu vrednost ili pripada datoj okolini nule i gde je $\theta \in (0,1)$.

Kod procene greške se obično koriste najjednostavnije nejednakosti, traženjem "najgoreg slučaja" u kome oba faktora dostižu maksimalnu apsolutnu vrednost. Stoga je stvarna greška uglavnom znatno manja od procenjene.

566. Funkciju $x \mapsto \log(x^2+5x+6)$ aproksimirati MACLAURINovim polinomom stepena n i proceniti grešku na segmentu $[-1,1]$.

Rešenje. Data funkcija je definisana za $x \in (-\infty,-3) \cup (-2,+\infty)$, i na tom skupu je

$$f(x) = \log(x^2+5x+6) = \log|x+2| + \log|x+3| .$$

Nalaženjem izvoda dobijamo

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} . \tag{1}$$

Kako je

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^m \frac{m!}{t^{m+1}} , \tag{2}$$

iz (1) i (2) sleduje (za $m = k-1$)

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\left(\frac{1}{(x+2)^k} + \frac{1}{(x+3)^k}\right) \quad (k = 1,2,\ldots)$$

Prema tome, MACLAURINov polinom stepena n za datu funkciju je

$$T_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \log 6 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(2^{-k}+3^{-k})\frac{x^k}{k} .$$

Greška aproksimacije (u LAGRANGEovom obliku) data je izrazom

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^n}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{(\theta x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(\theta x+3)^{n+1}}\right) x^{n+1} , \tag{3}$$

za neko $\theta \in (0,1)$. Za takvo θ i za $x \in [-1,1]$, važe nejednakosti

$$1 < \theta x + 2 < 3, \qquad 2 < \theta x + 3 < 4,$$

pa je

$$\frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{(\theta x+2)^{n+1}} < 1, \quad \frac{1}{4^{n+1}} < \frac{1}{(\theta x+3)^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} ,$$

odakle sabiranjem dobijamo

$$\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} < \frac{1}{(\theta x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(\theta x+3)^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} . \tag{4}$$

Iz (3) i (4) konačno nalazimo da je

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) .$$

567. Data je funkcija

$$f(x) = (x^2 - x)e^{-x} .$$

a) Odrediti $f^{(n)}(x)$ i $f^{(n)}(0)$ $(n = 1, 2 \ldots)$

b) Aproksimirati funkciju f MACLAURINovim polinomom petog stepena i proceniti grešku na segmentu $[-10^{-1}, 10^{-1}]$.

Rešenje. Na osnovu LEIBNIZove formule imamo da je

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2 - x)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (x^2 - x)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} ,$$

jer su svi izvodi funkcije $x \mapsto x^2 - x$ reda većeg od dva jednaki nuli. Daljim sređivanjem ovog izraza dobija se

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 - (2n+1)x + n^2)e^{-x} . \tag{1}$$

Odavde je

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n^2 . \tag{2}$$

Korišćenjem jednakosti (2), dobijamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{5} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + R_5(x) = -x + 2x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{24}x^5 + R_5(x),$$

gde je

$$R_5(x) = f^{(6)}(c)\frac{x^6}{720} , \quad f^{(6)}(c) = (c^2 - 13c + 36)e^{-c}. \tag{3}$$

Maksimum apsolutne vrednosti izvoda na datom intervalu moguće je tačno odrediti. Kako je c neka tačka između 0 i x i kako je $x \in [-1/10, 1/10]$, onda se i c nalazi u istom intervalu. Neka je $F(c) = (c^2 - 13c + 36)e^{-c}$. Tada je $F'(c) = (-c^2 + 15c - 49)e^{-c}$, i za $c \in [-1/10, 1/10]$ imamo da je $F'(c) < 0$, pa stoga F dostiže maksimum u $c = -1/10$ i minimum u $c = 1/10$. Kako je na istom intervalu $F > 0$, zaključujemo da je $|F|_{\max} = F(-1/10)$, odakle je za $x \in [-1/10, 1/10]$:

$$|R_5(x)| \leq F(-1/10)\frac{10^{-6}}{720} \approx 0.57 \cdot 10^{-7} . \tag{4}$$

Primetimo da se isti rezultat dobija i ako se primeni nejednakost trougla u (3):

$$|R_5(x)| \le (c^2 + 13|c| + 36)e^{-c}\frac{x^6}{720} \le \left((0.1)^2 + 13 \cdot 0.1 + 36\right) \cdot e^{0.1} \cdot \frac{(0.1)^6}{720},$$

gde je za svaki član nađena maksimalna vrednost na datom intervalu.

568. Objasniti kako bi se izračunao broj e sa greškom ne većom od 10^{-9}.

Rešenje. Iz MACLAURINovog razvoja funkcije $x \mapsto e^x$ i za $x = 1$, nalazimo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

gde je

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \qquad (c \in (0,1)).$$

Kako je $e < 3$, to je i $e^c < 3$ za $0 < c < 1$, tako da je

$$0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Prema tome, greška će sigurno biti manja od 10^{-9} ako je ispunjena nejednakost

$$\frac{3}{(n+1)!} \le 10^{-9}, \quad \text{tj.} \quad (n+1)! \ge 3 \cdot 10^9.$$

Probanjem za $n = 1, 2, \ldots$ uveravamo se da je najmanja vrednost za n za koju važi poslednja nejednakost jednaka 12 (jer je $13! = 6227020800 > 3 \cdot 10^9$). Odavde je

$$e \approx \sum_{k=0}^{12} \frac{1}{k!} = 2.71828182828...$$

569. Izračunati $\sqrt[3]{28}$ sa greškom koja nije veća od 10^{-4}.

Rešenje. Pronađimo najpre funkciju čijim razvojem ćemo dobiti traženi rezultat. Kako je

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{1 + 27},$$

možemo da uzmemo funkciju $g(x) = \sqrt[3]{x}$ i da primenimo TAYLORov razvoj u okolini tačke $a = 27$, za $x = 28$, $x - a = 1$. Kako je, za $k = 2, 3, \ldots$

$$g^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3k-4)}{3^k}x^{1/3-k} = k!\binom{1/3}{k}x^{1/3-k},$$

imamo da je

$$g(27) = 3, g'(27) = \frac{1}{27}, \ldots, g^{(n)}(27) = (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n}\frac{3}{27^n}.$$

Iz TAYLORove formule dobijamo

$$\sqrt[3]{28} = g(28) = 3 + \frac{1}{27} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3k-4)}{3^k k!} \frac{3}{27^k} + R_n(28),$$

gde je za neko $c \in (27, 28)$,

$$R_n(28) = \binom{1/3}{n+1} c^{1/3-n-1} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!} c^{-(n+2/3)}.$$

Apsolutna vrednost greške je najveća za $c = 27$. Iz nejednakosti

$$|R_n(x)| \leq |R_n(x)|_{c=27} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!} \frac{1}{27^{n+2/3}} \leq 10^{-4},$$

dobijamo (probanjem za $n = 1, 2, \ldots$) da je najmanje n koje zadovoljava postavljeni uslov jednako 2. Prema tome,

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{2187} \approx 3.03658.$$

Zadatak smo mogli da rešimo i na još bar dva načina. Najpre, mogli smo da uzmemo funkciju

$$h(x) = \sqrt[3]{27 + x},$$

i da primenimo MACLAURINov razvoj u tački $x = 1$. Ovim bi se dobio isti rezultat kao već navedeni.

Treći način proizilazi iz sledeće transformacije:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27\left(1 + \frac{1}{27}\right)} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}}.$$

Približna vrednost za $\sqrt[3]{28}$ može se, prema tome, dobiti i iz MACLAURINovog razvoja funkcije

$$f(x) = 3\sqrt[3]{1 + x},$$

sa $x = 1/27$. Ovaj način je i najlakši, jer se svodi na osnovni binomni razvoj

$$\sqrt[3]{28} = 3\left(1 + \frac{1}{3}x + \binom{1/3}{2}x^2 + \cdots + \binom{1/3}{n}x^n\right) + 3\binom{1/3}{n+1}(1+c)^{-(n+2/3)}x^{n+1}.$$

Primetimo da je maksimalna vrednost ostatka (za $c = x = 1/27$) ovde nešto manja nego kod prvog načina. Neka je R maksimalna vrednost ostatka u prvom načinu (sa funkcijom g), i neka je ρ maksimalna vrednost ostatka sa funkcijom f. Tada je

$$R = \binom{1/3}{n+1} \frac{1}{27^{n+2/3}}, \quad \rho = 3\binom{1/3}{n+1}\left(1 + \frac{1}{27}\right)^{-(n+2/3)},$$

odakle je

$$\left|\frac{R}{\rho}\right| = \left(\frac{28}{27}\right)^{n+2/3}.$$

Ovo ne znači da je **stvarna greška** manja sa funkcijom f negó sa funkcijom g; ove dve greške su jednake, jer se sa obe funkcije dobija ista vrednost TAYLOROvog polinoma, pa time i vrednosti ostataka moraju da budu jednake. Međutim, pomoću funkcije f moguće je preciznije proceniti stvarnu grešku.

U principu, ako imamo više različitih mogućnosti da približno izračunamo neku vrednost primenom TAYLOROve formule u tački x u okolini tačke a, treba birati onu formulu kod koje je $x - a$ najmanje.

570. Objasniti kako bi se približno izračunao $\log(6/5)$ sa greškom ne većom od 10^{-5}.

Rezultat. Funkcija $f(x) = \log(1+x)$, razvoj u okolini nule za $x = 0.2$ do stepena $n = 6$.

571. Dokazati:

Ako je f neparna funkcija i ako ima u nekoj okolini nule konačne izvode do reda $2n+1$, tada u toj okolini važi

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} f^{(2k-1)}(0)\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + f^{(2n+1)}(\theta x)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

gde je $\theta \in (0,1)$.

Ako je f parna funkcija i ako ima u nekoj okolini nule konačne izvode do reda $2n+2$, tada u toj okolini važi

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{2k}(0)\frac{x^{2k}}{(2k)!} + f^{(2n+2)}(\theta x)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

za neko $\theta \in (0,1)$.

Komentarisati ove rezultate sa gledišta procene greške.

Rešenje. U zadatku 563 dokazali smo da su koeficijenti uz parne stepene u MACLAURINovom polinomu neparne funkcije jednaki nuli. Ako sa P_n označimo MACLAURINov polinom neparne funkcije f, tada iz pomenute osobine zaključujemo da je $P_{2n-1} = P_{2n}$. Kako je, na osnovu MACLAURINove formule,

$$f(x) = P_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x) = P_{2n}(x) + R_{2n}(x),$$

onda je i $R_{2n-1}(x) = R_{2n}(x)$, pa možemo pisati

$$f(x) = P_{2n-1}(x) + R_{2n}(x).$$

Ako se $R_{2n}(x)$ napiše u LAGRANGEovom obliku, dobija se formula (1). Formula (2) dokazuje se analogno.

Iako su R_{2n-1} i R_{2n} jednaki (u slučaju neparne funkcije), sa gledišta procene greške bolje je uzeti ostatak u obliku R_{2n}, jer se tako dobija preciznija procena.

Naime, za dovoljno malo x važi nejednakost

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

dok se prvi faktor u izrazu za ostatak (izvod u tački θx) obično samo grubo majorizira, jer je θ nepoznato.

572. Primenom TAYLORove formule, izračunati $\sin 9^o$ sa greškom ne većom od 10^{-5}.

Rešenje. Iskoristićemo TAYLORov razvoj funkcije $x \mapsto \sin x$ u okolini nule:

$$\sin x = T_{2n-1}(x) + R_{2n}(x),$$

gde je (videti zadatak 571 i tablicu osnovnih razvoja)

$$(1) \qquad T_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$(2) \qquad R_{2n}(x) = (-1)^n \cos\theta x \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \theta \in (0,1).$$

U ovim formulama je $x = 9^o = \pi/20$. (Ne treba zaboraviti da se stepeni pretvaraju u radijane !) Nepoznati broj n određujemo iz uslova da maksimalna apsolutna vrednost ostatka R nije veća od 10^{-5}. Iz (2) sleduje da će taj uslov biti ispunjen ako je

$$(3) \qquad \frac{(\pi/20)^{2n+1}}{(2n+1)!} \le 10^{-5}.$$

Izračunavanjem leve strane u (3) za $n = 0, 1, \ldots$, vidimo da je uslov (3) zadovoljen za najmanje $n = 2$. Apsolutna vrednost greške tada je manja od $8 \cdot 10^{-7}$, tako da je pomoću formule

$$(4) \qquad \sin 9^o \approx \frac{\pi}{20} - \frac{(\pi/20)^3}{3!}$$

sinus od 9 stepeni izračunat sa traženom tačnošću (u stvari, sa većom tačnošću od tražene).

Proverom na kalkulatoru, dobijamo da je $\sin 9^o \approx 0.15643447$, dok se iz (4) dobija $\sin 9^o \approx 0.15643367$, što daje razliku od tačno $8 \cdot 10^{-7}$.

Da li bismo postigli bolju aproksimaciju TAYLORovim razvojem oko tačke $a = \pi/16$ ($\sin a$ i $\cos a$ možemo da nađemo sukcesivnom primenom formula za trigonometrijske funkcije polovine ugla, polazeći od $\pi/4$)?

573. Za koje vrednosti x važi približna formula

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

sa apsolutnom greškom koja je manja od 10^{-4}?

Rešenje. Iz MACLAURINove formule nalazimo da je

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cos\theta x \cdot \frac{x^4}{24}, \qquad \theta \in (0,1).$$

Greška date približne formule je

$$|R(x)| \leq \frac{x^4}{24},$$

odakle se vidi da je traženi uslov ispunjen za one vrednosti x za koje je

$$\frac{x^4}{24} \leq 10^{-4}, \text{tj. } |x| \leq \sqrt[4]{24 \cdot 10^{-4}} \approx 0.22.$$

3.4.3 Teorema o jedinstvenosti Taylorovog polinoma. Potencijalni razvoji

√ *Ako je funkcija f n puta diferencijabilna u tački a i ako za neki polinom P_n stepena n važi da je*

$$(1) \qquad f(x) = P_n(x) + o\big((x-a)^n\big), \qquad (x \to a),$$

tada je P_n TAYLOROv *polinom funkcije f u okolini tačke a.*

Na osnovu ove teoreme, TAYLOROv *polinom funkcije f je mogućno nalaziti bez traženja izvoda u tački a. Naime, ako na* **bilo koji način** *dobijemo polinom P stepena n za koji važi da je $f(x) = P(x) + o\big((x-a)^n\big)$ kad $x \to a$, tada je to* TAYLOROv *polinom.*

Jednakost (1) naziva se **potencijalni razvoj** *funkcije f u okolini tačke a. Teorema o jedinstvenosti* TAYLOROvog *polinoma tvrdi da, ako je funkcija f n puta diferencijabilna u tački a, tada je njen potencijalni razvoj isto što i* TAYLOROv *razvoj.*

U zadacima iz ove oblasti koristićemo materijal izložen u 2.5.5 na strani 136.

574. a) Napisati MACLAURINov polinom petog stepena za funkciju $x \mapsto e^{2x+x^3}$. b) Naći prvih pet izvoda ove funkcije u nuli.

Rešenje. Ako stavimo $t = 2x + x^3$, imamo da je

$$t \to 0 \iff x \to 0, \qquad o(t^n) = o(x^n). \tag{1}$$

Kako je, kada $t \to 0$,

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + o(t^5), \tag{2}$$

iz (1) i (2) dobijamo

$$\begin{aligned} e^{2x+x^3} &= 1 + (2x + x^3) + \frac{(2x + x^3)^2}{2} + \frac{(2x + x^3)^3}{6} \\ &\quad + \frac{(2x + x^3)^4}{24} + \frac{(2x + x^3)^5}{120} + o(x^5). \end{aligned} \tag{3}$$

Da bismo dobili polinom petog stepena po x, u formuli (3) treba sačuvati samo članove stepena 5 i manjeg. Svi članovi x^k sa $k > 5$ ulaze u ostatak $o(x^5)$. Na taj način imamo:

$$\begin{aligned} e^{2x+x^3} &= 1 + (2x + x^3) + \frac{4x^2 + 4x^4}{2} + \frac{8x^3 + 12x^5}{6} + \frac{16x^4}{24} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{34}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned} \tag{4}$$

Na osnovu teoreme o jedinstvenosti, zaključujemo da je MACLAURINOV polinom petog stepena date funkcije određen sa

$$T_5(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{34}{15}x^5. \tag{5}$$

Kako je, s druge strane,

$$T_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5, \tag{6}$$

upoređivanjem koeficijenata uz jednake stepene promenljive x u (5) i (6), nalazimo da je

$$f'(0) = 2, f''(0) = 4, f'''(0) = 14, f^{(4)}(0) = 64, f^{(5)}(0) = 272.$$

Primedba. Kod zadataka ovog tipa veoma je važno:

1. Smena $t = h(x)$ može da se uvede samo ako $x \to 0 \iff h(x) \to 0$.
2. Treba odrediti r tako da je $o(t^r) = o(x^n)$, gde je n dati stepen TAYLOROVOG polinoma, u ovom zadatku $n = 5$. Nije uvek $r = n$; broj r može da bude veći ili manji od n.
3. U razvoju tipa (3) treba sačuvati sve članove koji sadrže x na stepen n ili manji.

575. Naći potencijalni razvoj u okolini nule do člana sa x^3 funkcije $f(x) = \cos\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$.

Rešenje. Neka je $t = \sqrt{x}$. Tada imamo da je

$$t \to 0 \iff x \to 0, \quad o(t^6) = o(x^3).$$

Iz razvoja

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + o(t^6)$$

dobijamo da je

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{720} + o(x^3), \tag{1}$$

što je traženi razvoj.

Primedba. Iz razvoja (1) **ne sledi** da funkcija f mora da ima izvode u nuli. Međutim, u ovom slučaju f zaista ima desne izvode u nuli i to proizvoljnog reda (videti zadatak 1440). Stoga je dobijeni razvoj MACLAURINov razvoj funkcije f.

576. Neka je

$$f(x) = P_n(x) + g(x),$$

gde je P_n polinom stepena $n > 1$ i

$$g(x) = x^{n+1}\sin(1/x^{n+1}) \quad (x \neq 0), \qquad g(0) = 0.$$

Dokazati da, iako je $g(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$, funkcija f nema izvode u nuli osim prvog, i $P_n(x)$ nije njen MACLAURINov polinom. Da li je ovo u suprotnosti sa teoremom o jedinstvenosti?

577. Naći MACLAURINov razvoj petog stepena funkcije

$$R(x) = \frac{1 + x - x^2}{1 + x + 2x^2}$$

Rešenje. Ako stavimo $t = x + 2x^2$, kad $x \to 0$ imamo da je

$$\begin{aligned} R(x) &= 1 - \frac{3x^2}{1 + x + 2x^2} = 1 - \frac{3x^2}{1 + t} \\ &= 1 - 3x^2\left(1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Dalje je

$$t^2 = x^2 + 4x^3 + o(x^3), \quad t^3 = x^3 + o(x^3), \quad o(t^3) = o(x^3),$$

gde smo koristili razvoj za t^2 i t^3 po binomnoj formuli. Zamenom ovih izraza u (1) dobijamo

$$\begin{aligned} R(x) &= 1 - 3x^2\left(1 - x - 2x^2 + x^2 + 4x^3 - x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 - 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 - 9x^5 + o(x^5)\,. \end{aligned}$$

578. Funkciju $x \mapsto \operatorname{tg} x$ razviti u okolini nule do člana sa x^5.

Rešenje. Primenom razvoja funkcija $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ dobijamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Drugi faktor se dalje može razviti pomoću smene $t = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1} &= \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12} + o(x^4)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \qquad (x \to 0). \end{aligned}$$

579. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{x^3 e^x}{e^x - 1}, \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0.$$

Naći potencijalni razvoj petog stepena ove funkcije u okolini nule.

Rezultat. $f(x) = x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{12} + o(x^5) \quad (x \to 0)$.

580. Aproksimirati funkciju f datu sa

$$f(x) = \sqrt{1 - x^3} \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$$

MACLAURINovim polinomom šestog stepena i proceniti grešku aproksimacije.

Rešenje. Neka je $t = x^3$. Koristeći se binomnim razvojem funkcije $t \mapsto (1-t)^{1/2}$, nalazimo:

$$f(x) = (1-t)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \binom{1/2}{2}t^2 + r(t)\,, \tag{1}$$

gde je

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}(1-t)^{1/2}\Big|_{t=c} \cdot \frac{t^3}{6} \qquad (c \in (0,t)) \\ &= -\frac{3}{8}(1-c)^{-5/2}\,\frac{t^3}{6}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Kako je, kad $x \to 0$, $r(t) = o(t^2) = o(x^6)$, iz (1) zaključujemo da je MACLAURINov polinom šestog stepena za funkciju $f(x)$ dat sa

$$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \binom{1/2}{2}x^6 = 1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6\,.$$

♣ Ostatak je, prema (2) jednak

$$R(x) = r(t) = -\frac{3}{8}(1-c)^{-5/2}\,\frac{x^9}{6}\,,$$

gde je $0 < c < t = x^3 < 1/8$. Izraz $(1-c)^{-5/2}$ ima maksimalnu vrednost $(8/7)^{5/2}$ za $c = 1/8$, dok $x^9/6$ dostiže za $x = 1/2$ svoj maksimum $1/(6 \cdot 2^9)$. Prema tome, imamo da je

$$|R(x)| \le \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^5 \cdot \frac{1}{6 \cdot 2^9} \approx 1.7 \cdot 10^{-4}\,.$$

581. Aproksimirati funkciju

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$$

MACLAURINovim polinomom četvrtog stepena i proceniti grešku za $x \in [-1/10, 1/10]$.

Rešenje. MACLAURINov polinom i grešku možemo da nađemo bez traženja izvoda u nuli. Kako je

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + r(x)\,,$$

imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3x)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + r(x)\right) \\ &= 3x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{3} + (2x^2 + 3x)r(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Kako je $r(x)$ ostatak MACLAURINovog razvoja do trećeg stepena, imamo da je $r(x) = o(x^3)$, pa je, kad $x \to 0$:

$$-\frac{x^5}{3} + (2x^2 + 3x)r(x) = -\frac{x^5}{3} + o(x^5) + o(x^4) = o(x^4) .$$

Na osnovu toga, (1) se može napisati u obliku

$$f(x) = 3x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) ,$$

odakle sledi da je MACLAURINov polinom četvrtog stepena za funkciju f dat sa

$$T_4(x) = 3x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} . \tag{2}$$

Izraz za grešku takođe možemo da dobijemo iz (1). Ostatak $r(x)$, napisan u LAGRANGEovom obliku, glasi

$$r(x) = e^{\theta x}\frac{x^4}{24} \qquad (0 < \theta < 1) ,$$

pa se, s obzirom na (2), jednakost (1) može napisati u obliku

$$f(x) = T_4(x) - \frac{x^5}{3} + (2x^2 + 3x)e^{\theta x}\frac{x^4}{24} . \tag{3}$$

Iz (3) vidimo da je greška u MACLAURINovom razvoju za f data sa

$$R_4(x) = -\frac{x^5}{3} + (2x^2 + 3x)e^{\theta x}\frac{x^4}{24} . \tag{4}$$

Maksimalna apsolutna vrednost greške se može proceniti iz (4) na razne načine. Najgrublja i najjednostavnija procena se dobija primenom nejednakosti trougla:

$$|R_4(x)| \le \frac{|x|^5}{3} + (2x^2 + 3|x|)e^{\theta|x|}\frac{x^4}{24} \tag{5}$$

Za $x \in [-1/10, 1/10]$, izraz sa desne strane u (5) dostiže maksimum za $|x| = 1/10$ i $\theta = 1$, pa je

$$|R_4(x)| \le |R_4(1/10)|_{\theta=1} \approx 4.8 \cdot 10^{-6} .$$

Primedba. 1. Da li se iz (1) može zaključiti da je MACLAURINov polinom petog stepena za funkciju f jednak

$$T_5(x) = 3x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{3} \ ?$$

Obrazložiti.

2. Predložiti metod za procenu greške koji bi dao bolju (tj, manju) gornju granicu apsolutne vrednosti greške od dobijene u gornjem rešenju.

582. Aproksimirati funkciju

$$f(x) = x \sin^2 x$$

MACLAURINovim polinomom petog stepena i proceniti grešku na segmentu $[-h, h]$.

Rešenje. Ovaj zadatak se, u principu, može rešiti na više načina. Najpre, možemo naći prvih 6 izvoda funkcije f i iz MACLAURINove formule dobiti traženu aproksimaciju. Nedostatak ovog metoda je u tome što zahteva direktno izračunavanje izvoda, što u ovom zadatku nije teško. Ali, razmotrimo još dva načina.

Na drugi način, ako pođemo od MACLAURINovog razvoja za funkciju $x \mapsto \sin x$, i kvadriramo, dobijamo

$$f(x) = x\left(x - \frac{1}{6}x^3 + R\right)^2 .$$

Na ovaj način bi se lako dobio polinom, ali bi izraz za grešku sadržao nekoliko članova.

Treći način, koji ćemo da primenimo u ovom zadatku, je izvestan kompromis između prva dva načina. Za funkciju $g(x) = \sin^2 x$ nije teško odrediti sve izvode, jer je

$$g'(x) = \sin 2x,\ g''(x) = 2\cos 2x, \ldots,\ g^{(5)}(x) = 16\sin 2x,\ g^{(6)}(x) = 32\cos 2x\ .$$

Primenom MACLAURINove formule na funkciju g, imamo

$$f(x) = xg(x) = x\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{32\cos 2c}{720}x^6\right) .$$

Primetimo da smo, za funkciju g uzeli MACLAURINov polinom četvrtog stepena, dok je ostatak za formulu petog stepena. Ovo je ispravno, jer je g parna funkcija (videti zadatak 571).

Iz gornje jednakosti sledi da je

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{2\cos 2c}{45}x^7 = T_5(x) + R(x),$$

gde je $c \in (-h, h)$. Ostatak procenjujemo na sledeći način:

$$|R(x)| \le \frac{2|\cos 2c|}{45}|x|^7 \le \frac{2}{45}h^7 .$$

583. Neka je

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}\ .$$

a) Aproksimirati funkciju f MACLAURINovim polinomom šestog stepena i proceniti grešku aproksimacije za $x \in [-1/2, 1/2]$.

b) Odrediti konstante A, B, C, tako da važi

$$f(x) = Ax + B + \frac{C}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +\infty) .$$

Rešenje. **a)** Na sličan način kao u zadatku 580 nalazimo da je

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + R(x) ,$$

gde je, za $|x| \leq 1/2$:

$$|R(x)| \leq \frac{15x^8}{24 \cdot 16(1+\theta x^2)^{7/2}} \leq 1.53 \cdot 10^{-4} .$$

b) Kad $x \to +\infty$, funkciju možemo razviti samo po stepenima promenljive $1/x \to 0$: ♣

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2)\right)$$
$$= x + \frac{1}{2x} + o(1/x) .$$

Prema tome, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1/2$.

3.4.4 Nalaženje graničnih vrednosti pomoću potencijalnih razvoja

584. Odrediti realan broj a tako da

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left(x - x^a \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

bude konačan. Za nađenu vrednost parametra a izračunati L.

Rešenje. Nalaženjem potencijalnog razvoja funkcije $x \mapsto \log(1 + 1/x)$ po promenljivoj $1/x$ do člana sa $1/x^2$, dobijamo

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) ,$$

pa je

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left(x - x^{a-1} + \frac{x^{a-1}}{2} + o(x^{a-2})\right) . \tag{1}$$

Prvi član (x) u zagradi u (1) teži ka $+\infty$; da bi granična vrednost bila konačna mora negde da se pojavi sabirak $-x$, a to je moguće ako i samo ako je $a-1=1$, tj. $a=2$. U tom slučaju imaćemo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+o(1)=\frac{1}{2}\,.$$

Da bismo se uverili da je ovo jedino rešenje, primetimo da je za $a>2$ vodeći član $x^{a-2}/2\to+\infty$, dok je za $a<2$, vodeći član $x\to+\infty$.

Primedba. U ovom zadatku, kao i u sličnim zadacima gde se primenjuje TAYLORova formula, standardno pitanje je: *Kako znamo do kog stepena treba pisati* TAYLORov *razvoj ?* U stvari, to ne znamo unapred. Po pravilu, ako je izraz oblika $A\cdot B$, tada B razvijamo do onog stepena posle kog bi ostali dodati sabirci, pomnoženi sa A, težili ka nuli. Naravno, nikakva šteta ne može da nastane ako se doda više članova nego što je potrebno. Na primer, u prethodnom rešenju smo mogli da uzmemo tri člana:

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^{a-1}+\frac{1}{2}x^{a-2}-\frac{1}{3}x^{a-3}+o\left(x^{a-3}\right)\right)\,,\end{aligned}$$

i odgovor ostaje isti, jer je ovde bitno da je $x-x^{a-1}=0$, odakle je $a=2$, pa u tom slučaju treći član (uz x^{a-3}) teži nuli.

Medjutim, da smo pisali samo jedan član, imali bismo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^{a-1}+o\left(x^{a-1}\right)\right)\,. \tag{2}$$

Odavde bismo takođe dobili $a=2$, ali ne bismo mogli da odredimo L iz $L=\lim_{x\to+\infty}o(x)$ i to bi nas upozorilo da treba da dodamo još jedan član.

Ovo takođe ukazuje na veliki značaj ispravnog pisanja ostatka. Na primer, kada bismo u (2) "zanemarili" ostatak i pisali samo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^{a-1}\right)\,,$$

dobili bismo $a=2$, ali (pogrešno) $L=0$.

585. Primenom TAYLORove formule, izračunati

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}\,. \tag{1}$$

Rešenje. Koristeći poznate razvoje, imamo, kad $x\to0$:

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3!}\sin^3x+\frac{1}{5!}\sin^5x+o(x^5)$$

$$(2)\qquad = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)^3 + \frac{1}{5!}(x + o(x))^5 .$$

Stepenovanjem i zadržavanjem članova do x^5 u (2), dobijamo

$$(3)\qquad \sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5) .$$

Dalje je

$$x\sqrt[3]{1-x^2} = x\left(1 + \binom{1/3}{1}(-x^2) + \binom{1/3}{2}(-x^2)^2 + o(x^4)\right)$$

$$(4)\qquad = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + o(x^5) .$$

Zamenom (3) i (4) u (1), dobijamo

$$\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \frac{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9}\right)x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{19}{90} + o(1) ,$$

odakle je tražena granična vrednost jednaka 19/90.

Objasniti zašto je u razvojima (2) i (4) bilo dovoljno uzeti samo naznačeni broj članova. Da li bi se rezultat promenio da smo u sva tri razvoja za $\sin x$ u (2) ostavili sve članove do x^5?

586. Odrediti r iz jednakosti

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + r + O(1/x) \quad (x \to +\infty) ,$$

gde su p i q dati realni brojevi.

Rešenje. Primenom MACLAURINove formule imamo, kad $x \to +\infty$:

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x\sqrt{1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}}$$
$$= x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}\right) + o(1/x^2)\right)$$
$$= x + \frac{p}{2} + \frac{q}{2x} + o(1/x) = x + \frac{p}{2} + O(1/x) .$$

Odavde je $r = p/2$.

587. U zavisnosti od realnih parametara a i b, izračunati

$$L = \lim_{x \to +\infty} x^a(x^2(\sqrt[3]{x^3+1} - x) - b) .$$

Rešenje. Znajući MACLAURINov razvoj za funkciju $t \mapsto (1+t)^{1/3}$, za $t = 1/x^3$, dobijamo

$$\sqrt[3]{x^3+1} = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} = x\left(1+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{9x^6}+o(x^{-6})\right).$$

(Zašto nismo mogli da uvedemo smenu $t = x^3$ direktno u $\sqrt[3]{1+x^3}$?)
Dalje je, redom:

$$\sqrt[3]{x^3+1}-x = \frac{1}{3x^2}-\frac{1}{9x^5}+o(x^{-5}),$$

$$x^2(\sqrt[3]{x^3+1}-x)-b = \frac{1}{3}-b-\frac{1}{9x^3}+o(x^{-3}),$$

i, konačno:

$$(1)\qquad x^a(x^2(\sqrt[3]{x^3+1}-x)-b) = \left(\frac{1}{3}-b\right)x^a-\frac{1}{9}x^{a-3}+o(x^{a-3}).$$

Neka je $L(x)$ izraz sa desne strane u (1). Razlikovaćemo sledeće slučajeve:

1°. Za $a < 0$ je očigledno $L = 0$, bez obzira na b, jer svi sabirci u $L(x)$ teže nuli.

2°. Za $a = 0$ dobija se $L = 1/3 - b$.

3°. Za $a > 0$ i $b \neq 1/3$, vodeći član u (1) je $(1/3-b)x^a$. Prema tome, u ovom slučaju je $L = \operatorname{sgn}(1/3-b)\cdot\infty$.

4°. Ako je $0 < a < 3$ i $b = 1/3$, tada je $L = 0$.

5°. Za $a = 3$, $b = 1/3$, imaćemo da je $L(x) = -1/9 + o(1)$, pa je $L = -1/9$.

6°. Za $a > 3$ i $b = 1/3$, imamo da je $L = -\infty$.

588. Izračunati

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{\sin^2 2^x\pi}{\log\cos 2^x\pi}.$$

Rešenje. Uvedimo smenu $t = \sin^2 2^x\pi$. Tada je $\cos 2^x\pi = \sqrt{1-t}$, za x u dovoljno maloj okolini tačke 1, tako da je

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}\log(1-t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}(-t+o(t))} = -2.$$

589. Ako je

$$L(x) = \frac{x^2(a^x-1)}{\operatorname{tg}(x+\frac{x^3}{3})-\sin(x+\frac{x^3}{3})},\quad (a>0)$$

odrediti $\lim_{x\to 0} L(x)$.

Rešenje. Primenom MACLAURINovog razvoja dobijamo, kad $x \to 0$:

$$a^x - 1 = x\log a + o(x)\ . \tag{1}$$

Ako je $t = x + x^3/3$, tada je

$$\operatorname{tg} t - \sin t = \sin t \cdot \frac{1-\cos t}{\cos t} = (t+o(t))\left(\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\frac{1}{\cos t}$$

$$= (\frac{t^3}{2}+o(t^3))\frac{1}{\cos t}\ . \tag{2}$$

Zamenom (1) i (2) u izraz za L, dobijamo

$$L(x) = \frac{x^2(x\log a + o(x))\cos(x+x^3/3)}{\frac{1}{2}(x+x^3/3)^3 + o(x^3)}\ ,$$

gde smo koristili činjenice da je $o(t) = o(x)$ i da je $o(t)/\cos t = o(t)$ kad $t \to 0$. Odavde je

$$\lim_{x\to 0} L(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3\log a}{x^3} = 2\log a\ .$$

590. Naći granične vrednosti

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ $[\ e^{-1/6}\ ]$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arsh} x}{x}\right)^{1/x^2}$ $[\ e^{-1/6}\ ]$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$ $[\ e^{-1/2}\ ]$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$ $[\ e^{-2/\pi}\ ]$

►► 8.2.4

3.4.5 Taylorova formula za polinome

✓ *Ako je funkcija P polinom stepena n, tada je* TAYLOROv *polinom stepena n ove funkcije u okolini bilo koje tačke $a \in \mathbf{R}$ jednak P (jer su svi izvodi reda višeg od n identički jednaki nuli). Stoga za polinom P stepena n važi da je*

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

591. Primenom TAYLOROve formule, napisati polinom

$$P(x) = x^5 - x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x$$

u obliku polinoma po stepenima osnove $(x-1)$.

Rešenje. Imamo da je

$$P(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + P''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + P'''(1)\frac{(x-1)^3}{6} + P^{(4)}(1)\frac{(x-1)^4}{24} + P^{(5)}(1)\frac{(x-1)^5}{120}.$$

Nalaženjem izvoda, dobijamo

$$P(x) = 8 + 21(x-1) + 21(x-1)^2 + 11(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5.$$

592. Polinom

$$P(x) = x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 404x + 240$$

napisati u obliku polinoma po stepenima osnove $(x+3)$. $[\,(x+3)^5 - (x+3)\,]$

O TAYLOROVOJ FORMULI

BROOK TAYLOR u delu *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (1715) i COLLIN MACLAURIN, NEWTONov učenik i prijatelj, u *Treatise of Fluxions* (1742), dali su razvoje koji se danas nazivaju po njihovim imenima. TAYLOR je svoje razvoje koristio za integraciju nekih diferencijalnih jednačina. Značaj ovih razvoja nije u potpunosti shvaćen sve dok ih EULER nije primenio u diferencijalnom računu.

3.5 Monotonost i konveksnost

3.5.1 Monotonost

✓ *Ako funkcija* $x \mapsto f(x)$ *ima u tački* x_0 *izvod različit od nule, tada*

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} \Delta f(x_0) = \operatorname{sgn} \Delta x,$$

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} \Delta f(x_0) = -\operatorname{sgn} \Delta x.$$

U oba slučaja, u svakoj okolini tačke x_0 *postoje tačke* x *u kojima je* $f(x) > f(x_0)$*, kao i tačke* x *u kojima je* $f(x) < f(x_0)$.

✓ *Ako funkcija* f *ima pozitivan (negativan) izvod na intervalu* (a, b)*, tada je funkcija* f *monotono rastuća (opadajuća) na* (a, b).

- *Ako je funkcija* f *definisana u tački* x_0 *i ako za sve tačke* $x \neq x_0$ *u nekoj okolini tačke* x_0 *važi da je* $f(x) > f(x_0)$*, tada kažemo da funkcija* f *ima u tački* x_0 **lokalni minimum**. *Analogno se definiše* **lokalni maksimum**. *Lokalni minimum i maksimum se nazivaju i* **lokalni ekstremumi**, *za razliku od* **apsolutnih ekstremuma** *po čitavoj oblasti definisanosti.*

✓ **Fermatova teorema.** *Ako funkcija* f *ima izvod u tački* x_0 *u kojoj ima lokalni ekstremum, tada je* $f'(x_0) = 0$.

- *Tačke u kojima je prvi izvod funkcije jednak nuli nazivaju se* **stacionarne tačke** *date funkcije.*

✓ *Neka je* x_0 *stacionarna tačka funkcije* f. *Ako je* $f''(x_0) > 0$*, tada funkcija u tački* x_0 *ima lokalni minimum. Ako je* $f''(x_0) < 0$*, u tački* x_0 *funkcija ima lokalni maksimum. Ako je* $f''(x_0) = 0$*, neka je* k *red prvog sledećeg izvoda u* x_0 *koji je različit od nule, tj. neka je*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0\,,\, f^{(k)}(x_0) \neq 0\,,$$

pri čemu pretpostavljamo da je $f^{(k)}(x_0) \neq \pm\infty$. *Ako je* k *neparan broj, tada u tački* x_0 *ne postoji ekstremum. Ako je* k *paran broj, tada je* x_0 *tačka lokalnog minimuma ako je* $f^{(k)}(x_0) > 0$ *i tačka lokalnog maksimuma ako je* $f^{(k)}(x_0) < 0$.

593. Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$ i neka ima izvod u svim tačkama intervala $[a, b]$ sem eventualno u konačno mnogo tačaka $x_1, \ldots, x_n$. Neka je $f'(x) = 0$ u tačkama $y_1, \ldots, y_m$ koje pripadaju intervalu $[a, b]$. Dokazati da je

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(y_1), \ldots, f(y_m)\}\,,$$

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(y_1), \ldots, f(y_m)\}\,.$$

594. Naći minimum i maksimum funkcije

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 3$$

na intervalu $I = [-5, 1/5]$.

Rešenje. Izvod date funkcije je $f'(x) = 3x^2 + 12x - 3$. Jednačina $f'(x) = 0$ ima rešenja $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$, od kojih samo $x_2 = -2 - \sqrt{5}$ pripada intervalu I. Kako f' u tački x_2 menja znak sa $+$ na $-$, zaključujemo da f raste do x_2, a zatim opada, pa je x_2 tačka lokalnog maksimuma.

Prema tome, funkcija može imati ekstremume na I samo u tačkama $x_2, -5, 1/5$. Kako je $f(x_2) = f(-2-\sqrt{5}) = 25+10\sqrt{5} \approx 47.36$, $f(-5) = 43$, $f(1/5) = 331/125 \approx 2.65$, funkcija dostiže maksimum u tački x_2, a minimum u $1/5$.

595. Naći minimum i maksimum funkcije $x \mapsto y(x) = x^3 - 2x|x - 2|$ na intervalu $[0, 3]$.

Rešenje. Za $0 \leq x \leq 2$ imamo da je $|x - 2| = 2 - x$ i $y(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$. Izvod $y'(x) = 3x^2 + 4x - 4$ ima koren $x = 2/3$ u intervalu $[0, 2]$ i u toj tački funkcija dostiže lokalni minimum.

Za $2 < x \leq 3$ dobijamo $y(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$; izvod $y'(x) = 3x^2 - 4x + 4$ je pozitivan za svako x i funkcija nema stacionarnih tačaka.

Iz ove analize proizilazi da je minimalna vrednost funkcije y jednaka najmanjoj vrednosti od $y(0)$, $y(2)$, $y(3)$, $y(2/3)$; to je u ovom slučaju $y(2/3) = -40/27$. Maksimalna vrednost funkcije je najveća vrednost od $y(0)$, $y(2)$, $y(3)$, a to je $y(3) = 21$.

596. Odrediti ekstremume funkcije

$$f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}$$

i ispitati njihovu prirodu.

Rezultat. Minimumi u $x = -4\pi/3 + 4k\pi$, maksimumi u $x = 4m\pi$, $k, m \in \mathbf{Z}$.

597. Ispitati ekstremume funkcije

$$y = \sqrt{2x^2 - x + 2}\,.$$

Rezultat. Minimum $f(1/4) = \sqrt{15/8}$.

598. Ispitati monotonost funkcije

$$y = xe^{-3x}$$

i naći njene ekstremume.

Rezultat. Raste do $x = 1/3$, dalje opada. Maksimum u $x = 1/3$.

599. Ispitati monotonost funkcije

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Rešenje. Data funkcija je definisana za one $x \in \mathbf{R}$ za koje je $1 + 1/x > 0$, tj. $x > 0$ ili $x < -1$. Za ove vrednosti promenljive funkcija je pozitivna.
Prvi izvod je

$$y'(x) = y\left(\log\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) .$$

Prema tome, monotonost zavisi od znaka izraza

$$A(x) = \log\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} .$$

Za $x > 0$, prema LAGRANGEovoj teoremi, imamo da je

$$A(x) = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{c(x)} - \frac{1}{x+1} ,$$

za neko $c(x) \in (x, x+1)$. Odavde sledi da je $A(x) > 0$ za $x > 0$.
Ako je $x < -1$, tada smenom $x = -t$, $t > 1$ dobijamo

$$A(x) = \log(t-1) - \log t + \frac{1}{t-1} = -\frac{1}{c(t)} + \frac{1}{t-1} ,$$

gde je $c(t) \in (t-1, t)$, pa je ponovo $A(x) > 0$.
Odavde zaključujemo da je data funkcija monotono rastuća na svom domenu.

600. Ispitati da li funkcija

$$y = f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

ima ekstremum u nuli.

Rešenje. Kako je $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$, $f'(0) = 0$, tačka $x = 0$ je stacionarna tačka za datu funkciju. Dalje imamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2\cos x , \quad f''(0) = 0 , \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2\sin x , \quad f'''(0) = 0 , \\ f^{(4)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2\cos x , \quad f^{(4)}(0) = 4 . \end{aligned}$$

Prvi izvod koji je različit od nule je parnog reda; stoga funkcija u $x = 0$ ima ekstremum i to minimum, jer je $f^{(4)}(0) > 0$.

601. Da li funkcija

$$y = x^2(2\log x - 3) + 4x$$

ima ekstremum u tački $x = 1$?

Rezultat. Nema, jer je $y'(0) = y''(0) = 0$; $y'''(0) \neq 0$.

602. Dokazati pravilo o određivanju karaktera stacionarne tačke na osnovu znaka izvodâ.

Rešenje. Pretpostavimo da funkcija f ima u tački x_0 sve izvode do $k-1$-og reda jednake nuli, i neka je izvod k-tog reda različit od nule i konačan. Prema TAYLOROvoj formuli sa ostatkom u PEANOovom obliku (zadatak 555), u nekoj okolini tačke x_0 važi:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + o\left((x-x_0)^k\right) \qquad (x \to x_0)$$

U dovoljno maloj okolini tačke x_0, znak razlike $f(x) - f(x_0)$ je isti kao i znak veličine

$$A(x) = f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k .$$

Ako je k paran broj, tada je $(x-x_0)^k > 0$ za $x \neq x_0$; stoga je za svako x u okolini tačke x_0,

$$\operatorname{sgn}\left(f(x) - f(x_0)\right) = \operatorname{sgn} A(x) = \operatorname{sgn} f^{(k)}(x_0) .$$

Odavde sleduje da funkcija f ima u tački x_0 maksimum $(f(x) < f(x_0))$ ako je $f^{(k)}(x_0) < 0$ i minimum ako je $f^{(k)}(x_0) > 0$.

Ako je k neparan broj, tada $A(x)$ ima različit znak sa leve i desne strane tačke x_0; prema tome, u ovom slučaju funkcija nema ekstremum u tački x_0.

603. Za koju vrednost parametra $\alpha \in [0, \pi/2]$ minimum funkcije

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos\alpha - \sin\alpha) - 3x^2 \sin 2\alpha$$

na intervalu $-\sin\alpha \leq x \leq \cos\alpha$, ima najmanju vrednost ?

Uputstvo. Pokazati najpre da je

$$\min_{-\sin\alpha \leq x \leq \cos\alpha} f(x) = \varphi(\alpha) = \begin{cases} 7\sin^4\alpha - 10\sin^3\alpha\,\cos\alpha\,, & \text{za } \alpha \in [0, \pi/4]\,, \\ 7\cos^4\alpha - 10\sin\alpha\,\cos^3\alpha\,, & \text{za } \alpha \in [\pi/4, \pi/2]\,. \end{cases}$$

Zatim pokazati da funkcija $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$ na intervalu $[0, \pi/2]$ dostiže minimum u tačkama $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{31}-7}{5}$ i $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha_1$.

604. Neka je funkcija f diferencijabilna u nekoj okolini date tačke x_0. Ako je $f'(x_0) > 0$ da li funkcija f mora da bude monotono rastuća u nekoj okolini tačke x_0?

Rešenje. Ne mora, ako izvod nije pozitivan u svakoj tački neke okoline tačke x_0. Na primer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ima izvod

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin\dfrac{1}{x} - 2\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Posmatrajmo niz $x_n = 1/n\pi$ koji teži nuli. Kako je $f'(x_n) = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1}$, u svakoj okolini nule funkcija $f'(x)$ uzima vrednosti oba znaka. Stoga funkcija $x \mapsto f(x)$ nije monotona ni u jednoj okolini nule.

605. Ispitati da li je tačno tvrđenje: Ako je f diferencijabilna funkcija u okolini tačke x_0 u kojoj ima lokalni minimum, tada postoji jedna okolina tačke x_0 tako da f opada do x_0, a zatim raste od x_0.

Rešenje. Tvrđenje nije tačno. Na primer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

ima lokalni (i apsolutni) minimum u $x = 0$. Izvod ove funkcije

$$f'(x) = \begin{cases} x^2\left(4x\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) - \cos\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

uzima vrednosti oba znaka u tačkama koje su proizvoljno blizu nule, sa obe strane (na primer, posmatrati niz $x_n = 1/n\pi$, za $n \in \mathbb{Z}$).

3.5.2 Konveksnost i nejednakosti

- *Ako za svako* $\lambda \in [0,1]$ *i za svako* $x, y \in (a,b)$ *važi da je*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

tada kažemo da je funkcija f **konveksna** *na* (a,b).

- *Ako za svako* $\lambda \in [0,1]$ *i za svako* $x, y \in (a,b)$ *važi da je*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

tada kažemo da je funkcija f **konkavna** na (a,b).

√ *Funkcija f je konkavna na (a,b) ako i samo ako je funkcija $-f$ konveksna na (a,b).*

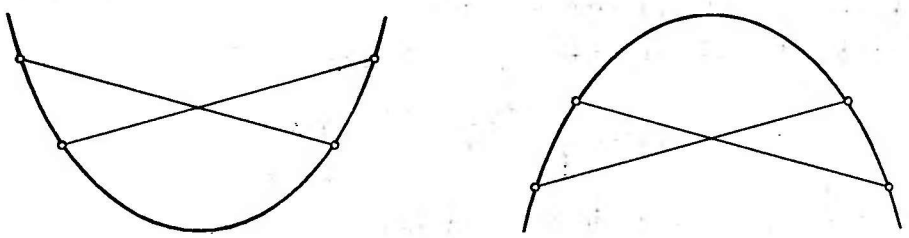
√ *Geometrijska interpretacija: Konveksna funkcija ima osobinu da je tetiva grafika krive iznad grafika; konkavna funkcija ima osobinu da je tetiva ispod grafika (videti sliku 15).*

√ *Ako je za $x \in (a,b)$, $f''(x) \geq 0$, tada je funkcija f konveksna na (a,b). Ako je $f''(x) \leq 0$ za $x \in (a,b)$, tada je funkcija f konkavna na (a,b).*

• *Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x_0. Ako je, za neko $h > 0$ funkcija konveksna na intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$, a konkavna na intervalu $(x_0, x_0 + h)$ ili obrnuto, tada kažemo da je x_0* **prevojna tačka** *funkcije f. Ponekad se pod prevojnom tačkom podrazumeva i tačka $(x_0, f(x_0))$, čija apscisa x_0 ispunjava navedeni uslov.*

√ *Ako je x_0 prevojna tačka funkcije f i ako postoji $f''(x_0)$, tada je $f''(x_0) = 0$.*

Osobine monotonosti i konveksnosti koriste se pri izvođenju i dokazivanju velikog broja nejednakosti.



konveksna funkcija konkavna funkcija

Slika 15. *Konveksna i konkavna funkcija*

606. Dokazati: Funkcija $x \mapsto f(x)$ je konveksna na (a,b), ako i samo ako za svaku n-torku realnih brojeva $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$, i za svaku n-torku pozitivnih brojeva $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0,1)$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ važi nejednakost

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{1}$$

Rešenje. Za $n = 2$, sa $\lambda_1 = \lambda$ i $\lambda_2 = 1 - \lambda$, iz (1) dobijamo da za svako $x_1, x_2 \in (a,b)$ važi

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

što, po definiciji, znači da je funkcija f konveksna na (a,b).

Obrnuto, neka je f konveksna na (a,b). Dokazaćemo traženo tvrđenje matematičkom indukcijom. Za $n=2$ tvrđenje je tačno, po definiciji konveksnosti, a za $n=1$ svodi se na jednakost. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n \in \mathbf{N}$. Neka su $x_1,\dots,x_{n+1}$ tačke u intervalu (a,b) i $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$ pozitivni brojevi čiji je zbir jednak 1. Neka je

$$S_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \qquad y = \frac{\lambda_1}{S_n}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{S_n}x_n.$$

Tada $y \in (a,b)$ i ako primenimo (1) na tačke y i x_{n+1}, dobijamo

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}) &= f(S_n y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \\ &\le S_n f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Na osnovu pretpostavke da tvrđenje važi za n tačaka, imamo

$$\begin{aligned} S_n f(y) &= S_n f\left(\frac{\lambda_1}{S_n}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{S_n}x_n\right) \\ &\le S_n\left(\frac{\lambda_1}{S_n}f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_n}{S_n}f(x_n)\right) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Iz (2) i (3) dobija se

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \le \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}),$$

čime je dokazano da tvrđenje važi za $n+1$ tačku.

607. Polazeći od osobine konveksnosti, izvesti nejednakosti između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine.

Rešenje. Funkcija $x \mapsto \log\frac{1}{x}$ je konveksna na $(0,+\infty)$, jer ima pozitivan drugi izvod u svakoj tački posmatranog intervala. Stoga je

$$\log\frac{1}{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n} \le \lambda_1 \log\frac{1}{x_1} + \cdots + \lambda_n \log\frac{1}{x_n}, \tag{1}$$

za proizvoljne $x_1,\dots,x_n > 0$ i za pozitivne $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, čiji je zbir jednak 1. Iz nejednakosti (1) dobijamo

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \ge x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n} \tag{2}$$

Ako u (2) stavimo $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n$, dobijamo

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

što je nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Zamenjujući u gornjoj nejednakosti x_i sa $1/x_i$, $i = 1, \ldots, n$, dobijamo nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

608. Dokazati: Ako je f konveksna funkcija na (a, b), tada za svako $x, y \in (a, b)$ i $\lambda < 0$ ili $\lambda > 1$ važi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

609. **Youngove nejednakosti.** Za $a > 0, b > 0$ i $1/p + 1/q = 1$, dokazati nejednakosti

(1) $$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \qquad (p > 1),$$

(2) $$a^{1/p} b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \qquad (0 < p < 1).$$

Dokazati da jednakost u oba slučaja važi ako i samo ako je $a = b$.

Rešenje. **I način:** Neka je

$$f(x) = \alpha x - x^{\alpha} + 1 - \alpha.$$

Imamo da je

(3) $$f(0) = 1 - \alpha, \qquad f'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha - 1}).$$

Za $\alpha \in (0, 1)$, iz (3) sledi da je $f(0) > 0$ i da je $f'(x) < 0$ za $0 < x < 1$, odnosno $f'(x) > 0$ za $x > 1$. Prema tome, funkcija ima minimum u $x = 1$, tako da za svako $x > 0$ važi $f(x) \geq f(1) = 0$, pri čemu jednakost $f(x) = 0$ važi samo za $x = 1$.

Za dato $a, b > 0$, stavimo sada $\alpha = 1/p$, $p > 1$, $x = a/b$. Nejednakost $f(a/b) \geq 0$ posle množenja sa $b > 0$ postaje

$$\frac{a}{p} - a^{1/p} b^{1 - 1/p} + b\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq 0,$$

što se svodi na nejednakost (1) ako se stavi $1/q = 1 - 1/p$. Jednakost važi ako i samo ako je $x = 1$, tj. $a = b$.

Druga nejednakost se dokazuje analogno: Za $\alpha > 1$, funkcija f ima maksimum u $x = 1$, pa je $f(x) \leq f(1) = 0$. Istom smenom kao u prvom slučaju dobijamo nejednakost (2).

II način: Iz nejednakosti (2) zadatka 607 dobijamo (za $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$),

$$x_1^{\lambda} x_2^{1-\lambda} \leq \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \quad (0 < \lambda < 1).$$

Ako se u poslednjoj nejednakosti stavi $\lambda = 1/p$, $1-\lambda = 1/q$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, dobija se nejednakost (1).

Ako je $\lambda > 1$, tada iz zadatka 608 sleduje da je

$$x_1^{\lambda} x_2^{1-\lambda} \geq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 ,$$

odakle se dobija (2) smenom $x_1 = a$, $x_2 = b$, $\lambda = 1/p$, $1-\lambda = 1/q$.

Primedba. Ako se umesto a uzme a^p, a umesto b uzme b^q, YOUNGove nejednakosti mogu se napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab \quad (p > 1), \qquad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab \quad (0 < p < 1).$$

610. Ako je $x > 0$, dokazati nejednakosti

(1) $$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x .$$

Rešenje. Neka je $f(x) = x - \log(1+x)$. Tada je $f(0) = 0$. Za $x > 0$ važi

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 1 - \frac{1}{1+0} > 0 ,$$

što znači da je za pozitivne vrednosti argumenta, funkcija f monotono rastuća, pa je $f(x) > f(0) = 0$, čime je dokazana desna nejednakost u (1).

Levu nejednakost dokazujemo na sličan način: Neka je $g(x) = \log(1+x) - x + x^2/2$. Tada je $g(0) = 0$, dok za $x > 0$ imamo:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0 .$$

Prema tome, funkcija g je rastuća za $x > 0$, pa je $g(x) > g(0) = 0$, što daje levu nejednakost u (1).

611. Dokazati da za $t > 0$ i $0 < \alpha < 1$ važi

(1) $$(1+t)^{\alpha} > 1 + \alpha t - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 .$$

Rešenje. Za fiksirano $\alpha \in (0,1)$, posmatrajmo funkciju

$$f(t) = (1+t)^{\alpha} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2 - \alpha t - 1 .$$

Prva dva izvoda funkcije f su

$$f'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1} + \alpha(1-\alpha)t - \alpha , \quad f''(t) = \alpha(1-\alpha)\left(1 - (1+t)^{\alpha-2}\right) .$$

Kako je $\alpha < 1$, onda je $\alpha - 2 < 0$, pa je $1-(1+t)^{\alpha-2} > 0$. Prema tome, $f''(t) > 0$ za $t > 0$. Odavde zaključujemo da je f' rastuća funkcija, odakle je $f'(t) > f'(0) = 0$ za svako $t > 0$. Stoga je f rastuća funkcija, pa je $f(t) > f(0) = 0$, čime je data nejednakost dokazana.

Generalizacija: Pokazati da nejednakost (1) važi još i u slučajevima:

$$\alpha < 0, t \in (-1,0)\,, \quad 1 < \alpha < 2, t \in (-1,0)\,, \quad \alpha > 2, t > 0\,.$$

Takođe pokazati da nejednakost

$$(1+t)^{\alpha} < 1 + \alpha t - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} t^2$$

važi ako je

$$\alpha < 0,\ t > 0\,, \quad \alpha \in (0,1),\ t \in (-1,0)\,, \quad \alpha \in (1,2),\ t > 0\,, \quad \alpha > 2,\ t > -1\,.$$

Primedba. Uporediti sa zadatkom 37.

612. Dokazati da za $x > 0, p > 0$ važi

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^{p} < e^{x} < \left(1+\frac{x}{p}\right)^{p+\frac{x}{2}} \tag{1}$$

Rešenje. Logaritmovanjem leve nejednakosti u (1), dobijamo ekvivalentnu nejednakost

$$p \log\left(1+\frac{x}{p}\right) < x\,. \tag{2}$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x - p\log(1 + x/p)$. Za $p > 0$ imamo da je

$$f(0) = 0\,, \quad f'(x) = \frac{x}{p+x} > 0 \ (x > 0)\,.$$

Prema tome, funkcija f je monotono rastuća za $x \geq 0$, pa je $f(x) > f(0) = 0$, čime je dokazano (2).

Desna nejednakost u (1) dokazuje se na sličan način, polazeći od funkcije $g(x) = (p + x/2)\log(1 + x/p) - x$. Za ovu funkciju važi da je

$$g(0) = 0\,, \quad g'(x) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x}{p}\right) - \frac{x}{2(x+p)}\,,$$

$$g''(x) = \frac{x}{2(x+p)^2} > 0 \quad (x > 0)\,.$$

Kako je $g''(x) > 0$, prvi izvod je rastuća funkcija, pa je $g'(x) > g'(0) = 0$ za $x > 0$. Odavde sledi da je i funkcija g rastuća i da je $g(x) > g(0) = 0$. Prema tome, važi i da je $\exp g(x) > 1$, a to je ekvivalentno desnoj nejednakosti u (1).

►► 8.5

3.6 Ispitivanje funkcija

3.6.1 Asimptote

- *Kažemo da je $x = a$* **vertikalna asimptota** *funkcije $x \mapsto f(x)$ ako je*

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a_+} f(x) = \pm\infty$$

Ako je samo

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = \pm\infty ,$$

tada kažemo da je $x = a$ leva vertikalna asimptota funkcije f. Analogno se definiše desna vertikalna asimptota.

- *Kažemo da je $y = b$ desna* **horizontalna asimptota** *funkcije $f(x)$ (ili horizontalna asimptota sa desne strane) ako je*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b .$$

Analogno se definiše leva horizontalna asimptota.

- *Ako je, za neko $a \neq 0$ i $b \in \mathbf{R}$,*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 , \tag{1}$$

tada kažemo da je prava $y = ax + b$ **desna kosa asimptota** *funkcije f. Ako jednakost (1) važi kada $x \to -\infty$, tada kažemo da je prava $y = ax + b$* **leva kosa asimptota** *funkcije f. Ako za iste vrednosti a i b, jednakost (1) važi u oba slučaja (kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$), tada kažemo da je $y = ax + b$* **obostrana kosa asimptota** *funkcije f.*

Geometrijsko tumačenje kose asimptote je da se grafik funkcije f za velike vrednosti promenljive neograničeno približava pravoj $y = ax + b$.

Funkcija ne mora da ima kosu asimptotu, ili je može imati samo sa jedne strane.

Da bismo izbegli ponavljanje, posmatraćemo samo slučaj desne kose asimptote, tj slučaj kada $x \to +\infty$.

Iz (1) sledi da f ima desnu kosu asimptotu ako i samo ako je

$$f(x) = ax + b + g(x),$$

gde $g(x) \to 0$ kada $x \to +\infty$.

√ *Parametri a i b desne kose asimptote nalaze se iz jednakosti*

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} , \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) . \tag{2}$$

Ako su obe granične vrednosti u (2) konačne i ako je $a \neq 0$, tada je $y = ax+b$ kosa asimptota. Ako je $a = 0$ i b konačno, funkcija nema kosu, ali ima horizontalnu asimptotu $y = b$. Ako je neka od graničnih vrednosti u (2) beskonačna, kosa asimptota ne postoji.

Ako funkcija ima horizontalnu asimptotu sa jedne strane, onda sa te strane ne može postojati kosa asimptota. Važi i obrnuto: postojanje kose asimptote sa jedne strane isključuje mogućnost postojanja horizontalne asimptote sa te iste strane.

Naravno, postojanje kose asimptote sa, na primer, desne strane, ne isključuje mogućnost postojanja horizontalne asimptote sa leve strane.

613. Odrediti asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}.$$

Rešenje. Jednačina $x^2 + x - 2 = 0$ ima rešenja $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, pa data funkcija ima vertikalne asimptote $x = 1$ i $x = -2$. Detaljnije, iz

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+2)},$$

ispitivanjem znaka funkcije, nalazimo da je

$$\lim_{x \to -2_-} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -2_+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1_-} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1_+} = +\infty.$$

Kako je $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.
Iz jednakosti

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 + x^2 - 2x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - (x^3 + x^2 - 2x)}{x^2 + x - 2} = -1,$$

nalazimo da je obostrana kosa asimptota prava $y = x - 1$.

614. Naći asimptote funkcije

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$

Rešenje. Data funkcija je definisana za svako $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ i nema vertikalnih asimptota. Horizontalnih asimptota takođe nema, jer je $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Kose asimptote možemo naći primenom TAYLORovog razvoja. Naime, kada $x \to +\infty$ imamo da je

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$
$$= x\left(1+\frac{1}{2x}+o(1/x)\right) = x+\frac{1}{2}+o(1),$$

odakle sleduje da je prava $y = x + 1/2$ desna kosa asimptota date funkcije.
Kada $x \to -\infty$ na sličan način nalazimo

$$f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$
$$= -x\left(1+\frac{1}{2x}+o(1/x)\right) = -x-\frac{1}{2}+o(1),$$

pa je, prema tome, leva kosa asimptota prava $y = -x - 1/2$.

615. Naći asimptote sledećih funkcija:

a) $\sqrt[3]{x^2-x^3}$ [$1/3 - x$ kosa]

b) $xe^{1/x}$ [$x = 0$ desna vert., $y = x + 1$ kosa]

c) $\log(1+e^x)$ [$y = 0$ leva horizont., $y = x$ desna kosa]

d) $x\sin\frac{1}{x} + \left(x^2+x-x^2e^{-1/x}\right)$ [$x = 0$ leva vert., $y = 2x + 1/2$ kosa]

e) $\sqrt{x^2-1}\exp\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [$x = \pm 1$ vert., $y = \pm x + 1$ kosa]

3.6.2 Ispitivanje funkcija

Pri ispitivanju date funkcije treba uraditi sledeće:

1°. Odrediti oblast definisanosti (domen) funkcije i granične vrednosti na krajevima domena.

2°. Ispitati parnost i periodičnost.

3°. Odrediti asimptote (horizontalne, vertikalne, kose).

4°. Naći nule funkcije i ispitati njen znak.

5°. Ispitati prvi izvod, monotonost i naći ekstremume.

6°. Ispitati konveksnost i naći prevojne tačke.

7°. Na osnovu prethodnih elemenata, nacrtati grafik funkcije.

616. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(x-2)} \,. \tag{1}$$

Rešenje. Funkcija f je definisana za svako $x \neq 0, 2$. $f(x) = 0$ za $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Znak date funkcije ćemo ispitati pomoću sledeće tabele:

$x \in$	$(-\infty, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+
$x+1$	−	+	+	+	+
x	−	−	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	−	+

Kako je imenilac u (1) jednak nuli za $x = 0$ i za $x = 2$, u tim tačkama funkcija ima vertikalne asimptote. Iz tabele zaključujemo da je

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = +\infty \,, \quad \lim_{x \to 0_+} f(x) = -\infty \,,$$

$$\lim_{x \to 2_-} f(x) = -\infty \,, \quad \lim_{x \to 2_+} f(x) = +\infty \,.$$

Kad $x \to \pm\infty$, imamo

$$f(x) = \frac{x^3 + \dots}{x^2 - 2x} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \,,$$

odakle je

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,.$$

Ispitajmo kose asimptote. Imamo da je

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + \cdots}{x^2(x-2)} = 1 \,.$$

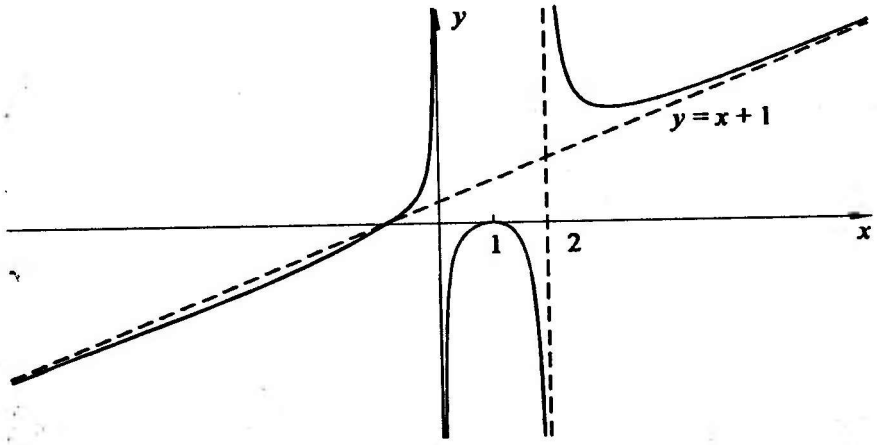
Kako je $a \neq 0$, $a \neq \pm\infty$, funkcija ima kosu asimptotu $y = x + b$, gde je

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x} = 1;$$

dakle, prava $y = x + 1$ je obostrana kosa asimptota.

Prelazimo sada na ispitivanje izvoda. Nalaženjem prvog izvoda na uobičajeni način, posle sređivanja dobijamo:

$$y' = \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2)}{x^2(x-2)^2} \,. \tag{2}$$



Slika 16. *Grafik funkcije iz zadatka 616.*

Jedna stacionarna tačka je $x_3 = 1$, a ostale stacionarne tačke, ukoliko ih ima, su realna rešenja jednačine

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 2 = 0 \,. \tag{3}$$

Polinom u (3) nema racionalnih nula (videti 1.2.3 na strani 23). Da bismo odredili broj nula i njihov položaj, ispitaćemo polinomsku funkciju $x \mapsto g(x)$. Kako je

$$g'(x) = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2 \,,$$

zaključujemo da funkcija g raste za $x \in (-\infty, 0)$ od $-\infty$ do $g(0) = -2$; zatim opada za $x \in (0,2)$ od $g(0) = -2$ do $g(2) = -6$. Dakle, za $x \in (-\infty, 2]$, funkcija g nema nula. Kako $g(x) \to +\infty$ kad $x \to +\infty$, na intervalu $(2, +\infty)$ postoji bar jedna nula funkcije g. To je i jedina nula, jer bi u slučaju da postoje dve nule, između njih postojala jedna nula izvoda funkcije g; kako izvod nema nula u $(2, +\infty)$, to onda nije moguće.

Prema tome, f ima još jednu stacionarnu tačku, nazovimo je x_4, u intervalu $(2, +\infty)$. Do približne vrednosti za x_4 možemo da dođemo na razne načine, na primer, **metodom polovljenja intervala** (videti zadatak 1253). Kako je $g(2) < 0$ i $g(4) = 14 > 0$, imamo da je $x_4 \in (2,4)$. Na sredini ovog intervala imamo $g(3) = -2 < 0$, pa je $x_4 \in (3,4)$. Dalje, iz $f(3\frac{1}{2}) = 4.125 > 0$ sledi $x_4 \in (3, 3\frac{1}{2})$ itd.

Ispitajmo sada znak prvog izvoda funkcije f. Iz (2), kao i iz ispitivanja funkcije g, date sa (3), zaključujemo da je $f' > 0$ (f raste) za $x < 0$ i za $x \in (0,1)$, zatim $f' < 0$ (f opada) za $x \in (1,2) \cup (2, x_4)$, i $f' > 0$ za $x > x_4$. Dakle, u $x_3 = 1$ je lokalni maksimum, a u x_4 je lokalni minimum funkcije f.

Drugi izvod je

$$f''(x) = 2\frac{x^3+3x^2-6x+4}{x^3(x-2)^3} \cdot \tag{4}$$

Ispitivanjem funkcije u brojiocu izraza (4) zaključujemo da f'' ima samo jednu nulu $x_5 \in (-5,-4)$. Funkcija je konveksna ($f'' > 0$) za $x \in (x_5,0) \cup (2,+\infty)$, a konkavna u ostalom delu domena.

Grafik je dat na slici 16.

617. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije date sa:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \cdot$$

Rešenje. Funkcija je definisana za svako $x \neq -1$. Vertikalna asimptota je $x = -1$, i u toj tački y menja znak. Funkcija ima nulu u $x = 0$, ali ne menja znak. Dakle, za $x < -1$ je $y < 0$, dok je $y \geq 0$ za $x > -1$.

Za veliko $|x|$, imamo da je $f(x) \sim x^{1/3}$, odakle sledi da funkcija nema horizontalnih ni kosih asimptota, i da je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \,.$$

Prvi izvod je

$$f'(x) = \frac{x+2}{3x^{1/3}(x+1)^{4/3}} \cdot$$

Ispitivanjem znaka funkcije f', nalazimo da f raste u intervalu $(-\infty,-2)$, opada u intervalima $(-2,-1)$ i $(-1,0)$, a zatim raste od 0 do $+\infty$. Prema tome, lokalni maksimum funkcije je $f(-2) = -\sqrt[3]{4}$, dok je lokalni minimum $f(0) = 0$. Međutim, izvod nije definisan u tačkama $x = -1$ i $x = 0$. Kako je f definisana u $x = 0$, potrebno je naći graničnu vrednost izvoda, da bi se odredili uglovi pod kojim grafik ulazi i izlazi iz tačke $(0,0)$. Iz

$$\lim_{x\to0_-} f'(x) = -\infty \,, \quad \lim_{x\to0_+} f'(x) = +\infty \,,$$

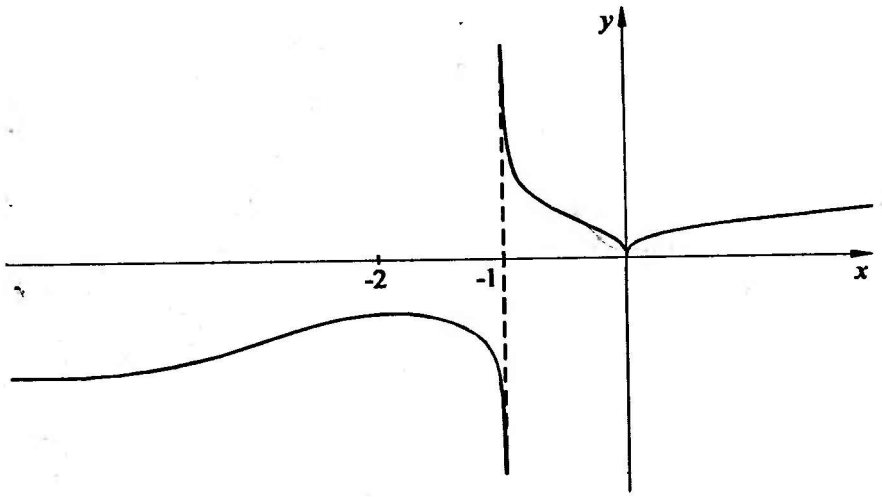
zaključujemo da se leva i desna tangenta u $(0,0)$ poklapaju sa y-osom, ali tangenta ne postoji. Ovakva tačka naziva se **povratna tačka** ili "špic" funkcije f; grafik ulazi i izlazi iz koordinatnog početka pod pravim uglom u odnosu na x-osu.

Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+4x+1)}{9x^{4/3}(x+1)^{7/3}} \cdot$$

Funkcija f'' menja znak u $x = -1$, kao i u tačkama $x_{1,2} = -2 \mp \sqrt{3} < 0$, koje su nule kvadratnog trinoma $x \mapsto x^2+4x+1$. Ispitivanjem znaka drugog izvoda, zaključujemo da je f konveksna u intervalima $(-\infty,x_1)$ i $(-1,x_2)$, a van ovih intervala je konkavna.

Grafik je dat na slici 17.



Slika 17. *Grafik funkcije* $y = (x^2/(x+1))^{1/3}$.

618. Ispitati i grafički predstaviti funkciju

$$y = f(x) = (6x^2 - x^3)^{1/3} .$$

Rešenje. Na primeru ove funkcije ćemo prikazati **metod crtanja grafika funkcije po etapama**.Ovaj metod se sastoji u tome da se odmah posle nekoliko koraka (na primer, posle nalaženja nula i graničnih vrednosti) skicira grafik funkcije, koji se zatim upotpunjuje i prepravlja sa svakim novim korakom.

Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$. Kako je

$$f(x) = \left(x^3\left(\frac{6}{x} - 1\right)\right)^{1/3} = x\left(\frac{6}{x} - 1\right)^{1/3} ,$$

imamo sledeće granične vrednosti:

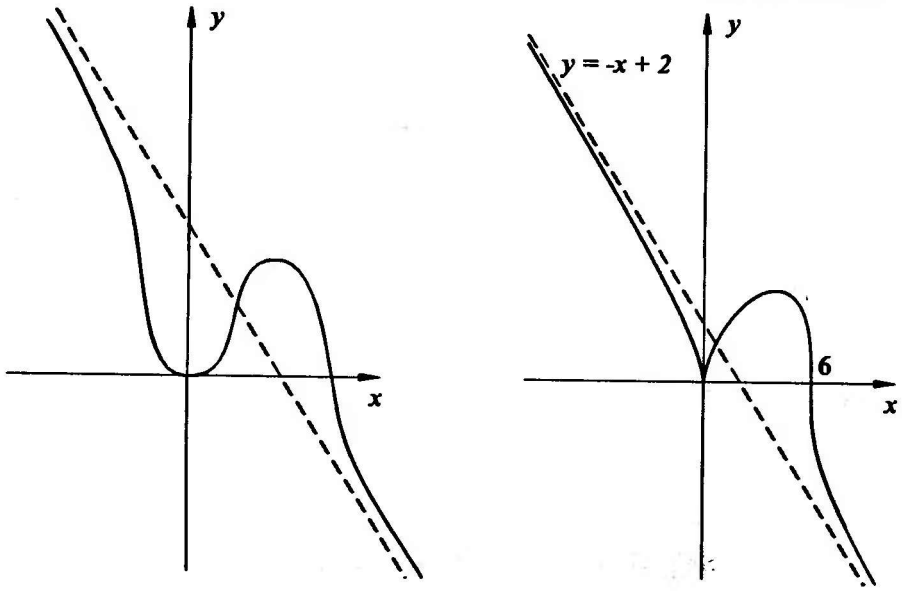
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{(parametar } a \text{ kose asimptote } y = ax + b\text{)}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) + x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(-\left(1 - \frac{6}{x}\right)^{1/3} + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(-1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{x} + o(1/x) + 1\right) = 2.$$

Prema tome, funkcija ima obostranu kosu asimptotu $y = -x + 2$.



Slika 18. *Dve etape u konstrukciji grafika funkcije* $y = (6x^2 - x^3)^{1/3}$.

Nule funkcije su $x_1 = 0$ i $x_2 = 6$. Znak funkcije je isti kao i znak izraza $x^2(6-x)$, dakle, $y \geq 0$ za $x \leq 6$ i $y < 0$ za $x > 6$.

Na osnovu dobijenih podataka, možemo da skiciramo grafik kao na slici 18a. Naravno, ovaj grafik nije definitivan. Potrebno je videti da li je kriva iznad ili ispod asimptote, a takođe treba ispitati izvode. Sa grafika se vidi da funkcija ima maksimum između 0 i 6, kao i minimum u nuli.

Prvi izvod je

$$y'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$

Odavde sleduje da funkcija f ima maksimum u $x = 4$. Funkcija y' nije definisana za $x = 0$ ni za $x = 6$, pa u tim tačkama treba odrediti granične vrednosti za y':

$$\lim_{x \to 0_-} y'(x) = -\infty \,, \quad \lim_{x \to 0_+} y'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 6} y'(x) = -\infty \quad \text{(sa obe strane)}$$

Prema tome, u tački $x = 0$ funkcija nema izvod: do nule ona opada maksimalnom brzinom, a od nule raste maksimalnom brzinom. Leva i desna tangenta se poklapaju sa y-osom (ali ipak tangenta ne postoji).

U tački $x = 6$, tangenta je paralelna sa y-osom; izvod je beskonačan.

Na osnovu ovih novih podataka, možemo da nacrtamo grafik kao na slici 18b.

Sa ove slike je jasno da funkcija ima prevojnu tačku u $x = 0$ i $x = 6$.

Za drugi izvod se dobija (posle sređivanja):

$$y''(x) = -\frac{8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}},$$

što potvrđuje zaključke koje smo izveli sa grafika 18b. Funkcija je konkavna ($y'' < 0$) za $x < 0$ i za $x \in (0,6)$, i konveksna za $x > 6$.

Prema tome, kriva izgleda kao na slici 18b.

619. Ako je

$$y = f(x) = \frac{\log|x|}{x} - x + 1, \tag{1}$$

ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Funkcija je definisana za svako $x \neq 0$. Nije ni parna ni neparna.

Kad $x \to \pm\infty$, tada $(\log|x|)/x \to 0$, pa je prava $y = -x+1$ obostrana kosa asimptota. Ispitivanjem znaka funkcije $x \mapsto (\log|x|)/x$ nalazimo da je grafik funkcije $f(x)$ iznad asimptote za $x \in (-1,0)$ i za $x > 1$, dok je u ostalim tačkama ispod asimptote, osim za $x = \pm 1$, gde grafik krive ima preseke sa asimptotom.

Vertikalna asimptota je prava $x = 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0_+} f(x) = -\infty.$$

Očigledno je $f(1) = 0$. Potrebno je ispitati da li ima drugih nula. Ovo ćemo uraditi na kraju, kada analiziramo f' i f''.

Izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1 - \log|x| - x^2}{x^2}.$$

Izvod je jednak nuli za $x = \pm 1$.

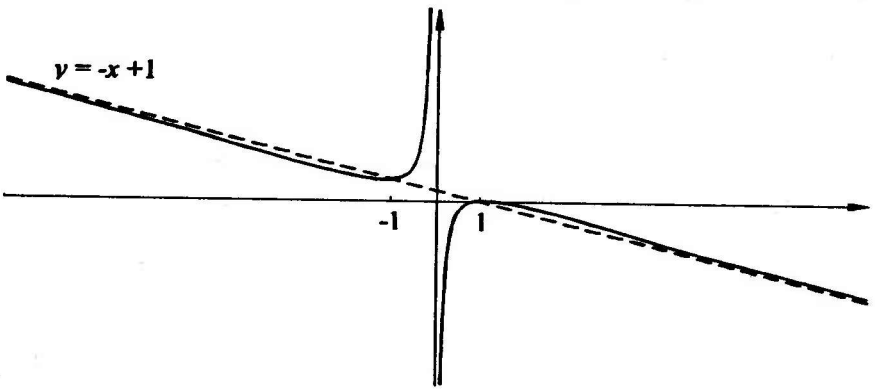
Drugi izvod je

$$f''(x) = \frac{2\log|x| - 3}{x^3}.$$

Prevojne tačke funkcije f su $\pm e^{3/2}$. Funkcija je konveksna ($f'' > 0$) za $x \in (-e^{3/2}, 0) \cup (e^{3/2}, +\infty)$ i konkavna za $x \in (-\infty, -e^{3/2}) \cup (0, e^{3/2})$.

Ispitajmo da li f' ima drugih nula osim nađenih. Na osnovu znaka funkcije f'', zaključujemo da funkcija f' opada u intervalu $(-\infty, -e^{3/2})$. Kako je $f'(-e^{3/2}) \approx -1.025$, dok $f'(x) \to -1$ kada $x \to -\infty$, funkcija f' nema nula u $(-\infty, -e^{-3/2}]$. Na sličan način se pokazuje da f' nema nula u $(e^{3/2}, +\infty)$. Kako f'' ne menja znak u intervalima $(-e^{-3/2}, 0)$ i $(0, e^{3/2})$, funkcija f' je monotona u navedenim intervalima, i u svakom od njih može da ima najviše po jednu nulu, a to su već nađene vrednosti ± 1.

Na osnovu znaka prvog izvoda zaključujemo da funkcija f opada za $x \in (-\infty, -1)$, zatim raste za $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ i opada za $x \in (1, +\infty)$.



Slika 19. *Grafik funkcije* $\dfrac{\log|x|}{x} - x + 1$

Kako je $f(-1) = 2$, imamo da je $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 0)$. Ako je $x > 1$, tada je $f(x) < f(1) = 0$. Dakle, funkcija nema nula za $x < 0$ ni za $x > 1$. U intervalu $(0, 1)$ funkcija monotono raste od $-\infty$ do $f(1) = 0$, pa ni u ovom intervalu nema nula. Prema tome, jedina nula funkcije je $x = 1$.

Grafik funkcije je predstavljen na slici 19.

620. Data je funkcija

$$y = f(x) = \frac{x}{1 + \log x} .$$

Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Domen funkcije je $D = (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$. Na krajevima domena imamo

$$f(0_+) = \lim_{x \to 0_+} f(x) = 0_-, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \to e^{-1}_-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to e^{-1}_+} f(x) = +\infty ,$$

iz čega zaključujemo da funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = e^{-1}$. Kako je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \log x} = 0 ,$$

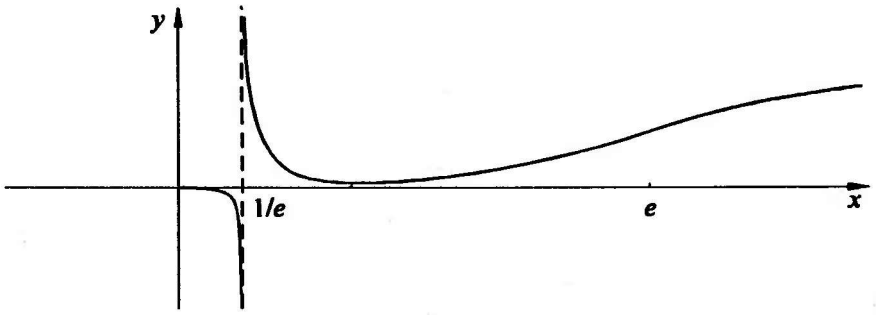
funkcija nema kosih asimptota.

Na skupu D na kome je definisana, ova funkcija nema nula. Znak funkcije u oblasti D zavisi samo od znaka imenioca, pa imamo da je

$$y < 0 \text{ za } x \in (0, e^{-1}), \quad y > 0 \text{ za } x \in (e^{-1}, +\infty) .$$

Prvi izvod je

$$y'(x) = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2} .$$



Slika 20. *Grafik funkcije* $y = x/(1+\log x)$

Funkcija ima minimum u $x = 1$, $y_{\min} = 1$. Nagib desne tangente u nuli dobija se iz

$$\lim_{x\to 0_+} y'(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{(1+\log x)^2} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{(1+t)^2} = 0,$$

pa se, s obzirom na $f(0_+) = 0$, desna tangenta u nuli poklapa sa x- osom.
Iz drugog izvoda

$$y''(x) = \frac{1-\log x}{x(1+\log x)^3}$$

zaključujemo da je $x = e$ prevojna tačka. Funkcija ima pozitivan drugi izvod (konveksna je) za $x \in (e^{-1}, e)$, a konkavna je na skupu $(0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$.
Grafik je dat na slici 20.

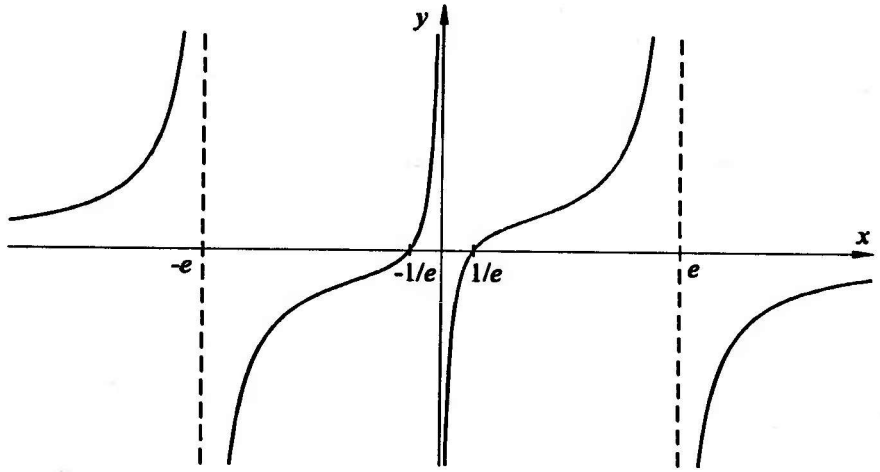
621. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = \frac{1+\log|x|}{x(1-\log|x|)}.$$

Rešenje. Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R} \setminus \{-e, 0, e\}$ i neparna je. Dakle, možemo se ograničiti na skup $x > 0$, na kome ćemo ispitati funkciju.
Nula date funkcije je $x = 1/e$. Funkcija menja znak i u tački $x = e$, tako da je na intervalu $(0, 1/e)$ negativna, kao i na $(e, +\infty)$, dok je za ostale $x > 0$ funkcija pozitivna.
Granične vrednosti dobijamo primenom L'HOSPITALovog pravila:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x\log x} = 0_-$$

$$\lim_{x\to 0_+} y(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1+\log x}{x}}{1-\log x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x} = -\infty.$$



Slika 21. *Grafik funkcije* $y = \dfrac{1+\log|x|}{x(1-\log|x|)}$.

Pored $x = 0$, vertikalna asimptota je i prava $x = e$, i imamo da je

$$\lim_{x\to e_-} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to e_+} y(x) = -\infty.$$

Kako je prvi izvod

$$y'(x) = \frac{1+\log^2 x}{x^2(1-\log x)^2},$$

zaključujemo da je funkcija rastuća na svom domenu.

Drugi izvod je

$$y''(x) = -\frac{2\log x\,(\log^2 x - \log x + 2)}{x^3(\log x - 1)^3}.$$

Jedna prevojna tačka je $x = 1$. Drugi faktor u brojiocu je uvek pozitivan, jer je diskriminanta kvadratnog trinoma $u^2 - u + 2$ (za $u = \log x$) negativna. Dakle, postoji samo jedna nula drugog izvoda, ali funkcija menja konveksnost još i u tačkama $x = 0$ i $x = e$ (nule imenioca drugog izvoda).

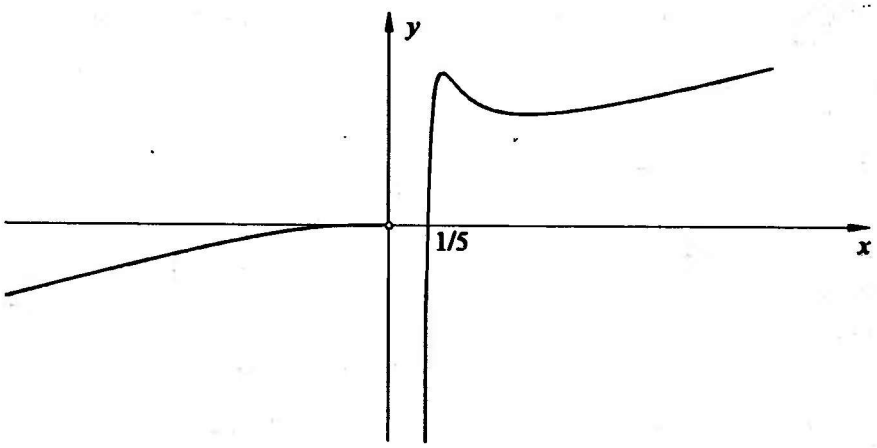
Na osnovu ovog ispitivanja, možemo da nacrtamo grafik kao na slici 21.

622. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = (5x-1)e^{1/x}.$$

Rešenje. Data funkcija je definisana za svako $x \neq 0$ i imamo da je

$$\lim_{x\to 0_-} (5x-1)e^{1/x} = 0_-, \quad \lim_{x\to 0_+} e^{1/x} = +\infty.$$



Slika 22. *Grafik funkcije* $y = (5x-1)e^{1/x}$.

Kad $x \to \pm\infty$, primenom MACLAURINovog razvoja dobijamo

$$(1)\qquad \begin{aligned}(5x-1)e^{1/x} &= (5x-1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(1/x^2)\right)\\ &= 5x+4+\frac{3}{2x}+o(1/x),\end{aligned}$$

pa je prava $y = 5x+4$ obostrana kosa asimptota. Iz (1) se takođe vidi da je, za dovoljno velike vrednosti $|x|$, grafik funkcije iznad (ispod) asimptote ako je $x > 0$ $(x < 0)$.

Očigledno je $f(1/5) = 0$, i funkcija nema drugih nula.

Prvi izvod je

$$f'(x) = \frac{5x^2-5x+1}{x^2}e^{1/x}\,.$$

Nule prvog izvoda su koreni jednačine $5x^2-5x+1=0$, $x_{1,2} = 1/2 \mp \sqrt{5}/10 > 0$. Ispitivanjem znaka kvadratnog trinoma, zaključujemo da je $f' > 0$ za $x < x_1$, $f' < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$ i $f' > 0$ za $x > x_2$. Prema tome, funkcija ima lokalni maksimum u tački x_1 i lokalni minimum u x_2. Ostaje još da se ispita ugao koji leva tangenta u koordinatnom početku gradi sa x-osom. Kako je

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) = \lim_{x\to 0_-}\frac{1}{x^2}e^{1/x} = 0\,,$$

ugao je jednak nuli. S obzirom da je $f(0_-) = 0$, leva tangenta u $x = 0$ je x-osa.

Drugi izvod je

$$\frac{3x-1}{x^4}e^{1/x}.$$

Funkcija ima prevojnu tačku $x_3 = 1/3$, Za $x < x_3$, funkcija je konkavna, dok je za $x > x_3$ konveksna.

Grafik je nacrtan na slici 22.

623. Data je funkcija

$$y = (x^3 - x^2)e^{-x} .$$

Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$. Granične vrednosti i izvodi su, redom:

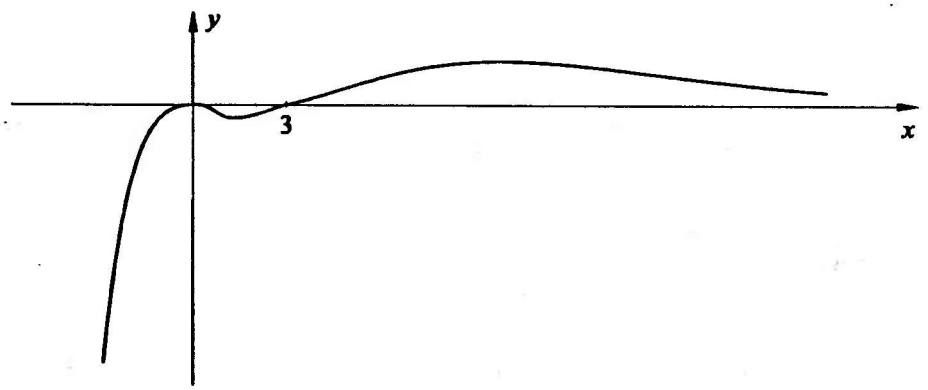
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$$

$$f'(x) = xe^{-x}(-x^2 + 6x - 6), \quad f''(x) = e^{-x}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6) .$$

Funkcija ima nule za $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ i stacionarne tačke za $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{3}$ i za $x = 0$.

Detaljnijom analizom se može pokazati da f'' ima po jednu nulu u intervalima $(0,1)$, $(2,3)$ i $(6,7)$.

Grafik je nacrtan na slici 23.



Slika 23. *Grafik funkcije* $y = (x^3 - x^2)e^{-x}$.

624. Ispitati funkciju datu sa

$$y = f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Funkcija je definisana za svako $x \neq 0$. Kad $x \to 0$, pomoću MACLAURINovog razvoja za e^x dobijamo

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x + o(x)} = 0 .$$

Prema tome, u tački $x_1 = 0$ funkcija ima otklonjiv prekid.

Funkcija nije ni parna ni neparna. Primenom L'HOSPITALovog pravila nalazimo da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0,$$

pa funkcija ima desnu horizontalnu asimptotu $y = 0$.

Kako je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = +\infty,$$

funkcija nema levu horizontalnu asimptotu. Iz

$$y = \frac{x^3}{e^x - 1} \sim -x^3 \quad (x \to -\infty),$$

zaključujemo da funkcija nema ni kosu asimptotu sa leve strane.

Prvi izvod je

$$y' = \frac{x^2\big((3-x)e^x - 3\big)}{(e^x - 1)^2} .$$

Nule i znak prvog izvoda zavise od ponašanja funkcije $g(x) = (3 - x)e^x - 3$. Očigledno je $g(0) = 0$. Ispitajmo da li funkcija g ima još nula. Kako je

$$g'(x) = (2 - x)e^x .$$

funkcija $y = g(x)$ raste do $x = 2$ i opada od $x = 2$. Kako je $g(2) > 0$ i $g(x) \to -\infty$ kad $x \to +\infty$, funkcija g ima jednu (i samo jednu) nulu x_2 u intervalu $(2, +\infty)$. Numeričkim metodama se može dobiti da je $x_2 \approx 2.8$.

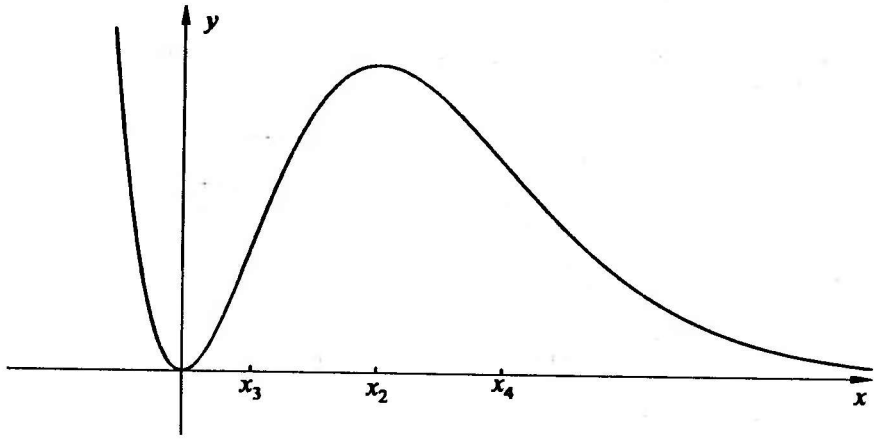
Funkcija f nije definisana u $x_1 = 0$, ali kad $x \to 0$ imamo

$$f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x) \sim \frac{x^2}{x^2} g(x) = g(x) \to 0 .$$

Ispitivanjem znaka funkcije g, utvrđujemo da je $f'(x) < 0$ za $x < 0$, $f'(x) > 0$ za $x \in (0, x_2)$ i $f'(x) < 0$ za $x > x_2$. Dakle, f ima maksimum u x_2 i **infimum** u nuli.

Drugi izvod je

$$f''(x) = \frac{x\left(e^{2x}(x^2 - 6x + 6) + e^x(x^2 + 6x - 12) + 6\right)}{(e^x - 1)^3} .$$



Slika 24. *Grafik funkcije* $y = x^3/(e^x - 1)$.

Ispitivanje drugog izvoda zahtevalo bi poseban zadatak. Primetimo samo da je

$$f''(x) \sim \frac{6x}{(e^x-1)^3} \quad (x \to -\infty), \qquad f''(x) \sim \frac{x^3 e^{2x}}{e^{3x}} \quad (x \to +\infty),$$

odakle sleduje da je drugi izvod pozitivan za dovoljno velike vrednosti $|x|$. Pored toga, može se pokazati da je $\lim_{x\to 0} f''(x) = 2$. Ispitivanjem znaka kvadratnih trinoma $x \mapsto x^2 - 6x + 6$ i $x \mapsto x^2 + 6x - 12$, može se zaključiti da je drugi izvod pozitivan za sve vrednosti x koje su van intervala $(-3 - \sqrt{21}, 3 + \sqrt{3})$. Kako je u tački x_2 maksimum funkcije, tu je drugi izvod negativan. Prema tome, postoji jedna prevojna tačka $x_3 \in (0, x_2)$ i jedna prevojna tačka $x_4 \in (x_2, 3 + \sqrt{3})$. Numeričkim metodama se može dobiti da je $x_3 \approx 0.99$ i da je $x_4 \approx 4.62$. Funkcija nema prevojnih tačaka za $x < 0$.

Grafik je nacrtan na slici 24.

625. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije f date sa:

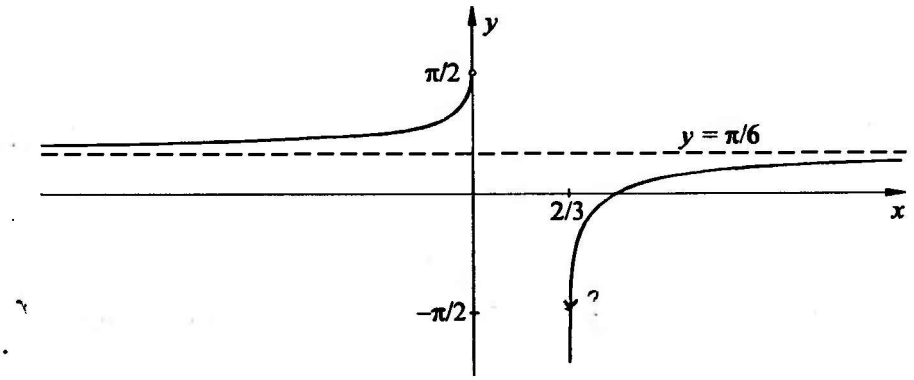
$$y = f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1-2x} .$$

Rešenje. Kako je funkcija $t \mapsto \arcsin t$ definisana za $|t| \leq 1$, funkcija f je definisana za one vrednosti x za koje je

$$-1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \leq 1 . \tag{1}$$

Rešenje ovog sistema nejednačina je

$$x \in (-\infty, 0] \cup [2/3, +\infty) , \tag{2}$$



Slika 25. *Grafik funkcije* $y = \arcsin \frac{1-x}{1-2x}$.

i to je domen funkcije f. Na krajevima intervala u (2), dobijamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\,,\quad f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\,,\quad f(2/3) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Prema tome, funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = \pi/6$.

Funkcija ima jedinu nulu u tački $x = 1$. Kako $(1-x)/(1-2x)$ menja znak u tačkama $x = 1$ i $x = 1/2$, zaključujemo da je $y > 0$ za $x \le 0$ i za $x > 1$, dok je $y < 0$ za $x \in [2/3, 1)$.

Prvi izvod je

$$y'(x) = \frac{1}{|1-2x|\sqrt{x(3x-2)}} > 0$$

pa je funkcija monotono rastuća na svom domenu. Za drugi izvod se dobija

$$y''(x) = \frac{12x^2 - 9x + 1}{(x(3x-2))^{3/2}(1-2x)^2}\operatorname{sgn}(1-2x)\,.$$

Primetimo da, s obzirom na domen, $\operatorname{sgn}(1-2x)$ u gornjem izrazu može da se zameni sa $-\operatorname{sgn} x$. Kako je $12x^2 - 9x + 1 > 0$ u celom domenu funkcije f (jer nule ovog kvadratnog trinoma pripadaju intervalu (0,2/3)), znak drugog izvoda će zavisiti samo od znaka x. Prema tome, funkcija je konveksna za $x < 0$ i konkavna za $x > 2/3$. Grafik je dat na slici 25.

Primedba. Konveksnost se može ispitati i bez nalaženja drugog izvoda. Naime, kako funkcije $x \mapsto x(3x-2)$ i $x \mapsto |1-2x|$ opadaju za $x < 0$ i rastu za $x > 2/3$, može se zaključiti da prvi izvod raste za $x < 0$ (f je konveksna), odnosno opada za $x > 2/3$ (f je konkavna). Ovaj način ispitivanja konveksnosti je brži i pouzdaniji, jer se pri određivanju y'' lako može napraviti greška.

626. Data je funkcija

$$y = \operatorname{arcctg}\frac{x^2+1}{x^2-1}\,.$$

Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Funkcija je parna (grafik je simetričan u odnosu na y- osu). Definisana je za svako $x \neq \pm 1$. Ako uvedemo smenu $t = (x^2+1)/(x^2-1)$, dobijamo da je

$$\lim_{x\to 1_-} y(x) = \lim_{t\to -\infty} \operatorname{arcctg} t = \pi,$$

$$\lim_{x\to 1_+} y(x) = \lim_{t\to +\infty} \operatorname{arcctg} t = 0_+ ,$$

što znači da u $x = 1$ funkcija ima prekid prve vrste. Zbog parnosti, funkcija ima prekid i u tački $x = -1$.

Kad $x \to \pm\infty$, tada $t \to 1$, pa je

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \frac{\pi}{4}$$

i prava $y = \pi/4$ je horizontalna asimptota.

Prvi izvod je

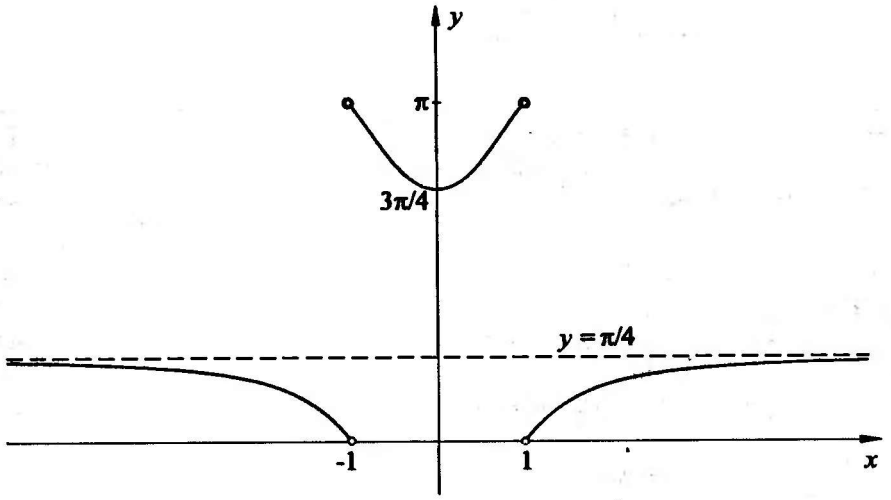
$$y'(x) = \frac{2x}{x^4+1} \qquad (x \neq \pm 1). \tag{1}$$

Funkcija ima minimum u $x = 0$, $y_{\min} = \operatorname{arcctg}(-1) = 3\pi/4$.

Diferenciranjem jednakosti (1) dobija se

$$y''(x) = 2\frac{1-3x^4}{(x^4+1)^2}, \quad y''(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Grafik je nacrtan na slici 26.



Slika 26. *Grafik funkcije* $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

627. Ispitati funkciju

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 - \arcsin x$$

i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Funkcija je definisana za $x \in [-1, 1]$ i neparna je, pa je dovoljno posmatrati $x \in [0, 1]$. Nule funkcije se dobijaju kao rešenja transcendentne jednačine $\arcsin x = x + x^3/3$. Može se pokazati da ova jednačina u intervalu $[0, 1]$ ima samo jedno rešenje (ispitivanjem funkcija $g_1(x) = \arcsin x$ i $g_2(x) = x + x^3/3$ i njihovih izvoda). Kako je $f(\sqrt{3}/2) > 0$, nula funkcije f se nalazi između $\sqrt{3}/2$ i 1. Približna vrednost ove nule je 0.934.

Izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(1+x^2) - 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nule prvog izvoda zadovoljavaju jednačinu

$$(1-x^2)(1+x^2)^2 = 1,$$

koja ima samo jedno rešenje u intervalu $[0, 1)$: $x_1 = \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2} \approx 0.79$. U ovoj tački funkcija dostiže maksimum. Kako je

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = -\infty,$$

leva tangenta u tački $x = 1$ je paralelna sa y-osom. Drugi izvod je

$$f''(x) = 2x - \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

i njegove nule su $x_2 = 0$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{1 - 1/\sqrt[3]{4}}$. Ispitivanjem znaka drugog izvoda uveravamo se da su ovo zaista prevojne tačke, tj. da drugi izvod menja znak pri prolasku kroz ove tačke.

Grafik je nacrtan na slici 27.

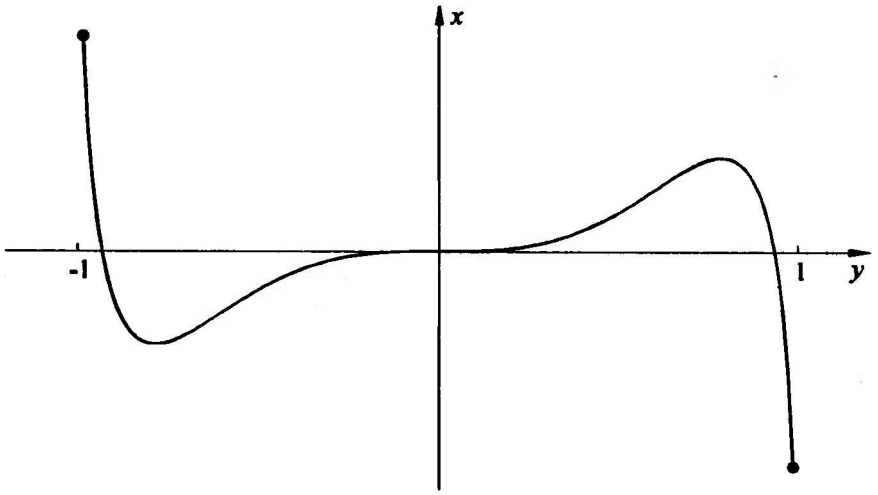
628. Ispitati funkciju f definisanu sa

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Domen funkcije su sve tačke u kojima je $\cos 2x \neq 0$, tj. $x \neq \pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. Funkcija je parna. Periodi funkcija $x \mapsto \cos x$ i $x \mapsto \cos 2x$ su 2π i π respektivno, pa je data funkcija periodična sa periodom 2π.

Zbog parnosti i periodičnosti, dovoljno je ispitati datu funkciju za $x \in [0, \pi]$.



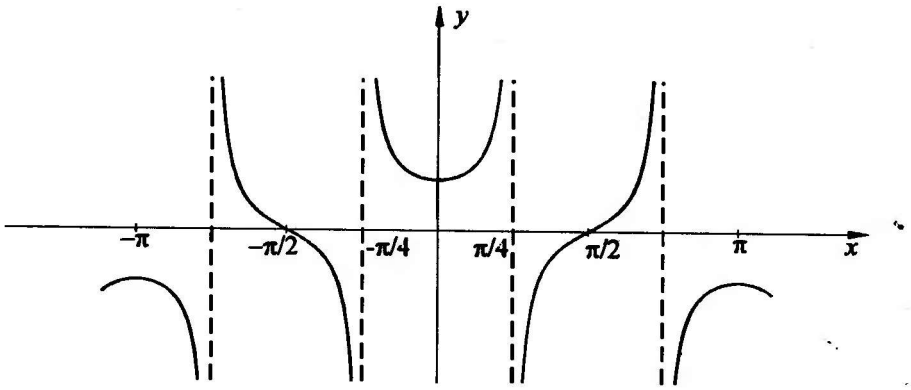
Slika 27. *Grafik funkcije* $y = x + \frac{1}{3}x^3 - \arcsin x$.

Funkcija ima vertikalne asimptote $x = \pi/4$ i $x = 3\pi/4$, pri čemu je

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}_-} \frac{\cos x}{\cos 2x} = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{4}_+} \frac{\cos x}{\cos 2x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}_-} \frac{\cos x}{\cos 2x} = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}_+} \frac{\cos x}{\cos 2x} = -\infty.$$

Jedina nula funkcije f na $[0, \pi]$ je $x = \pi/2$.



Slika 28. *Grafik funkcije* $y = \cos x / \cos 2x$.

Prva dva izvoda su

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(2\cos^2 x + 1)}{(2\cos^2 x - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{\cos x\,(8\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x + 3)}{(2\cos^2 x - 1)^3}.$$

Analizom znaka prvog izvoda nalazimo da f ima lokalni minimum u $x = 0, y = 1$ i lokalni maksimum u $x = \pi, y = -1$.

Drugi izvod ima nule u tačkama u kojima je $\cos x = 0$, tj. za $x = \pi/2$. Međutim, znak drugog izvoda se menja i pri prolazu kroz tačke $\pi/4$ i $3\pi/4$ u kojima f nije definisana.

Grafik je nacrtan na slici 28.

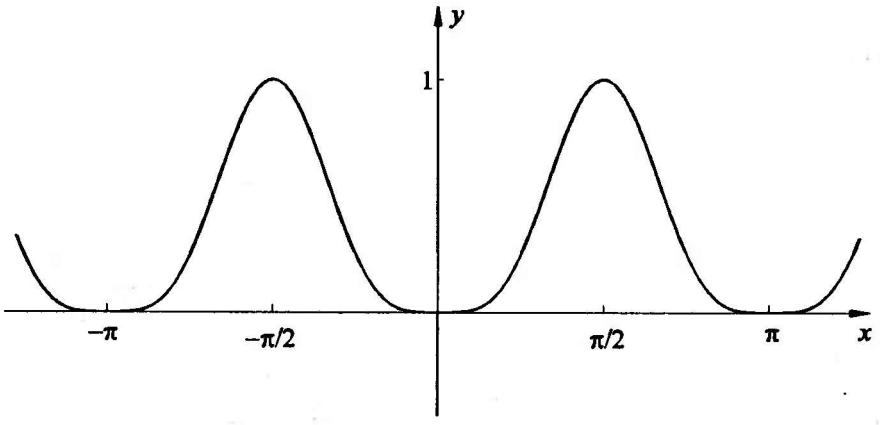
629. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sin^4 x$.

Rešenje. Funkcija je periodična sa periodom π. Prva dva izvoda su

$$y' = 4\sin^3 x\cos x, \quad y'' = 4\sin^2 x\cos^2 x.$$

Nule funkcije su u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Stacionarne tačke se dobijaju za $x = k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. Pri tome je $y'' < 0$ u tačkama u oblika $x = (2k+1)\pi/2$, pa funkcija ima u ovima tačkama maksimum, $y_{\max} = 1$. U tačkama oblika $x = k\pi$ imamo da je $y = y' = y'' = 0$. Međutim, konveksnost se u ovim tačkama ne menja, jer je u nekoj dovoljno maloj okolini tačke $x = k\pi$, sa obe strane te tačke, $\operatorname{sgn} y'' = \operatorname{sgn}(\cos 2k\pi) = 1$. Stoga je u okolini tačaka $x = k\pi$ funkcija konveksna, pa su pomenute tačke lokalni minimumi date funkcije. Drugi izvod ima nule i u tačkama u kojima je $\cos 2x = 0$, tj. $x = \pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. U ovim tačkama funkcija menja konveksnost, jer y'' menja znak.

Na osnovu ove analize, može se nacrtati grafik kao na slici 29.



Slika 29. *Grafik funkcije* $y = \sin^4 x$.

630. Ispitati funkciju

$$y = e^x \sin ax\,,$$

gde je $a > 0$. Da li se data kriva i kriva $y = e^x$ dodiruju u zajedničkim tačkama?

Rešenje. Funkcija je definisana, neprekidna i diferencijabilna za svako $x \in \mathbf{R}$. Ima nule u tačkama $x = k\pi/a$, za $k \in \mathbf{Z}$.

Kako je

$$y'(x) = e^x(a\cos ax + \sin ax)\,,$$

nule prvog izvoda su

$$x = \frac{-\operatorname{arctg} a + k\pi}{a} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Drugi izvod je

$$y''(x) = e^x(2a\cos ax + (1-a^2)\sin ax)\,.$$

Ako je $a \neq 1$, nule drugog izvoda su one tačke x za koje važi

$$\operatorname{tg} ax = \frac{2a}{a^2-1} \iff x = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a}{a^2-1} + k\pi\right), \quad (k \in \mathbf{Z})\,.$$

Za $a = 1$, nule drugog izvoda se dobijaju iz

$$\cos ax = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Nije teško videti da nijedna prevojna tačka ne može da se poklopi sa stacionarnom tačkom, što znači da su sve stacionarne tačke istovremeno i tačke ekstremuma funkcije.

Ako bi se krive $y = e^x \sin ax$ i kriva $y = e^x$ dodirivale, u tački dodira bi bili ispunjeni uslovi

$$e^x = e^x \sin ax\,, \qquad e^x = ae^x \cos ax\,,$$

odakle se dobija $e^x = 0$, što je nemoguće. Prema tome, ove dve krive se ne dodiruju.

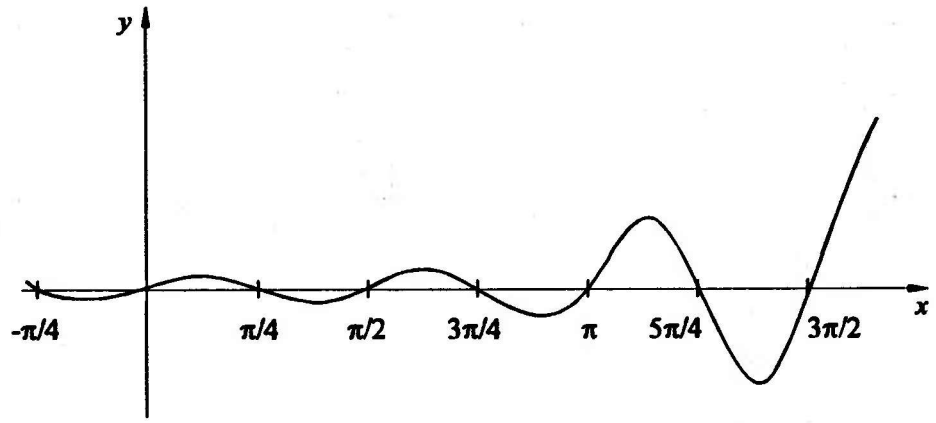
Grafik date funkcije (za $a = 4$) nacrtan je na slici 30.

631. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = f(x) = \frac{x^{1/2}}{\log^2 x}\,.$$

Rešenje. Ova funkcija može da posluži kao primer uloge matematičke analize u ispitivanju funkcija, i pored postojanja kompjuterskih programa za crtanje funkcija. U stvari, pokazaćemo da ni crtanjem uz pomoć računara (bez analize), a ni samom analizom (bez crtanja) ne možemo da dobijemo pravu sliku o ponašanju funkcije.

Ako se pomoću računara nacrta grafik date funkcije u rasponu od 0.01 do 10, dobija se slika 31a. Ona sugeriše da je funkcija desno od $x = 1$ konveksna i da teži nuli kad $x \to +\infty$.



Slika 30. *Grafik funkcije* $y = e^x \sin ax$, *za* $a = 4$.

Primenom standardnih metoda analize funkcija dobijamo sledeće: Funkcija je definisana za $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Granične vrednosti su:

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_+} f(x) = +\infty.$$

Uzastopnom primenom L'HOSPITALovog pravila dobijamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{4 \log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{8} = +\infty \, .$$

Dalje je

$$f'(x) = \frac{\log x - 4}{2\sqrt{x} \log^3 x} \, ,$$

odakle sledeje da y ima minimum u tački $x_1 = e^4 \approx 54$; vrednost minimuma je $y_{\min} \approx 0.46$. Leva tangenta u nuli je x-osa, jer je

$$\lim_{x \to 0_+} f'(x) = 0 \, ,$$

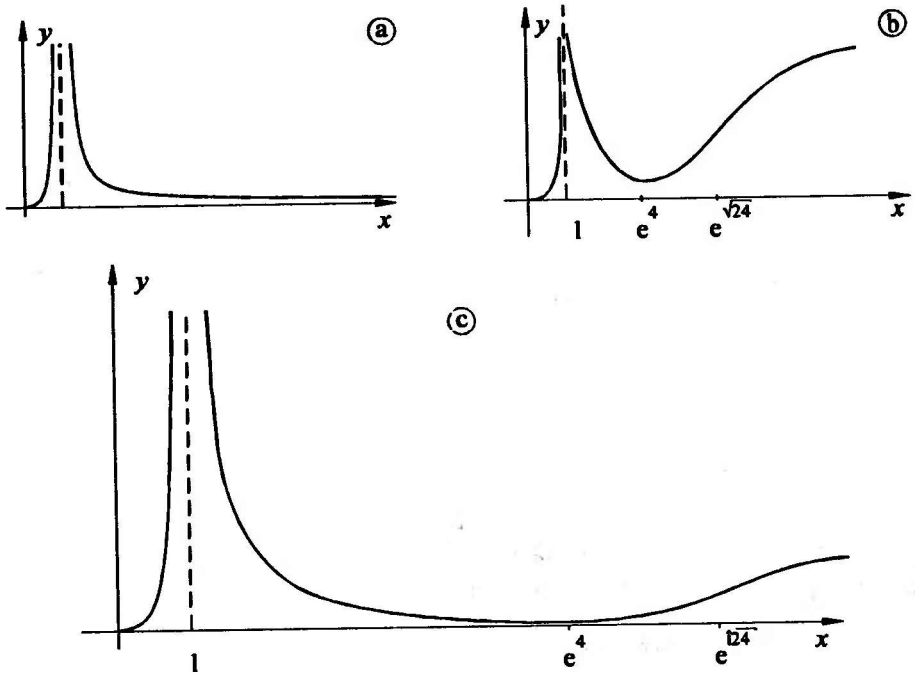
što se bez teškoća dobija primenom L'HOSPITALovog pravila.

Iz oblika drugog izvoda

$$f''(x) = \frac{24 - \log^2 x}{4x\sqrt{x} \log^4 x} \, ,$$

vidi se da postoji prevojna tačka $x_2 = e^{\sqrt{24}} \approx 134$. Funkcija je konveksna ($f''(x) > 0$) za $x \in (0,1) \cup (1,x_2)$, i konkavna za $x > x_2$.

Na osnovu navedene analize, grafik funkcije f je skiciran na slici 31b.



Slika 31. *Tri grafika funkcije* $y = x^{1/2}/\log^2 x$.

Međutim, ni slika 31a ni slika 31b ne odražavaju oblik ispitivane krive u potpunosti. Naime, na slici 31a nedostaju karakteristične tačke (minimum, prevojna tačka), a zbog toga što se prekida na $x = 10$, dobija se pogrešan utisak da grafik teži nuli. Na slici 31b vide se sve karakteristike, ali su razmere na ovoj slici veoma iskrivljene.

Jedino rešenje je da se, po analitičkom ispitivanju funkcije nacrta grafik po delovima, u različitim razmerama. Ovo je prikazano na slici 31c.[1]

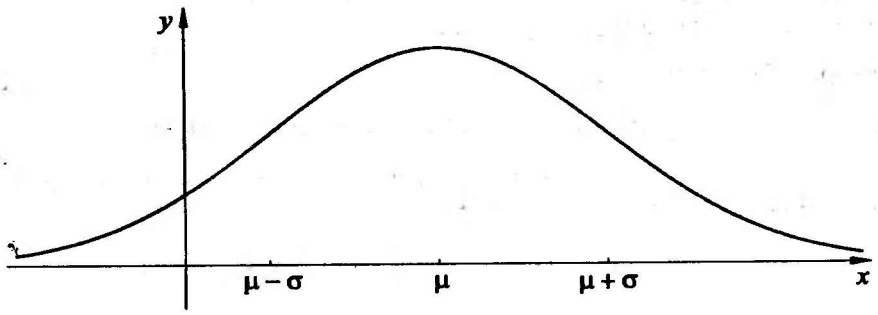
632. Neka je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0)$$

Ispitati funkciju f i nacrtati njen grafik. Dokazati da za sve realne vrednosti parametara μ i $\sigma > 0$, funkcija f ima dve prevojne tačke i odrediti rastojanje između njih.

Rešenje. Data funkcija je definisana i pozitivna za svako $x \in \mathbf{R}$. Kad $x \to \pm\infty$, tada za svako μ i za svako $\sigma > 0$ $f(x) \to 0$. Uvođenjem smene $t = (x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$,

[1] Ovakav postupak "karikiranja" primenjen je pri crtanju većine grafika u ovoj knjizi.



Slika 32. *Grafik funkcije* $y = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ za $\mu = 3$, $\sigma = 2$.

funkcija dobija oblik

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}e^{-t^2} \qquad t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma},$$

odakle sledi da je grafik funkcije simetričan u odnosu na pravu $t = 0$, tj, u odnosu na pravu $x = \mu$.

Pomoću uvedene smene ili direktno, nalazimo:

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$f''(x) = \frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sigma^5}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Prema tome, funkcija f ima maksimum u tački $x = \mu$, $f_{\max} = f(\mu) = 1/\sigma$.

Apscise prevojnih tačaka se dobijaju kao rešenja jednačine

$$(x-\mu)^2 - \sigma^2 = 0,$$

tj. $x_{1,2} = \mu \pm \sigma$. Zbog simetrije u odnosu na pravu $x = \mu$, ordinate prevojnih tačaka su jednake ($f(x_{1,2}) = e^{-1/2}/2\sigma^2$), pa je rastojanje između prevojnih tačaka jednako rastojanju između njihovih apscisa, i iznosi 2σ.

Grafik funkcije f, sa $\mu = 3$ i $\sigma = 2$, prikazan je na slici 32[1].

633. Između koordinata tačaka $M(X,Y)$ i $m(x,y)$ postoji veza

$$X = \log x\,,\quad Y = \frac{y}{\sqrt{x}}\,. \tag{1}$$

[1]Funkcija $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)$ je poznata pod nazivom GAUSSova kriva. Njen grafik, zajedno sa likom GAUSSa, prikazan je na novčanici od 10 nemačkih maraka.

Ako tačka M opisuje pravu $Y = aX + b$ $(a, b > 0)$, šta opisuje tačka m?
Ispitati i nacrtati krivu koju opisuje tačka m.

Rešenje. Iz (1) dobijamo

$$y = \sqrt{x}\,Y = \sqrt{x}(aX + b) = \sqrt{x}(a\log x + b) = f(x)\,, \tag{2}$$

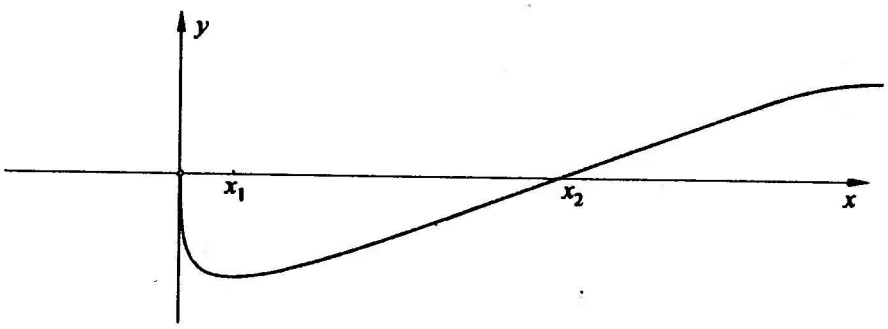
i to je jednačina krive koju opisuje tačka m. Funkcija f je definisana za svako $x > 0$. Granične vrednosti su

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Prva dva izvoda su

$$f'(x) = \frac{a\log x + b + 2a}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{a\log x + b}{4x^{3/2}}\,.$$

Funkcija ima lokalni minimum u tački $x_1 = \exp(-2 - b/a)$. Kako $f'(x) \to -\infty$ kad $x \to 0_+$, grafik polazi iz koordinatnog početka pod pravim uglom.
Jedina prevojna tačka je $x_2 = \exp(-b/a)$, u kojoj je i $f(x_2) = 0$. Za $x > x_2$, funkcija je konkavna, a u ostalom delu domena je konveksna.
Tipičan grafik je nacrtan na slici 33.



Slika 33. *Grafik funkcije* $y = x^{1/2}(a\log x + b)$ *za* $a = 2$, $b = 3$.

634. Data je funkcija

$$y = f(x) = \frac{\log|x|}{x} + \frac{1}{x}\,.$$

Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

Rezultat. Definisana za svako $x \neq 0$. Neparna. Horizontalna asimptota $y = 0$, vertikalna asimptota $x = 0$. Nule funkcije su $x = \pm e^{-1}$. Lokalni maksimum $x = 1$, lokalni minimum $x = -1$, prevojne tačke $\pm\sqrt{e}$.

635. Ispitati i grafički predstaviti funkciju

$$f(x) = (x - \frac{1}{4})e^{1/x} .$$

Rezultat. Kosa asimptota: $y = x + 3/4$. Vertikalna asimptota: $x = 0$ (sa desne strane). $f'(x) = (1 - 1/2x)^2 \exp(1/x)$. Funkcija je neopadajuća. U koordinatni početak ulazi pod uglom 0. Nema ekstremuma. $f''(x) = (2x - 1)\exp(1/x)/(4x^4)$. Prevojna tačka za $x = 1/2$.

636. Ispitati funkciju

$$y = f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}$$

i nacrtati njen grafik.

Rezultat. Definisana za $x \in [-1, 1]$. Parna. Izvodi:

$$f'(x) = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} , \quad f''(x) = \frac{6x^4 - 9x^2 + 2}{(1 - x^2)^{3/2}} .$$

Lokalni minimum za $x = 0$, maksimum za $x = \pm\sqrt{2/3}$. Prevojne tačke $x = \pm\sqrt{3/4 \pm \sqrt{33}/12}$.

637. Ispitati funkciju

$$y = (x + 2)e^{1/x}$$

i nacrtati njen grafik.

Rezultat. Vertikalna asimptota $x = 0$ (za $x > 0$), obostrana kosa asimptota $y = x + 3$. Nula za $x = -2$. Lokalni maksimum za $x = -1$, minimum za $x = 2$. Leva tangenta u nuli je x-osa. Prevojna tačka u $x = -2/5$.

638. Data je funkcija

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2 - a^2} \qquad (a > 0) .$$

Ispitati datu funkciju i nacrtati njen grafik.

Rezultat. Funkcija je definisana je za svako $x \neq \pm a$ i parna. Horizontalna asimptota: $y = \pi/4$. Izvodi:

$$y' = -\frac{2a^2x}{(x^2 - a^2)^2 + x^4} , \quad y'' = \frac{2a^2(6x^4 - 2a^2x^2 - a^4)}{((x^2 - a^2)^2 + x^4)^2} .$$

Maksimum za $x = 0$. U tački $x = a$ leva i desna granična vrednost izvoda je $-2/a$, ali u toj tački izvod ne postoji. Prevojne tačke za $x = \pm a\sqrt{(1 + \sqrt{7})/6}$.

639. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik, ako je

$$y = f(x) = (3x - x^3)^{1/3} .$$

Rezultat. Obostrana kosa asimptota $y = -x$. Minimum u $x = -1$, maksimum u $x = 1$. Tangenta u koordinatnom početku je y-osa. Nema nula drugog izvoda. Menja konveksnost u tačkama $x = \pm\sqrt{3}$ i $x = 0$.

640. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} .$$

Rezultat. Funkcija je neparna. Karakteristike za $x \geq 0$: vertikalna asimptota $x = 1$, lokalni minimum za $x = \sqrt{3}$, prevojne tačke $x = 0$ i $x = 3$.

641. Data je funkcija

$$y = f(x) = \log x - ax ,$$

gde je a realan parametar.

a) Odrediti broj realnih nula funkcije u zavisnosti od $a \in \mathbf{R}$.

b) Za $a = 1$ nacrtati grafik funkcije.

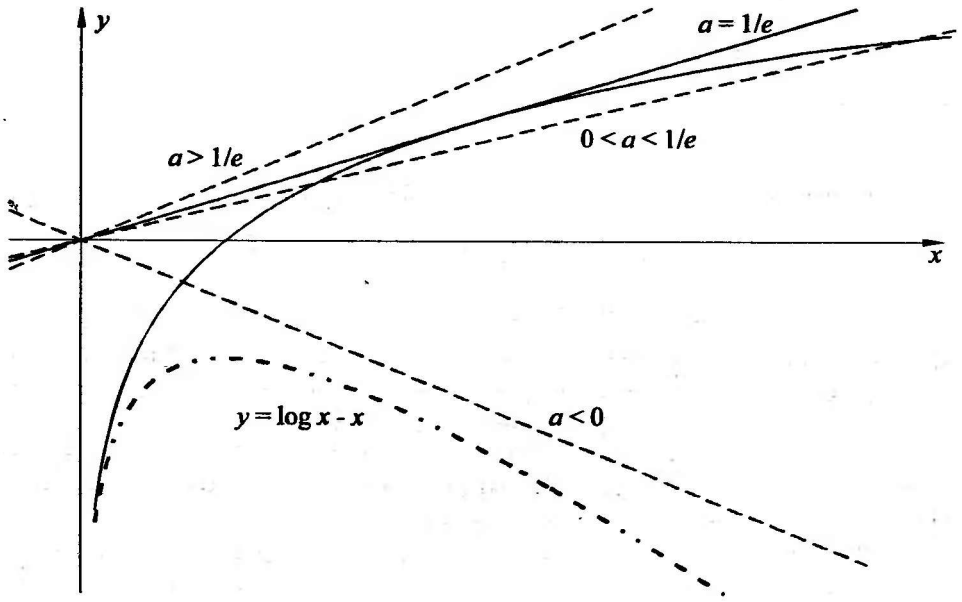
Rešenje. Za svako $a \in \mathbf{R}$, funkcija f je definisana za $x \in (0, +\infty)$. Ako skiciramo grafike funkcija $g_1(x) = \log x$ i $g_2(x) = ax$ (slika 34), vidimo da za $a \leq 0$ ove funkcije imaju jednu presečnu tačku, dok za $a > 0$ mogu imati nijednu, jednu ili dve presečne tačke, u zavisnosti od toga da li je a veće, jednako ili manje od a_0, gde je a_0 ona vrednost parametra a za koju se grafici ovih funkcija dodiruju (Ovde je potrebno i analitičko obrazloženje koje se ne oslanja na sliku, što prepuštamo čitaocu).

Neka se za $a = a_0$ grafici dodiruju u nekoj tački x_0. Tada je $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ i $g_1'(x_0) = g_2'(x_0)$, odakle je

$$\log x_0 - a_0 x = 0, \quad \frac{1}{x_0} - a_0 = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $a_0 = 1/e$, $x_0 = e$. Prema tome, funkcija f ima dva realna korena za $0 < a_0 < 1/e$, jedan koren za $a = 1/e$ i za $a \leq 0$, a nema korena za ostale vrednosti $a \in \mathbf{R}$.

Ispitivanjem funkcije $f(x) = \log x - x$ zaključujemo da ima vertikalnu asimptotu u $x = 0$, maksimum u $x = 1$ ($y_{\max} = -1$) i da nema prevojnih tačaka, jer je $y'' < 0$ u celom domenu. Za $a = 1$ iz prvog dela zadatka sledi da f nema realnih nula, pa je $y < 0$ za sve vrednosti $x > 0$. Grafik funkcije je nacrtan na slici 34 (isprekidana kriva).



Slika 34. *Preseci grafika funkcija* $x \mapsto \log x$ *i* $x \mapsto ax$ *za razne vrednosti* a *i grafik funkcije* $y = \log x - x$

642. Ispitati funkcije i nacrtati grafike:

a) $\dfrac{x^3 - 2x^2}{(x+1)^3}$

b) $x\sqrt{x^2 - 2x}$

c) $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

d) $\dfrac{1}{a + \log|x|}$ $\quad (a > 0)$

e) $x^3 \log^2 x$

f) $\dfrac{2x}{1 - \log x^2}$

g) $\log\cos x \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

h) $x \sin\dfrac{1}{x}$

i) $\dfrac{1}{x}\sin x$

j) $\exp \dfrac{x^2}{x^2-1}$

k) $\sqrt{x^2-1}\log \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

l)[1] $a\operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ $(a>0)$

643. Kriva $y=f(x)$ je data u parametarskom obliku

$$x=2t-t^2, \quad y=3t-t^3.$$

Ispitati datu krivu i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ su definisane, neprekidne i diferencijabilne za svako $t\in\mathbf{R}$. Kako je $-\infty<x(t)\leq 1$, funkcija $y=f(x)$ je definisana samo za $x\leq 1$. U stvari, ovde imamo dve funkcije. Naime, ako se t menja od $-\infty$ do 1, x raste od $-\infty$ do 1; kada t raste od 1 do $+\infty$, x opada od 1 do $-\infty$. Prema tome, svakoj vrednosti $x\in(-\infty,1]$ odgovaraju dve vrednosti za t, a time i dve vrednosti za y. Neka su to $y_1(x)$ (za $t<1$) i $y_2(x)$ (za $t>1$).

Funkcije y_1 i y_2 eventualno mogu imati samo levu horizontalnu ili kosu asimptotu (jer x može da teži samo ka $-\infty$). Kako $x\to-\infty$ kad $t\to\pm\infty$ i kako je

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{3t-t^3}{2t-t^2}=\pm\infty,$$

funkcije nemaju ni horizontalnu ni kosu asimptotu.

Izvode obe funkcije možemo da nađemo u funkciji od t:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1-t}=\frac{3(1+t)}{2} \qquad (t\neq 1),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{(1-t)^2}{(1-t)^3}=\frac{3}{4(1-t)} \qquad (t\neq 1).$$

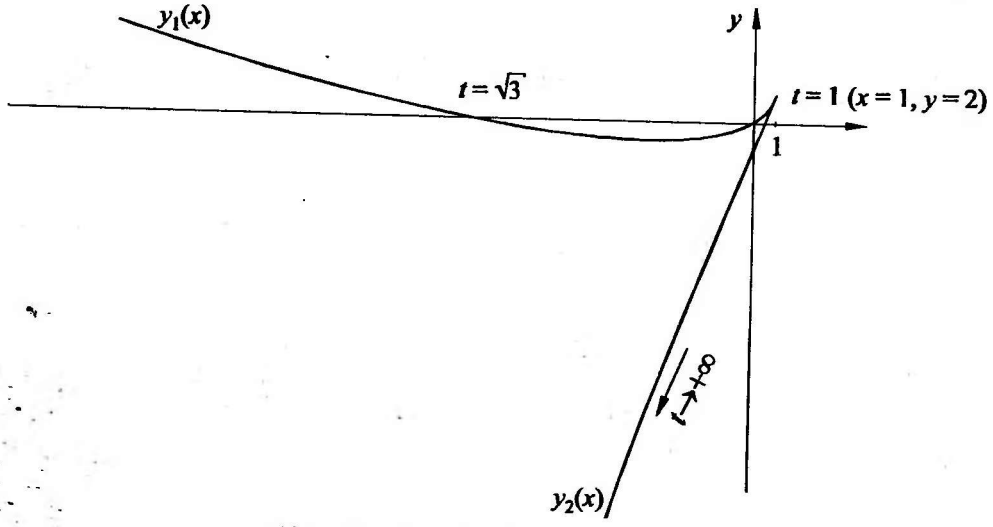
Iz izraza za izvode vidimo da funkcija y_1 dostiže minimum $y=-2$ za $t=-1$, tj. za $x=-3$. Ova funkcija je konveksna za svako x, jer je $y''(x)>0$ za $t<1$.

Funkcija y_2 je monotono rastuća i konkavna za sve vrednosti argumenta x u kojima je definisana.

Grafici obe funkcije su nacrtani na slici 35.

Primedba. U ovom zadatku smo mogli da predstavimo datu krivu i u obliku dve eksplicitno zadate funkcije. Naime, jednačina $x=2t-t^2$ ima za svako $x\in(-\infty,1)$ dva rešenja po t; smenom u $y=3t-t^3$ dobijaju se eksplicitni izrazi.

[1] Ova kriva se naziva lančanica. Ako je lanac (konopac, vod dalekovoda i sl.) učvršćen na dva kraja i pušten da slobodno visi, tada se dobija oblik lančanice.



Slika 35. *Grafik krive iz zadatka 643*

644. Data je kriva

$$x = t + e^{-t}, \qquad y = 2t + e^{-2t}.$$

Ispitati datu krivu i nacrtati njen grafik.

Rešenje. Ispitajmo najpre funkcije $x(t)$ i $y(t)$. Kriva $x = x(t)$ ima kosu asimptotu $x = t$, minimum $x(0) = 1$ i konveksna je za svako t. Kriva $y = y(t)$ ima kosu asimptotu $y = 2t$, minimum $y(0) = 1$ i konveksna je za svako t. Grafici ove dve funkcije su nacrtani na slici 36a.

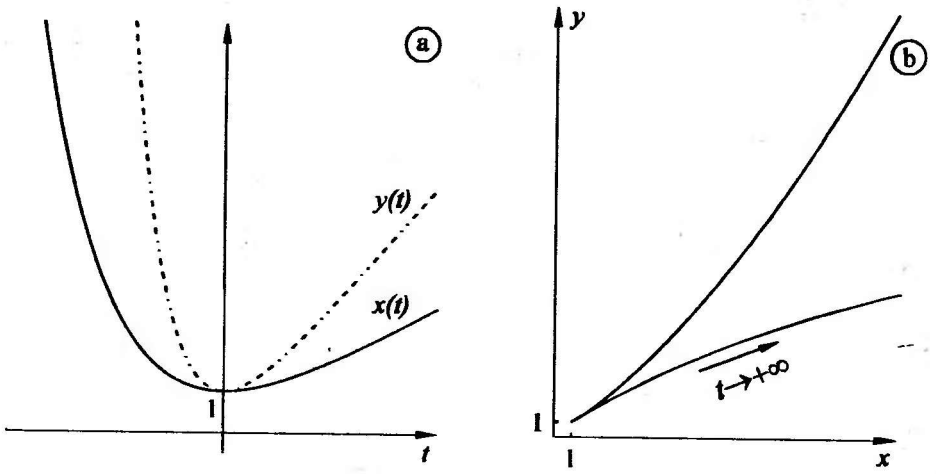
Pređimo sada na ispitivanje krive $y = f(x)$. Ona je definisana za $x \geq 1$, kao što se vidi iz grafika funkcije $x = x(t)$. Za svako takvo x, postoje dve vrednosti za t takve da je $x = x(t)$; prema tome, kao i u zadatku 643, za svako dato x postoje dve tačke na krivoj koji ispitujemo, koje imaju apscisu x. Dve funkcije $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ dobijamo kada posmatramo odvojeno slučajeve $t < 0$ i $t > 0$. Kako je

$$\frac{dy}{dx} = 2(1 + e^{-t}), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{e^t - 1},$$

zaključujemo da je funkcija $y = f_1(x)$ (za $t < 0$) monotono rastuća i konveksna, dok je $y = f_2(x)$ (za $t > 0$) monotono rastuća i konkavna funkcija. Obe funkcije imaju u tački $x = 1$ minimalnu vrednost $y = 1$ (ali ovo nije nula izvoda). Dalje, iz

$$\frac{y}{x} = \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} \to 2 \quad (t \to +\infty),$$

$$\frac{y}{x} \to +\infty \quad (t \to -\infty),$$



Slika 36. *Grafici funkcija iz zadatka 644.*

zaključujemo da samo funkcija f_2 ima asimptotu. Iz

$$\lim_{x\to+\infty}(f_2(x)-2x)=\lim_{t\to+\infty}\left(2t+e^{-2t}-2(t+e^{-t})\right)=0,$$

nalazimo da je jednačina asimptote $y=2x$.

Na osnovu ove analize može se nacrtati grafik kao na slici 36b.

645. Ispitati krivu $y=y(x)$ datu pomoću

$$x^3+y^3-3axy=0 \quad (a>0).$$

(DESCARTESov list) i nacrtati njen grafik.

♣ **Rešenje.** Kriva se može dovesti na parametarski oblik ako se uvede parametar $t=y/x$. Deljenjem obe strane date jednakosti sa x^3 dobijamo

$$1+t^3-3a\frac{y}{x^2}=0 \iff (1+t^3)y=3at^2,$$

odakle se dobijaju parametarske jednačine

$$y=\frac{3at^2}{t^3+1}, \quad x=\frac{3at}{t^3+1},$$

gde parametar t uzima vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$, $t\neq -1$. Ako nacrtamo grafike funkcija $x=x(t)$ i $y=y(t)$ (videti sliku 37a), zaključujemo sledeće:

Ako t raste od 0 do $+\infty$, tada se x menja od 0 do $x_{\max}$ i vraća se u nulu; na isti način se y menja od 0 do $y_{\max}$ i vraća se ponovo u nulu. Dakle, data kriva ima

"petlju" u prvom kvadrantu. Kada se t menja od -1 do 0, tada x opada od $+\infty$ do 0, a y raste od $-\infty$ do 0. Konačno, ako t raste od $-\infty$ do -1, tada x opada od 0 do $-\infty$, dok y raste od 0 do $+\infty$.

Kako jednačina $x^3+y^3-3axy=0$ ostaje ista ako se x zameni sa y i obrnuto, grafik krive je simetričan u odnosu na pravu $y=x$.

Ispitajmo da li kriva ima asimptote. Kako $y \to \pm\infty$ samo ako $t \to -1$, a u tom slučaju $x \to \pm\infty$, kriva nema vertikalnih asimptota. Na sličan način se može videti da nema ni horizontalnih asimptota.

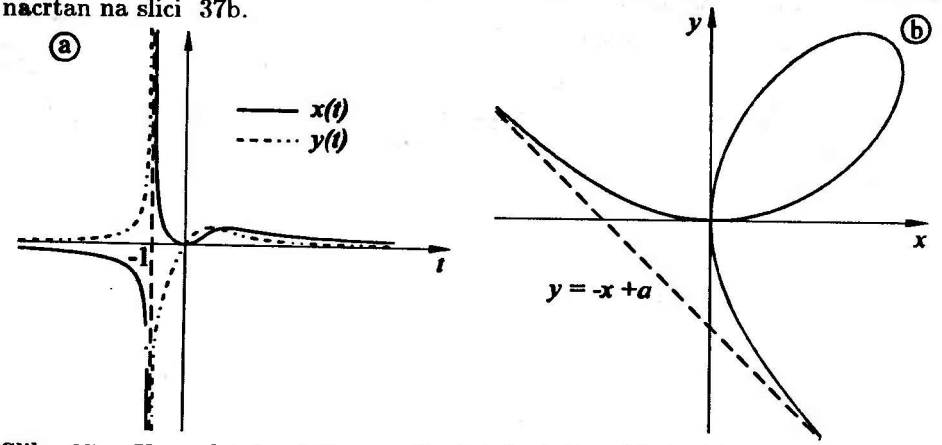
Kako je $y/x=t$, na osnovu prethodne analize imamo da je

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}t=-1,$$

što znači da kriva ima kosu asimptotu oblika $y=-x+b$, gde je

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}y+x=\lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1)}{t^3+1}$$
$$=\lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1)}{(t+1)(t^2+t+1)}=a.$$

Prema tome, prava $y=-x+a$ je obostrana kosa asimptota date krive. Grafik je nacrtan na slici 37b.



Slika 37. *Uz zadatak 645.* a: *Grafici funkcija* $x(t)$ *i* $y(t)$. *b: Grafik krive* $x^3+y^3-3axy=0$ $(a=1)$.

646. Ispitati krivu datu u polarnim koordinatama

$$r=a(\cos\theta+1), \qquad a>0, \theta\in(-\pi,\pi].$$

Rešenje. Ako je kriva data u polarnim koordinatama jednačinom $r=g(\theta)$, tada se može ispitivati u parametarskom obliku, gde se za parametar uzima polarni ugao θ:

$$x=r\cos\theta=g(\theta)\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta=g(\theta)\sin\theta.$$

Prema tome, za datu krivu imamo sledeći parametarski oblik:

$$x = a\cos\theta(\cos\theta + 1)\,, \quad y = a\sin\theta(\cos\theta + 1)\,.$$

Ispitivanjem funkcija $x = x(\theta)$ i $y = y(\theta)$ nalazimo da x dostiže minimum $x = -a/4$ za $\theta = \pm 2\pi/3$ i maksimum $x = 2a$ za $\theta = 0$. Za $\theta = \pi/2$ dobija se maksimalna vrednost za y, $y_{\max} = a$; za $\theta = -\pi/2$ imamo da je $y = y_{\min} = -a$.
Kriva je simetrična u odnosu na x-osu. Kako su x i y ograničeni, nema asimptota.
Grafik je nacrtan na slici 38c (kardioida).

647. Ispitati sledeće krive i nacrtati njihove grafike ($a > 0, m > 0, t, \theta \in (-\pi, \pi]$):

a) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (Astroida),

b) $x = a(t - \sin t)\,, y = a(1 - \cos t)$ (Cikloida),

c) $x = a\big((1+m)\cos mt - m\cos((1+m)t)\big)$, $y = a\big((1+m)\sin mt - m\sin((1+m)t)\big)$ (Epicikloida),

d) $x = a(t\sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ (Evolventa kruga),

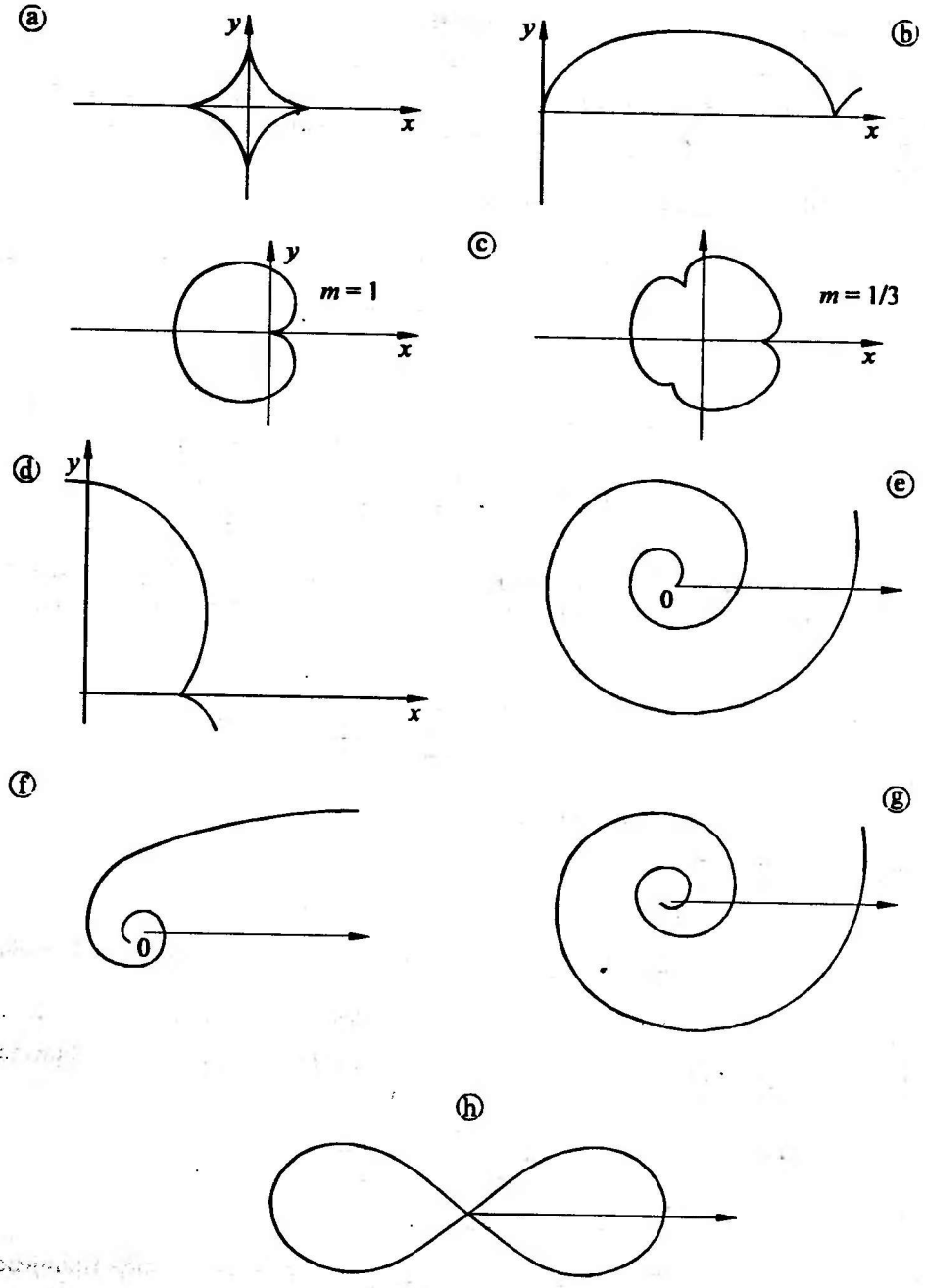
e) $r = a\theta$ (ARHIMEDova spirala),

f) $r = a/\theta$ (Hiperbolička spirala),

g) $r = ae^{m\theta}$ (Logaritamska spirala),

h) $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ (BERNOULLIjeva lemniskata).

►► 8.2.6, ►► 8.7.3



Slika 38. *Grafici krivih iz zadatka 647: a) astroida, b) cikloida, c) kardioida ($m = 1$) i epicikloida ($m = 1/3$), d) evolventa kruga, e) Arhimedova spirala, f) hiperbolička spirala, g) logaritamska spirala, h) Bernoullijeva lemniskata.*

3.6.3 Analitičke osobine polinoma

U 1.2.3 na strani 23 navedene su algebarske osobine polinoma. Ovde dajemo pregled analitičkih osobina polinoma, tj. osobina koje proizilaze iz činjenice da je polinom neprekidna i diferencijabilna funkcija. Jedna takva osobina je navedena u 3.4.5.

U daljem tekstu smatramo da polinomi imaju realne koeficijente.

√ *Ako je P polinom stepena n, tada je P' polinom stepena $n-1$.*

√ *Realan broj x je koren reda r $(r \geq 1)$ polinoma P stepena n $(n > 0)$ ako i samo ako važi*

$$P(x) = P'(x) = \ldots = P^{(r-1)}(x) = 0\,, \quad P^{(r)}(x) \neq 0\,.$$

√ *Svaki koren reda $r > 1$ polinoma P je koren reda $r-1$ izvodnog polinoma.*

√ *Između svaka dva uzastopna realna korena polinoma P nalazi se bar jedan koren izvoda P'.*

√ *Između svaka dva uzastopna realna korena polinoma P' može da se nalazi najviše jedan realan koren polinoma P i to može biti samo koren prvog reda.*

648. Odrediti polinom $P(x)$ četvrtog stepena ako je

$$P''(x) = ax^2 + bx + c$$

i ako je polinom P deljiv sa polinomom P''.

Rešenje. Iz uslova zadatka sleduje da je

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,, \tag{1}$$

gde su α, β i γ nepoznati koeficijenti. Diferenciranjem jednakosti (1) dva puta, dobijamo

$$P''(x) = 12a\alpha x^2 + 6x(a\beta + b\alpha) + 2(a\gamma + b\beta + c\alpha)\,. \tag{2}$$

Kako je, po uslovu zadatka, $P''(x) = ax^2 + bx + c$, iz (2) dobijamo sistem jednačina za određivanje α, β, γ:

$$\begin{aligned} 12a\alpha &= a, \\ 6(a\beta + b\alpha) &= b, \\ 2(a\gamma + b\beta + c\alpha) &= c. \end{aligned} \tag{3}$$

Rešavanjem sistema (3), nalazimo da je (za $a \neq 0$, što mora da bude ispunjeno ako je polinom P četvrtog stepena):

$$\alpha = \frac{1}{12}\,, \quad \beta = \frac{b}{12a}\,, \quad \gamma = \frac{5ac - b^2}{12a^2}\,.$$

Smenom u (1) i sređivanjem, dobijamo:

$$P(x) = \frac{ax^4}{12} + \frac{bx^3}{6} + \frac{cx^2}{2} + \frac{b(6ac - b^2)x}{12a^2} + \frac{c(5ac - b^2)}{12a^2}\,.$$

649. Dokazati da polinom $P(x) = x^4 + px + q$ ima faktor oblika $(x - c)^2$ ako i samo ako važi jednakost

(1) $$27p^4 = 256q^3\,.$$

Rešenje. Dati polinom ima faktor oblika $(x - c)^2$ ako i samo ako je c nula bar drugog reda ovog polinoma, što znači da je

$$P(c) = c^4 + pc + q = 0\,,$$

$$P'(c) = 4c^3 + p = 0\,.$$

Ovaj sistem jednačina ima rešenje po c ako i samo ako je

$$\left(\frac{p}{4}\right)^{4/3} - p\left(\frac{p}{4}\right)^{1/3} + q = 0\,,$$

odakle se sređivanjem dobija jednakost (1).

650. Dat je polinom

$$P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + a \qquad (a \in \mathbf{R})\,.$$

Odrediti a tako da polinom ima jednu racionalnu dvostruku nulu, a zatim odrediti sve nule datog polinoma.

Rešenje. Ako dati polinom ima racionalnu dvostruku nulu, tada njegov izvodni polinom

$$P'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 34x - 17$$

ima racionalnu nulu. Primenom teoreme o racionalnim nulama polinoma, nalazimo da je $x = 1$ jedina racionalna nula polinoma P'. Po uslovu zadatka, treba da bude i $P(1) = 0$, odakle je $a = 6$. U tom slučaju, možemo da faktorišemo dati polinom:

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = (x - 1)^2(x^2 - 5x + 6)\,,$$

iz čega sledi da su nule datog polinoma brojevi 1, 2 i 3.

651. Neka je $P(x)$ polinom stepena $n \geq 1$. Odrediti red nule $x = a$ polinoma

(1) $$R(x) = \frac{1}{2}(x - a)\big(P(x) - P(a)\big) - P(x) + P(a)\,.$$

Rešenje. Očigledno je $R(a) = 0$, pa je $x = a$ nula polinoma R najmanje prvog reda. Kako je

$$R'(x) = \frac{1}{2}(P(x) - P(a)) + P'(x)\frac{x-a-2}{2},$$

imamo da je $R'(a)$=-$P'(a)$, pa je $x = a$ nula polinoma R najmanje drugog reda ako je $P'(a) = 0$, i nula prvog reda ako $P'(a) \neq 0$.

Primenom LEIBNIZove formule na prvi sabirak u (1), dobijamo izraz za k-ti izvod polinoma R:

$$R^{(k)}(x) = \frac{k}{2}P^{(k-1)}(x) + P^{(k)}(x)\frac{x-a-2}{2} \quad (k > 1),$$

iz čega sleduje

$$(2) \qquad R'(a) = -P'(a), \; R^{(k)}(a) = \frac{k}{2}P^{(k-1)}(a) - P^{(k)}(a), \; k = 2, 3\ldots$$

Realan broj a je nula reda m ($m > 1$) polinoma R ako i samo ako je

$$R(a) = R'(a) = \cdots = R^{(m-1)}(a) = 0, \; R^{(m)}(a) \neq 0,$$

odakle se, s obzirom na (2), dobija

$$(3) \qquad \begin{aligned} P'(a) &= 0 \\ \frac{2}{2}P'(a) - P''(a) &= 0 \\ \frac{3}{2}P''(a) - P'''(a) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{m-1}{2}P^{(m-2)}(a) - P^{(m-1)}(a) &= 0 \\ \frac{m}{2}P^{(m-1)}(a) - P^{(m)}(a) &\neq 0. \end{aligned}$$

Jednakosti (3) će biti zadovoljene ako i samo ako je

$$(4) \qquad P'(a) = P''(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0, \; P^{(m)}(a) \neq 0,$$

što znači da je $x = a$ nula reda $m > 1$ polinoma R ako i samo ako je to nula reda $m-1$ polinoma P'. Ako je P polinom stepena n, tada je P' polinom stepena $n-1$, pa red nule ovog polinoma ne može da bude veći od $n-1$, odakle je $m \leq n$. Ako $x = a$ nije nula polinoma P', tada je, kao što smo pokazali, ovo nula polinoma R reda 1.

652. Dokazati da je polinom

$$P(x) = x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$$

deljiv sa $(x-1)^4$.

Uputstvo. Dati polinom će biti deljiv sa $(x-1)^4$ ako je $x=1$ nula najmanje četvrtog reda funkcije $x \mapsto P(x)$. Prema tome, treba pokazati da je $P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1) = 0$.

653. Dokazati: Ako su sve nule polinoma P stepena n realne, tada i polinomi $P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ takođe imaju samo realne nule.

Uputstvo. Dovoljno je dokazati: ako P ima samo realne korene, tada i P' ima samo realne korene. Iskoristiti činjenicu da se između svake dve uzastopne realne nule polinoma P nalazi najmanje jedna realna nula polinoma P', kao i da je ukupan broj nula polinoma P' jednak $n-1$. Posebno ispitati slučaj kada P ima višestruke nule.

654. Odrediti broj realnih korena polinoma

$$P(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 7\,.$$

Rešenje. Kako je $P'(x) = 12(x^3 - 2x^2 - x + 2)$, nule prvog izvoda su $-1, 1, 2$. Nije teško videti da se polinom P ne anulira u ovim tačkama; stoga dati polinom nema višestrukih nula.

Znak polinoma možemo da prikažemo kao u tabeli.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

Kako je $P(-\infty) > 0$ i $P(-1) < 0$, zaključujemo (na osnovu osobine neprekidnih funkcija) da se u $(-\infty, -1)$ nalazi bar jedan realan koren polinoma P. Ne može ih biti više, jer bi se tada između dva korena polinoma nalazila i jedna nula izvoda, a izvod nema nula na ovom skupu.

Na isti način utvrđujemo da se između -1 i 1 nalazi jedan koren polinoma P.

Kako polinom ima isti znak u tačkama $x=1$ i $x=2$, u intervalu $(1,2)$ ne može da nalazi jedan prost koren polinoma P. Ovaj interval ne može da sadrži više prostih korena ni korene višeg reda, jer se između dva korena izvoda može nalaziti najviše jedan prost koren polinoma.

Konačno, iz $\operatorname{sgn} P(2) = \operatorname{sgn} P(+\infty)$, zaključujemo da u ovom intervalu ne može biti ni jedan koren polinoma P. Naime, tu se ne može nalaziti samo jedan prost koren (jer bi tada funkcija P menjala znak), a takođe ne može da se nalazi ni više različitih korena, jer bi tada između njih postojala nula izvoda.

Prema tome, polinom P ima dve realne nule; po jednu u intervalima $(-\infty, -1)$ i $(-1, 1)$.

Primedba. Metod za određivanje broja realnih nula polinoma, koji je primenjen u ovom zadatku, naziva se **Rolleov metod**. Kao što se može zaključiti iz navedenog rešenja, broj prostih nula polinoma jednak je broju promena znaka u drugoj vrsti !

gornje tablice (videti zadatak 655 za preciznu formulaciju). Višestruke nule mogu biti samo među nulama polinoma P', dakle među brojevima u prvoj vrsti tablice. Na taj način, ako možemo da odredimo sve realne nule polinoma P', tada možemo da odredimo i broj realnih nula polinoma P, kao i intervale u kojima se one nalaze.

655. Neka je P dati polinom i neka su $x_1, \ldots, x_k$ realni koreni njegovog izvodnog polinoma P'. Tada polinom P može imati najviše $k+1$ prostu nulu, i to po jednu u intervalima

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, +\infty)$$

na čijim krajevima polinom menja znak. Dokazati.

656. U zavisnosti od realnog parametra a, odrediti broj realnih korena jednačine

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0\,.$$

Rešenje. Kako je $P'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$, nule izvoda su $-1, 0, 2$ i možemo da formiramo tablicu:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$P(x)$	$+$	$a-5$	a	$a-32$	$+$

Razlikujemo sledeće slučajeve:

1° $a < 0$. U ovom slučaju niz znakova u drugoj vrsti tablice je

$$+ \; - \; - \; - \; +,$$

što znači da polinom ima po jednu prostu nulu u intervalima $(-\infty, -1)$ i $(2, +\infty)$. Višestrukih nula nema.

2° $a = 0$. U ovom slučaju dobijamo niz

$$+ \; - \; 0 \; - \; +.$$

Prema tome, polinom ima po jednu prostu nulu u $(-\infty, -1)$ i $(2, +\infty)$ i jednu dvostruku nulu u $x = 0$. Da je poslednja nula dvostruka, a ne trostruka ili višeg reda, zaključujemo iz toga što je ukupan broj nula polinoma P jednak 4.

3° $0 < a < 5$. Polinom ima sve 4 nule realne, i to po jednu u intervalima $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 2), (2, +\infty)$.

4° $a = 5$. U ovom slučaju polinom ima dve proste nule i jednu dvostruku nulu u $x = -1$.

5° $5 < a < 32$. Dve realne nule, po jedna u intervalima $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$.

6° $a = 32$. Jedna dvostruka realna nula za $x = 2$.

7° $a > 32$. Nema realnih nula.

657. Odrediti broj realnih korena jednačine

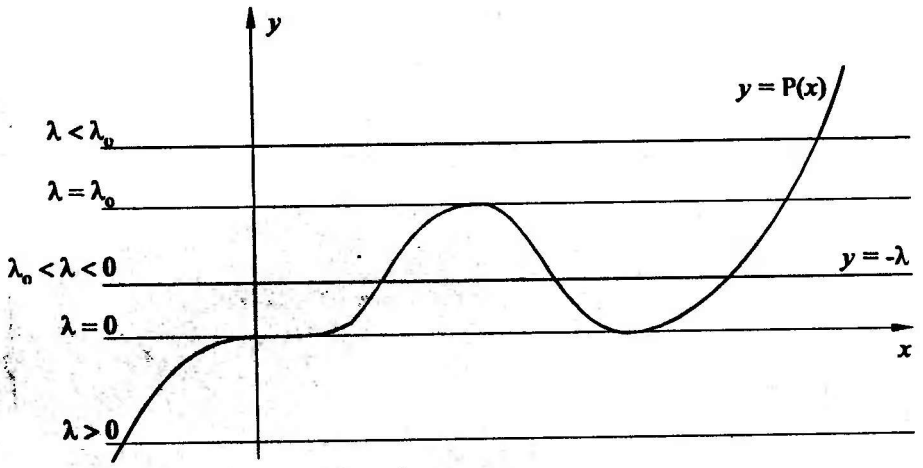
$$x^5 - 2x^4 + x^3 + \lambda = 0 \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Rešenje. Broj korena date jednačine jednak je broju preseka krive $y = P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$ sa pravom $y = -\lambda$. Da bismo našli broj preseka, ispitaćemo ekstremume pomenute krive i skicirati njen grafik.

Izvod polinomske funkcije $y = P(x)$ je

$$P'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = 5x^2(x-1)\left(x - \frac{3}{5}\right).$$

Ispitivanjem znaka funkcije $x \mapsto P'(x)$, zaključujemo da polinom P ima lokalni maksimum u $x = 3/5$ i lokalni minimum u $x = 1$, dok u $x = 0$ izvod ne menja znak, tako u ovoj tački funkcija P nema ekstremum. Imamo da je $P(3/5) = 108/3125 \approx 0.03456$ i $P(1) = 0$. Grafik funkcije $P(x)$ je skiciran na slici 39.

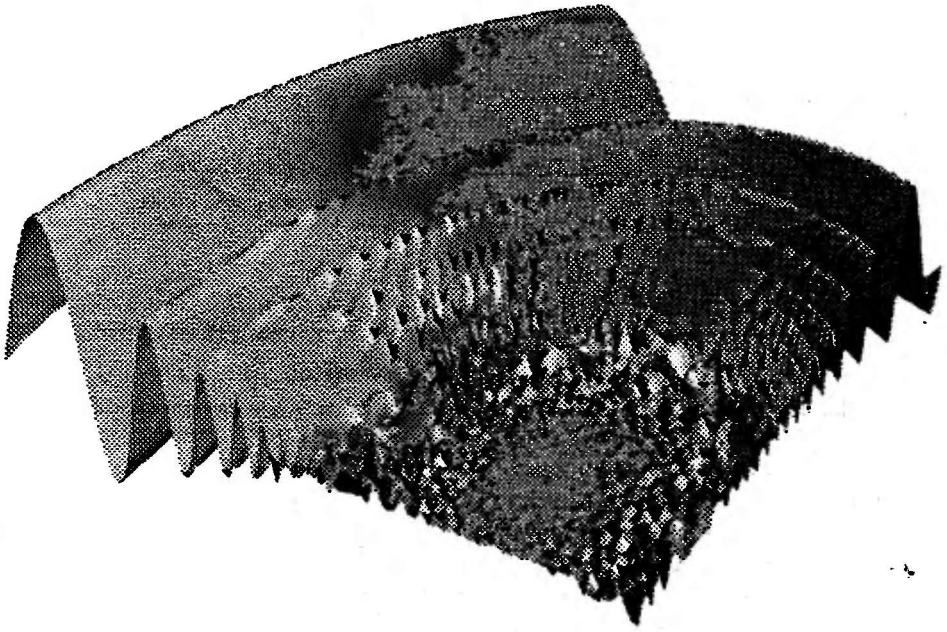


Slika 39. *Broj rešenja jednačine* $x^5 - 2x^4 + x^3 = -\lambda$ u *zavisnosti od* λ.

Za $\lambda > 0$ postoji samo jedan presek, pa data jednačina ima samo jedan realan koren. Za $\lambda = 0$, imamo dva preseka i dva realna korena date jednačine, od kojih je $x = 0$ trostruki koren. Ako je $-\lambda_0 < \lambda < 0$ ($\lambda_0 = -108/3125$), tada postoje tri preseka i tri realna korena date jednačine. Za $\lambda = \lambda_0$, jednačina ima jedan dvostruki koren u $x = -3/5$ i jedan koren prvog reda u intervalu $(1, +\infty)$. Ako je $\lambda < \lambda_0$, data jednačina ima samo jedan realan koren.

Primedba. Zadatak 656 takođe može da se reši na ovaj način.

►► 8.2.7



Stalno sam mislio o tome.
Isaac Newton (1642–1727), na pitanje kako je došao do svojih velikih otkrića.

Budući da ne žurim i da radim više za svoje zadovoljstvo nego zbog dužnosti, ja sam kao veliki bogovi koji grade: načinim, rušim, ponovo načinim, sve dok nisam potpuno zadovoljan rezultatima, a to se samo retko događa.
Joseph Louis Lagrange, 1736–1813.

Glava 4

Integralni račun

Smatra se da je ARHIMED prvi proučavao probleme određivanja površine geometrijskih figura, na način koji je bio blizak metodu integralnog računa. Pojam integrala u današnjem smislu pojavio se u 17. veku, sa NEWTONovim i LEIBNIZovim radovima, ali je tek sa CAUCHYjevom definicijom granične vrednosti bilo moguće dati i preciznu definiciju integrala kao granične vrednosti integralnih suma. LEIBNIZ je uveo simbol $\int$, koji asocira na sumiranje (kao modifikacija slova S).

U odeljcima 4.1 i 4.2 proučavamo neodređeni integral, kao formalizam inverzan diferenciranju. U odeljku 4.3 bavimo se RIEMANNovim određenim integralom i njegovim primenama.

4.1 Neodređeni integral: osnovni metodi integracije

4.1.1 Primitivna funkcija

- *Neka je f funkcija definisana na intervalu (a, b). Ako postoji funkcija F takva da je*

$$F'(x) = f(x) \quad (a < x < b),$$

ili, ekvivalentno,

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

tada kažemo da je F **primitivna funkcija** *funkcije f na intervalu (a, b).*

- *Ako je F primitivna funkcija funkcije f, tada je i $F+C$ primitivna funkcija funkcije f, gde je C proizvoljna konstanta.* **Neodređeni integral** *funkcije f definišemo pomoću*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,, \qquad (C = \text{const}, a < x < b)\,,$$

gde je F jedna primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a,b).

√ *Nalaženje integrala (integracija) je postupak inverzan diferenciranju:*

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C\,, \quad \mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x\,.$$

√ *Integral ima osobinu linearnosti: Ako funkcije f i g imaju primitivne funkcije na intervalu (a,b), tada za $x \in (a,b)$ važi*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})\,.$$

√ *Svaka funkcija koja je neprekidna na (a,b) ima na tom intervalu primitivnu funkciju.*

√ *Primitivna funkcija i neodređeni integral na datom intervalu (a,b) su neprekidne i diferencijabilne funkcije na (a,b).*

658. Naći $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, gde je funkcija f definisana pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,, & x < 0\,, \\ 3x^2\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

Rešenje. Data funkcija je neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$ pa je njen neodređeni integral definisan za svako $x \in \mathbf{R}$. Na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, integral date funkcije svodi se na tablične integrale:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C_1 & (x < 0), \\ \int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + C_2 & (x > 0). \end{cases}$$

Kako funkcija F treba da bude neprekidna u svakoj tački, iz uslova $F(0_-) = F(0_+)$ nalazimo da je $C_1 = C_2 (= C)$, odakle je

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + C & (x \leq 0) \\ x^3 + C & (x \geq 0) \end{cases}$$

Pokažite direktnim diferenciranjem da je zaista $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in \mathbf{R}$.

Funkcija	Integral	Interval za x
$x^a \quad a \geq 0$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$	$(-\infty,+\infty)$
$x^a \quad a<0, a\neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$	$(-\infty,0)$ ili $(0,+\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert+C$	$(-\infty,0)$ ili $(0,+\infty)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert+C$	$(-\infty,-1)$ ili $(-1,1)$ ili $(1,+\infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$	$(-1,1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\log(x+\sqrt{x^2+1})$	$(-\infty,+\infty)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$	$(-\infty,-1)$ ili $(1,+\infty)$
$a^x \quad a>0, a\neq 1$	$\frac{a^x}{\log a}+C$	$(-\infty,+\infty)$
e^x	e^x+C	$(-\infty,+\infty)$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	$\sin x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$	$(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$	$\left(\frac{(2k-1)\pi}{2},\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x+C$	$(-\infty,+\infty)$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x+C$	$(-\infty,0)$ ili $(0,+\infty)$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x+C$	$(-\infty,+\infty)$

Tablica integrala (C je proizvoljna konstanta).

659. Naći $F(x) = \int |x|\,dx$, za $x \in \mathbf{R}$.

Rezultat. $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{2} + C, & x \ge 0 \end{cases} = \frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x + C = \frac{x|x|}{2} + C.$

660. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \cos x - 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Ispitati da li postoji neodređeni integral date funkcije na $\mathbf{R}$ i ako postoji naći ga.

Rešenje. Data funkcija ima primitivnu funkciju na $\mathbf{R}$ jer je neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$. Ako potražimo primitivnu funkciju na domenima $x < 0$ i $x > 0$, dobijamo redom

$$F_1(x) = -\cos x + C_1 \quad (x < 0), \qquad F_2(x) = \sin x - x + C_2 \quad (x > 0).$$

Iz uslova neprekidnosti primitivne funkcije u nuli, nalazimo da je $F_1(0) = F_2(0)$, tj.

$$-1 + C_1 = C_2 \Rightarrow C_2 = C_1 - 1.$$

Ako stavimo $C_1 = C$, imamo da je

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C, & x \le 0, \\ \sin x - x + C - 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

661. Funkcija f je data pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & x \le -1, \\ 2x + 2 & -1 \le x \le 1, \\ 3x^2 + 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

Naći primitivnu funkciju ove funkcije na $(-\infty, +\infty)$.

Rešenje. Neka su F_1, F_2, F_3 primitivne funkcije na intervalima $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, +\infty)$ respektivno. Tada je

$$F_1(x) = x + \log(-x) + C_1, \quad F_2(x) = x^2 + 2x + C_2, \quad F_3(x) = x^3 + x + C_3.$$

Kako je funkcija f neprekidna na $\mathbf{R}$, ona ima primitivnu funkciju F, koja je na odgovarajućim intervalima jednaka funkcijama F_i $(i = 1, 2, 3)$ sa pogodno odabranim konstantama. Iz neprekidnosti funkcije F u tačkama -1 i 1 dobijamo

$$F_1(-1) = F_2(-1) \Rightarrow C_1 = C_2, \qquad F_2(1) = F_3(1) \Rightarrow 1 + C_2 = C_3.$$

Ako stavimo $C_1 = C_2 = C$, tada je $C_3 = 1 + C$ i traženu primitivnu funkciju možemo da napišemo u obliku

$$F(x) = \begin{cases} x + \log(-x) + C, & x \leq -1 \\ x^2 + 2x + C, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 + x + 1 + C, & x \geq 1. \end{cases}$$

662. Da li funkcija f definisana pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 3x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

ima primitivnu funkciju na $\mathbf{R}$?

Rešenje. Data funkcija je neprekidna na intervalima $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$ i na tim intervalima ona ima primitivne funkcije

$$F_1(x) = x^2 + C_1, \qquad F_2(x) = x^3 + C_2,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Pretpostavimo da postoji primitivna funkcija F date funkcije na $(-\infty, +\infty)$. Tada (sa nekim konstantama C_1 i C_2) važi da je

$$F(x) = F_1(x) \quad (x < 1), \qquad F(x) = F_2(x) \quad (x > 1).$$

Kako F mora da bude neprekidna funkcija u tački $x = 1$, zaključujemo da je

$$F_1(1) = F_2(1) \Rightarrow 1 + C_1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 = C.$$

Prema tome, ako postoji primitivna funkcija na $\mathbf{R}$, onda je to funkcija definisana sa

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + C, & x \leq 1, \\ x^3 + C, & x \geq 1. \end{cases}$$

Međutim, ovako definisana funkcija nema izvod u tački $x = 1$. Naime, u toj tački je

$$F'_-(1) = 2, \qquad F'_+(1) = 3.$$

Iz ovoga sledi da funkcija f nema primitivnu funkciju na $(-\infty, +\infty)$.

663. Neka je funkcija f definisana na (a, b) i neka u tački $x_0 \in (a, b)$ ima prekid prve vrste. Da li za funkciju f postoji primitivna funkcija na (a, b)?

Rešenje. Pretpostavimo da postoji primitivna funkcija F na (a, b). Po definiciji primitivne funkcije, treba da važi

$$\forall x \in (a, b) \qquad F'(x) = f(x).$$

Na osnovu uslova zadatka, funkcija f, a time i funkcija $x \mapsto F'(x)$ ima prekid prve vrste, što je nemoguće (videti 3.2.2 na strani 180).

Prema tome, funkcija ne može da ima primitivnu funkciju na intervalu na kome ima prekide prve vrste.

Na primer, HEAVISIDEova funkcija H (zadatak 52) nema primitivnu funkciju ni na jednom intervalu koji sadrži nulu.

664. Da li funkcija koja ima prekid na intervalu (a, b) može na tom intervalu da ima primitivnu funkciju?

Rešenje. Na osnovu zadatka 663, funkcija koja ima prekide prve vrste nema primitivnu funkciju. Međutim, primitivna funkcija može (ali ne mora) da postoji ako funkcija f ima prekid druge vrste u nekoj tački $x_0 \in (a, b)$, ali je definisana u toj tački.

Na primer, funkcija f definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ima primitivnu funkciju na svakom intervalu koji sadrži nulu, mada u tački $x = 0$ ima prekid druge vrste (videti zadatak 500).

665. Da li funkcija definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ima primitivnu funkciju na nekom intervalu koji sadrži nulu?

Rešenje. Funkcija f ima prekid druge vrste u nuli. Nije teško videti da je, za $x \neq 0$,

$$f(x) = \left(\cos \frac{1}{x} \right)',$$

što znači da je, za $x \neq 0$, primitivna funkcija date funkcije definisana sa

$$F(x) = \cos \frac{1}{x} + C.$$

Pretpostavimo da je $F(0) = A$. Iz neprekidnosti funkcije F u nuli dobijamo da je tada

$$\lim_{x \to 0} F(x) = A,$$

što je nemoguće, jer funkcija $x \mapsto \cos(1/x)$ nema graničnu vrednost kad $x \to 0$.

Prema tome, data funkcija nema primitivnu funkciju ni na jednom intervalu koji sadrži nulu.

666. Primenom osnovnih osobina integrala, naći neodređene integrale sledećih funkcija na intervalima na kojima su definisani:[1]

a) x^8+4x^3-5 , **b)** $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, **c)** $(2x^2+1)^3$, **d)** $(1+\sqrt{x})^3$, **e)** $\dfrac{(x+1)(x^2-3)}{x^3}$,

f) $\dfrac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}$.

Rešenje. **a)** Na osnovu linearnosti integrala,

$$\begin{aligned}\int (x^8+4x^3-5)\,dx &= \int x^8\,dx + 4\int x^3\,dx - 5\int dx \\ &= \frac{x^9}{9} + C_1 + 4\left(\frac{x^4}{4} + C_2\right) - 5(x+C_3) \\ &= \frac{x^9}{9} + x^4 - 5x + C,\end{aligned}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

b) Na sličan način može se integraliti i data polinomska funkcija:

$$\int \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

c) Primenom binomnog razvoja ovaj zadatak svodimo na slučaj b):

$$\int (2x^2+1)^3\,dx = \int (8x^6+12x^4+6x^2+1)\,dx = \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + x + C.$$

d) Na isti način postupamo i ako stepeni nisu celi:

$$\begin{aligned}\int (1+\sqrt{x})^3\,dx &= \int (1+x^{1/2})^3\,dx = \int (1+3x^{1/2}+3x+x^{3/2})\,dx \\ &= x + 2x^{3/2} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + C.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^3}\,dx &= \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{x^3}\,dx \\ &= \int \left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right) dx = x + \log|x| + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} + C.\end{aligned}$$

[1] U nastavku ovog odeljka tražićemo integrale i primitivne funkcije samo formalno, bez određivanja intervala na kojima su oni definisani, ukoliko se to eksplicitno ne zahteva u zadatku.

f)

$$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x+x^{3/2}-x^{1/2}-x}{x^{1/3}}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int \left(x^{7/6}-x^{1/6}\right)\mathrm{d}x = \frac{6}{13}x^{13/6}-\frac{6}{7}x^{7/6}+C\,.$$

4.1.2 Smena promenljive

✓ *(Smena $x=\varphi(t)$). Ako su funkcije f, φ i φ' neprekidne, tada je*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + C\,.$$

✓ *(Smena $\varphi(x)=t$). Ako funkcija φ ima inverznu funkciju $\psi=\varphi^{-1}$, i ako su funkcije φ, ψ i ψ' neprekidne, tada je*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t + C\,.$$

667. **Linearna smena.** Ako je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C\,,$$

dokazati da je tada

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a\neq 0)\,.$$

Rešenje. Polazeći od definicije primitivne funkcije, imamo da je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C \iff f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x)$$
$$\iff f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b) = \mathrm{d}F(ax+b)$$
$$\iff af(ax+b)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(ax+b)$$
$$\iff a\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = F(ax+b)+C\,,$$

čime je tvrđenje dokazano.

668. Naći integrale

a) $\int \frac{dx}{x+a}$, b) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$, c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Rešenje. a) Kako je

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C,$$

direktnom primenom zadatka 667 dobijamo da je

$$\int \frac{dx}{x+a} = \log|x+a| + C.$$

b) Transformisaćemo podintegralnu funkciju u oblik $a/(1+t^2)$, i time svesti integral na tablični:

$$\int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{2\left(1+\frac{3}{2}x^2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1+\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{1+t^2} \qquad (\text{smena } x\sqrt{\tfrac{3}{2}} = t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

c) Na isti način kao pod b) imamo da je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (\text{smena } x\sqrt{\tfrac{3}{2}} = t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin t + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

669. Naći integrale:

a) $\int (2x-3)^{10}\,dx$ $\qquad [\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C]$

b) $\int \sqrt[3]{2-3x}\,dx$ $\qquad [-\frac{1}{4}(2-3x)^{4/3}+C]$

c) $\int e^{2x+3}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2}e^{2x+3}+C\right]$

d) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$ $\quad\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C\right]$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$ $\quad\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}\right|+C\right]$

f) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)}$ $\quad\left[-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+4)+C\right]$

670. Naći integrale

$$\text{a)}\ \int \operatorname{sh} x\,dx, \qquad \text{b)}\ \int \operatorname{ch} x\,dx.$$

Rešenje. a) Iz $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ dobijamo da je

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^x\,dx - \frac{1}{2}\int e^{-x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} + C\right) = \operatorname{ch} x + C.$$

b) Na sličan način nalazimo da je

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$$

671. Naći integral $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Rešenje. Kako je $d(1+x^2) = 2x\,dx$, možemo uvesti smenu $1+x^2 = t$, $x\,dx = dt/2$, odakle se dobija

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\log|t| + C = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

672. Naći integrale

$$\text{a)}\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{b)}\ \int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx, \quad \text{c)}\ \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Rešenje. a) Smenom $t = 1-x^2$, $dt = -2x\,dx$, $x\,dx = -dt/2$, dobija se

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

b) Uvođenjem smene $t = 1 + x^3$, $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$, imamo

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}t^{4/3} + C = \frac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C\,.$$

c) Ako stavimo $t = 1/\sqrt{x}$, imaćemo $x = 1/t^2$, $\mathrm{d}x = -2/t^3\ \mathrm{d}t$, i zamenom u integral dobijamo

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -2\operatorname{arctg} t + C = -2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + C\,.$$

673. Naći integrale

$$\text{a)}\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x, \quad \text{b)}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Rešenje. **a)** Uvođenjem smene $t = 1/x$, $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t/t^2$, dobijamo:

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = -\int \sin t\ \mathrm{d}t = \cos t + C = \cos(1/x) + C\,.$$

b) Pomoću smene $t = 1/x$ dobijamo

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\operatorname{sgn}(t)\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\operatorname{sgn}(x)\cdot\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Primedba. Ako se u integralu pod b) uvede smena $t = (x^2-1)^{-1/2}$, dobija se rešenje u obliku

$$I = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C.$$

Ispitati kakva je veza između dva navedena oblika rešenja. Videti i zadatak 1267.

674. Naći sledeće integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\,\log|x^2+x|\,]$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{x^6+1}$ $\qquad [\,\operatorname{arctg} x^3\,]$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^4+6x^3+19x^2+30x+26}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\,\operatorname{arctg}(x^2+3x+5)+C\,]$

675. Naći integral $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Kako je $\mathrm{d}(\log x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, pogodna smena za nalaženje datog integrala je $\log x = t$. Uvođenjem ove smene, dati integral postaje

$$\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\log^2 x + C\,.$$

676. Naći integrale

a) $\int \frac{\log|x|}{x}\,dx$ $\quad[\frac{1}{2}\log^2|x|+C]$

b) $\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx$ $\quad[\frac{1}{3}\log^3 x+C]$

c) $\int \frac{dx}{x\log x}$ $\quad[\log|\log x|+C]$

d) $\int \frac{dx}{x\log x\log(\log x)}$ $\quad[\log|\log(\log x)|+C]$

677. Naći $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Rešenje. Ako uvedemo smenu $e^x=t$, $e^x\,dx=dt$, $dx=\frac{dt}{t}$, dobijamo

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{dt}{t(t+t^{-1})}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg} e^x+C.$$

678. Naći integrale:

a) $\int xe^{-x^2}\,dx$, b) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$, c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Rezultat. a) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$, b) $\log(1+e^x)+C$, c) $-\log\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)+C$.

679. Naći $\int \sin^5 x\cos x\,dx$.

Rešenje. Ovde je pogodna smena $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$, pomoću koje se dati integral svodi na

$$\int t^5\,dt=\frac{1}{6}t^6+C=\frac{1}{6}\sin^6 x+C.$$

680. Naći integrale:

a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$ $\quad[2(\cos x)^{-1/2}+C]$

b) $\int \operatorname{tg} x\,dx$ $\quad[-\log|\cos x|+C]$

c) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$ $\quad[\log|\sin x|+C]$

d) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$ $\quad[\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$, smena $\sin x-\cos x=t.]$

e) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ $\left[\ \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2\ \right]$

4.1.3 Transformacije podintegralne funkcije

Ako se integral ne može direktno svesti na tablični, primenjuju se različite transformacije podintegralne funkcije sa ciljem da se dobije tablični integral.

681. Naći $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Rešenje. Kako je $1+\cos x = 2\cos^2 x/2$, smenom $x/2 = t$ nalazimo da je

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

682. Naći integrale:

a) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$, b) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Rezultat.

a) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$, b) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C$.

683. Naći integrale:

a) $\int \sin^2 x\,dx$, b) $\int \cos^2 x\,dx$, .

Rešenje. Kako je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, imamo da je ♣

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Na sličan način dobija se da je

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

684. Naći integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$.

Rešenje. Ovde ćemo primeniti rastavljanje podintegralne funkcije na parcijalne razlomke, što ćemo sistematski obrađivati u 4.2.1. ♣

Naime, kako je

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1-x+1+x}{2(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right),$$

imamo da je

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{1+x}+\int\frac{dx}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\big(\log|1+x|-\log|1-x|\big)+C$$
$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

685. Naći $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

♣ **Rešenje.** Primetimo da je

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}.$$

Prema tome, traženi integral je

$$\frac{1}{2}\int(x+1)^{1/2}\,dx-\frac{1}{2}\int(x-1)^{1/2}\,dx=\frac{1}{3}\Big((x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}+C\Big).$$

686. Naći $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

♣ **Rešenje.** Napišimo x^2 u obliku polinoma po stepenima osnove $(x-1)$. Ovo se može uraditi ili neposrednim transformacijama ili primenom metode neodređenih koeficijenata ili primenom TAYLOROvog razvoja (poslednji način je najjednostavniji):

$$x^2=(x-1)^2+2(x-1)+1.$$

Odavde nalazimo da je

$$\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx=\int(1-x)^{-98}\,dx-2\int(1-x)^{-99}\,dx+\int(1-x)^{-100}\,dx$$
$$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$$

687. Naći $\displaystyle\int x^3\sqrt{x-2}\,dx$.

Uputstvo. Napisati x^3 u obliku polinoma po stepenima osnove $(x-2)$.

688. Naći $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Rešenje. Ako uočimo da je $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, dati integral možemo da napišemo u obliku zbira dva tablična integrala:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

689. Naći integral $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Deljenjem brojioca i imenioca podintegralne funkcije sa x^2, dati integral postaje

$$\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Ako stavimo $x + \frac{1}{x} = t$ i primetimo da je

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

integral dobijamo u obliku koji se lako svodi na tablični:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}(t/\sqrt{2})}{(t/\sqrt{2})^2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right| + C.$$

690. Neka je

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}.$$

Ako je F ona primitivna funkcija funkcije f na skupu $\mathbf{R}$, za koju je $F(0) = 0$, dokazati da je za $x \neq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x.$$

691. Naći $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Rešenje. Primenom trigonometrijskih transformacija dobijamo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$
$$= \int \mathrm{d}\left(\log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|\right) = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

692. Naći $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

♣ **Rešenje.** Trigonometrijskom smenom $x = \sin t$ ili $x = \cos t$ dobijamo (na primer, prvom navedenom smenom):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t}} = \int \operatorname{sgn}(\cos t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Kako je dati integral definisan samo za $x \in (-1,1)$, možemo da uzeti da je $t = \arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$, odakle sleduje da je $\operatorname{sgn}(\cos t) = 1$, pa je dati integral jednak

$$\int \mathrm{d}t = t + C = \arcsin x + C\,.$$

Ako se upotrebi smena $x = \cos t$, dobija se

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C\,,$$

što je isto kao i prethodno dobijen izraz, jer je $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$

693. Naći integrale

a) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}$ $\quad\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

694. Naći integrale

$$\text{a)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \text{b)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

♣ **Rešenje.** Za rešavanje integrala ovog tipa mogu se primeniti hiperboličke smene. Za razliku od zadatka 692, ovde nije svejedno koju smenu ($x = \operatorname{sh} t$ ili $x = \operatorname{ch} t$) treba upotrebiti.

Kod integrala a), uvođenjem smene $x = \operatorname{sh} t$ dobijamo

$$\sqrt{x^2+1} = \operatorname{ch} t\,, \quad \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t\,,$$

odakle je (videti zadatak 149):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int \mathrm{d}t = t + C = \operatorname{arsh} t + C = \log(x + \sqrt{x^2+1})\,.$$

Za rešavanje integrala b), pogodna je smena $x = \operatorname{ch} t$ (za $x \geq 0$), odnosno $x = -\operatorname{ch} t$ za $x < 0$, pri čemu se u oba slučaja može uzeti $t \geq 0$. Ako je $x \geq 0$, $x = \operatorname{ch} t$, tada je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \int \mathrm{d}t = \operatorname{arch} x + C = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

Za $x < 0$, $x = -\operatorname{ch} t$, dobijamo da je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{arch}(-x) + C = -\log(-x+\sqrt{x^2-1}) + C$$
$$= \log\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}}\right) + C$$
$$= \log(-x-\sqrt{x^2-1}) + C = \log|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

Nije teško videti da se u oba slučaja ($x \geq 0$ i $x < 0$) može upotrebiti poslednja formula, tj.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log|x+\sqrt{x^2-1}| + C \qquad |x| \geq 1.$$

695. Naći integrale

a) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ $\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) + C\right]$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ $\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) + C\right]$

696. Ako je $a \neq 0$, naći integral $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Rešenje. Koristeći ideju iz zadatka 668b), dobijamo

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2(1+(x/a)^2)} = \int \frac{a\,d(x/a)}{a^2(1+(x/a)^2)}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} \qquad (x/a = t)$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

697. Naći integrale (sa $a > 0$):

a) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ $\left[\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\right]$

b) $\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2}$ $\left[\pm\frac{1}{2}\log|a^2 \pm x^2| + C\right]$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\left[\arcsin\frac{x}{a} + C\right]$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ $\left[\log|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\right]$

e) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ $\quad [\ \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C\ ]$

f) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $\quad [\ \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C\ ]$

g) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ $\quad [\ \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\ ]$

698. Naći integral $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$.

♣ **Rešenje.** Integrali ovog tipa se mogu svesti na integrale jednog od oblika koji se pojavljuju u zadacima 696 i 697, ako se kvadratni trinom dovede na kanonski oblik $c(\pm t^2 \pm a^2)$. U datom primeru imamo da je

$$3x^2 - 2x - 1 = 3\left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) - \frac{4}{3} = 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right)$$
$$= 3(t^2 - a^2), \qquad \left(t = x - \frac{1}{3},\ a = \frac{2}{3}\right).$$

Ako iskoristimo rezultat zadatka 697a), dobijamo:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \int \frac{dt}{3(t^2 - a^2)} = \frac{1}{6a}\log\left|\frac{a - t}{a + t}\right| + C$$
$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x - 1}{3x + 1}\right| + C.$$

Primedba. U rešenju ovog zadatka pozvali smo se na gotovu formulu iz prethodnog zadatka, da bismo skratili pisanje. Čitaocu se ne preporučuje da pamti formule, već samo ideje i principe.

699. Naći integrale

a) $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$ $\quad [\ \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C\ ]$

b) $\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$ $\quad [\ \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2-\sqrt{2}-1}{x^2+\sqrt{2}+1}\right| + C$, najpre smena $x^2 = t$]

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$ $\quad [\ \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C\ ]$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}$ $\quad [\ \log\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right| + C\ ]$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}$ $\quad [\ \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 1}\right) + C\ ]$

4.1.4 Parcijalna integracija

✓ *Ako su u i v diferencijabilne funkcije promenljive x na intervalu (a,b), tada na tom intervalu važi*

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) + C\,.$$

Parcijalnu integraciju ima smisla primeniti ako je integral $\int v\,\mathrm{d}u$ jednostavniji za izračunavanje od polaznog integrala $\int u\,\mathrm{d}v$. Stoga se, po pravilu, za u bira funkcija koja se uprošćava diferenciranjem, dok se za v uzima funkcija koja se uprošćava integracijom.

700. Naći integral $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. U ovom slučaju imamo samo jednu mogućnost za parcijalnu integraciju, i to je

$$u = \operatorname{arctg} x\,, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,, \quad v = x$$

(Konstanta integracije za funkciju v može se izostaviti, jer na kraju dodajemo proizvoljnu konstantu). Odavde nalazimo

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\,.$$

Dalje kao u zadatku 671 dobijamo

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C,$$

pa je

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

701. Naći integral $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Ako stavimo

$$u = x\,, \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x\,, \quad v = e^x\,,$$

dobijamo

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + C\,.$$

702. Naći integral $\int x^3 e^x \, dx$.

♣ **Rešenje.** U ovom slučaju treba izvršiti tri parcijalne integracije da bi se na kraju dobio tablični integral $\int e^x \, dx$. Ako uvek biramo $dv = e^x \, dx$, dobijamo, redom:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x \, dx &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x \, dx \qquad (u = x^3,\ dv = e^x \, dx)\\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx) \qquad (u = x^2,\ dv = e^x \, dx)\\ &= (x^3 - 3x^2)e^x + 6(xe^x - \int e^x \, dx) \qquad (u = x,\ dv = e^x \, dx)\\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.\end{aligned}$$

703. Dokazati:

! $$\int P(x)e^{ax} \, dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C,$$

gde je P polinom stepena n i $a \neq 0$.

Rešenje. Traženu jednakost je najlakše dokazati nalaženjem izvoda desne strane:

$$\begin{aligned}&\left(e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C\right)'\\ &= ae^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right)\\ &\quad + e^{ax}\left(\frac{P'(x)}{a} - \frac{P''(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n+1)}}{a^{n+1}}\right)\\ &= e^{ax}\left(P(x) - \frac{P'(x)}{a} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n} + \frac{P'(x)}{a} - \frac{P''(x)}{a^2}\right.\\ &\quad \left. + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n+1)}(x)}{a^{n+1}}\right)\\ &= e^{ax}P(x) \qquad (\text{jer je } P^{(n+1)}(x) = 0).\end{aligned}$$

Dokaz se može izvesti i primenom parcijalne integracije.

704. Naći integrale

$$\text{a)} \int \sin(\log x) \, dx, \quad \text{b)} \int \cos(\log x) \, dx.$$

Rešenje. Ako stavimo

$$u = \sin(\log x), \quad dv = dx, \qquad du = \frac{\cos(\log x)}{x} \, dx, \quad v = x,$$

dobijamo (izostavljajući proizvoljnu konstantu, koju ćemo dodati na kraju):

$$\int \sin(\log x)\,dx = x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)\,dx, \tag{1}$$

pa izgleda da ovim nismo uprostili integral. Međutim, ako ponovo primenimo ♣ parcijalnu integraciju na poslednji integral, sa

$$u = \cos(\log x), \quad dv = dx, \qquad du = -\frac{\sin(\log x)}{x}\,dx, \quad v = x,$$

dobijamo da je

$$\int \cos(\log x)\,dx = x\cos(\log x) + \int \sin(\log x)\,dx. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) nalazimo oba integrala:

$$\int \sin(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\big(\sin(\log x) - \cos(\log x)\big) + C_1,$$

$$\int \cos(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\big(\sin(\log x) + \cos(\log x)\big) + C_2.$$

Primedba. Pokazati da se integrali a) i b) mogu napisati u obliku

$$\int e^t \sin t\,dt, \quad \text{odnosno} \quad \int e^t \cos t\,dt.$$

705. Izračunati integrale

$$A = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\;dx, \quad B = \int e^{\alpha x}\sin\beta x\;dx.$$

Rešenje. **I način:** Parcijalnom integracijom u integralu A ($u = e^{\alpha x}$, $dv = \cos\beta x\;dx$), dobijamo

$$A = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}B. \tag{1}$$

Parcijalnom integracijom u integralu B, sa $u = e^{\alpha x}$, $dv = \sin\beta x\,dx$, imamo

$$B = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}A. \tag{2}$$

Rešavanjem sistema jednačina (1)–(2) po A i B, nalazimo

$$A = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}, \quad B = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}.$$

II način: Kako je

$$A+iB=\int e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\,\mathrm{d}x=\int e^{(\alpha+i\beta)x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}=\frac{(\alpha-i\beta)(\cos\beta x+i\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x},$$

izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih delova sa leve i desne strane, dobijamo A i B.

III način: Neka je $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $g(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$. Tada je $f'=\alpha f-\beta g$ i $g'=\beta f+\alpha g$, odakle je

$$\alpha g'(x)-\beta f'(x)=(\alpha^2+\beta^2)g(x),\quad \beta g'(x)+\alpha f'(x)=(\alpha^2+\beta^2)f(x).$$

Integracijom dobijamo da je

$$\alpha g(x)-\beta f(x)=(\alpha^2+\beta^2)B,\quad \beta g(x)+\alpha f(x)=(\alpha^2+\beta^2)A,$$

iz čega nalazimo A i B.

III način je predložio mr Nenad Cakić.

706. Naći integrale:

a) $\int \log x\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,x(\log x-1)+C\,]$

b) $\int x^a\log x\,\mathrm{d}x,\quad a\neq -1$ $\quad[\,\frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x-\frac{1}{a+1}\right)+C\,]$

c) $\int \sqrt{x}\log^2 x\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\log^2 x-\frac{4}{3}\log x+\frac{8}{9}\right)+C\,]$

d) $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C\,]$

e) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}$ $\quad[\,-\frac{\arcsin x}{x}+\log\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C\,]$

f) $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}+C\,]$

g) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,2(t-1)e^t+C$, smena $\sqrt{x}=t\,]$

h) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,-t+(1+t^2)\operatorname{arctg} t+C$, smena $\sqrt{x}=t\,]$

i) $\int \cos^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C$, smena $\sqrt{x}=t\,]$

j) $\int x^7e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad[\,-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C\,]$

4.2 Neke važne klase integrala

4.2.1 Integracija racionalnih funkcija

Navodimo najpre nekoliko osobina racionalnih funkcija:

- *Neka su P i Q polinomi stepena m i n, respektivno. Racionalna funkcija*

(1) $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

naziva se **prava racionalna funkcija** *ako je $m < n$; u suprotnom slučaju je neprava. Ako je NZD $(P, Q) = 1$, racionalna funkcija se naziva* **nesvodljiva**, *inače je svodljiva.*

- *Racionalne funkcije definisane pomoću*

(2) $$\frac{A}{(x-a)^k}, \qquad A, a \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N},$$

(3) $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \qquad M, N, p, q \in \mathbf{R}, p^2 - 4q < 0, k \in \mathbf{N},$$

nazivaju se **parcijalni razlomci** *(Uočiti da je diskriminanta imenioca funkcije u (3) negativna, što znači da imenilac nema realnih nula). Pokazaćemo da se integracija racionalnih funkcija može svesti na integraciju samo parcijalnih razlomaka tipa (2) ili (3).*

√ *Svaka neprava racionalna funkcija može se razložiti na zbir polinoma i prave racionalne funkcije. Ovo razlaganje se dobija deljenjem brojioca sa imeniocem.*

√ *Svaka svodljiva racionalna funkcija se može napisati u obliku nesvodljive racionalne funkcije, tako što se "skrate" zajednički faktori u brojiocu i imeniocu.*

√ *Neka je sa (1) definisana prava i nesvodljiva racionalna funkcija, tj. $m < n$ i NZD $(P, Q) = 1$. Neka je polinom Q sa vodećim koeficijentom $a_n \neq 0$ faktorisan na sledeći način (videti 1.2.3 na strani 23):*

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}$$

gde su svi koeficijenti realni brojevi. Tada se racionalna funkcija P/Q može razložiti u zbir parcijalnih razlomaka:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_{i,j}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j},$$

pri čemu se realni koeficijenti $A_{i,j}$, $M_{i,j}$ i $N_{i,j}$ dobijaju metodom neodređenih koeficijenata.

Detaljnije, pri razlaganju na parcijalne razlomke važi sledeće pravilo:

Svakom faktoru oblika		*odgovaraju parcijalni razlomci*
$(x-a)$	$\longmapsto$	$\dfrac{A}{x-a}$
$(x-a)^k$	$\longmapsto$	$\dfrac{A_1}{(x-a)}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$
(x^2+px+q)	$\longmapsto$	$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^k$	$\longmapsto$	$\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\dfrac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$

Na osnovu izloženog, za integraciju racionalnih funkcija dovoljno je poznavati integrale sledećih oblika:

1°. $U(x,a,k)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}$, $\quad(a\in\mathbf{R},k\in\mathbf{N})$,

2°. $V(x,p,q,k)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$, $\quad(p,q\in\mathbf{R},p^2-4q<0,k\in\mathbf{N})$,

3°. $W(x,p,q,k)=\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$, $\quad(p,q\in\mathbf{R},p^2-4q<0,k\in\mathbf{N})$.

Integrali tri navedena oblika rešeni su u zadacima 707, 708 i 709.

707. Naći integral

$$U(x,a,k)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k},\qquad(a\in\mathbf{R},k\in\mathbf{N}.)$$

Rešenje. Uvođenjem smene $x-a=t$, dobijamo

$$U(x,a,k)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} & k\neq 1,\\ \log|x-a| & k=1.\end{cases}$$

708. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala

$$V(x,p,q,k)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k},\qquad p,q\in\mathbf{R},p^2-4q<0.$$

Naći ovaj integral za $k=1,2,3$.

Rešenje. Za fiksirane x, p, q uvedimo oznaku $I_k = V(x,p,q,k)$. Svođenjem kvadratnog trinoma na kanonski oblik (potpuni kvadrat), dobijamo

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - p^2/4\right)^k}.$$

Po pretpostavci je $4q - p^2 > 0$, pa možemo da uvedemo oznaku

$$D^2 = 4q - p^2.$$

Odavde je

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2 + \frac{D^2}{4}\right)^k}, \qquad \left(t = x + \frac{p}{2}\right).$$

Primenom parcijalne integracije, sa

$$u = \left(t^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{-k}, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}u = -2kt\left(t^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{-(k+1)}\mathrm{d}t, \quad v = t,$$

dobijamo, posle sređivanja:

$$I_k = \frac{t}{\left(t^2 + \frac{D^2}{4}\right)^k} + 2k\left(I_k - \frac{D^2}{4}I_{k+1}\right).$$

Ako odavde izrazimo I_{k+1} i vratimo se na promenljivu x, dobijamo

$$(1) \qquad I_{k+1} = \frac{2x+p}{kD^2(x^2+px+q)^k} + \frac{2(2k-1)}{kD^2}I_k \quad k = 1, 2, \ldots,$$

gde smo izostavili proizvoljnu konstantu.

Direktnim izračunavanjem integrala I_1 (videti zadatak 696), nalazimo

$$(2) \qquad I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{D^2}{4}} = \frac{2}{D}\operatorname{arctg}\frac{2t}{D} + C = \frac{2}{D}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{D} + C.$$

Formule (1) i (2) zajedno daju mogućnost izračunavanja integrala $I_k = V(x,p,q,k)$ za svako dato $k \in \mathbf{N}$. Na primer, ako u (1) stavimo $k = 1$, dobijamo I_2:

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^2} = \frac{2x+p}{D^2(x^2+px+q)} + \frac{4}{D^3}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{D} + C.$$

Znajući I_2, iz (1) nalazimo

$$I_3 = \frac{2x+p}{2D^2(x^2+px+q)^2} + \frac{3(2x+p)}{D^4(x^2+px+q)} + \frac{12}{D^5}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{D} + C.$$

709. Naći integral

$$W(x,p,q,k)=\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k},$$

gde je $p,q\in\mathbf{R}$, $p^2-4q<0$, $k\in\mathbf{N}$.

Rešenje. Neposredno nalazimo da je

$$\begin{aligned}W(x,p,q,k)&=\int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)-p}{(x^2+px+q)^k}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^k}-\frac{p}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)}\qquad (t=x^2+px+q)\\&=\frac{1}{2}U(x^2+px+q,0,k)-\frac{p}{2}V(x,p,q,k),\end{aligned}$$

gde su integrali U i V izračunati u zadacima 707 i 708 respektivno.

710. Naći integrale

$$I_k=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^k},\qquad (k=1,2,3).$$

Rezultat.

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C\\I_2&=\frac{2x+1}{7(x^2+x+2)}+\frac{4}{7^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C\\I_3&=\frac{2x+1}{14(x^2+x+2)^2}+\frac{3(2x+1)}{7^2(x^2+x+2)}+\frac{12}{7^{5/2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.\end{aligned}$$

711. Naći $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Ako su sve nule polinoma u imeniocu racionalne funkcije f proste, kao ♣ što je slučaj u ovom zadatku, postoji jednostavan način da se funkcija razloži na parcijalne razlomke. Iz

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3},$$

množenjem obe strane sa $(x+1)(x+2)(x+3)$ dobijamo

$$x=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2). \tag{1}$$

Ako u (1) stavimo redom $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, dobijamo $A=-1/2$, $B=2$, $C=-3/2$. Prema tome, dati integral se svodi na

$$\begin{aligned}&\int\left(-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{2(x+3)}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\log|x+1|+2\log|x+2|-\frac{3}{2}\log|x+3|+C\\&=\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|^{1/2}|x+3|^{3/2}}+C,\end{aligned}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Primedba. Striktno govoreći, s obzirom na način na koji je dobijena, jednakost (1) važi za svako $x\in\mathbf{R}$ sem za $x=-1,-2,-3$. Međutim, kako su obe strane u (1) neprekidne funkcije, dozvoljeno je uvrstiti i pomenute vrednosti.

712. Naći $\displaystyle\int\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Za podintegralnu funkciju važi razlaganje

$$(1)\qquad \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2},$$

gde su A,B,C,D nepoznati koeficijenti koje treba odrediti. Jednakost (1) je ekvivalentna sa

$$(2)\qquad x=A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x-1)^2(x+1)+D(x-1)^2.$$

Navodimo sada tri načina za određivanje koeficijenata u (2).

I način: Stepenovanjem i sređivanjem na desnoj strani u (2), dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$x=x^3(A+C)+x^2(A+B-C+D)+x(-A+2B-C-2D)+(-A+B+C+D).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene x, dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned}A+C&=0\\A+B-C+D&=0\\-A+2B-C-2D&=1\\-A+B+C+D&=0,\end{aligned}$$

čije je rešenje $A=0, B=1/4, C=0, D=-1/4$.

II način: Ako u (2) stavimo $x=1$, dobijamo $B=1/4$; sa $x=-1$ dobijamo $D=-1/4$. Da bismo izračunali A i C, stavimo u (2) dva proizvoljna realna broja

(različita od 1 i -1), na primer $x = 0$ i $x = 2$. Na taj način dobijamo sistem jednačina

$$0 = -A + \frac{1}{4} + C - \frac{1}{4}$$
$$2 = 9A + \frac{9}{4} + 3C - \frac{1}{4},$$

odakle nalazimo da je $A = C = 0$.

III način: Ako uočimo da je

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = 4x,$$

imamo razlaganje

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{4(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} \quad \square$$

Očigledno je treći način najjednostavniji, ali se može primeniti samo u jednostavnijim slučajevima, kada se odmah vidi kako treba transformisati polinom u brojiocu. Drugi način (zamena pogodnih vrednsti za x) može se uvek primeniti, čime se izbegava stepenovanje i sređivanje, a dobija se sistem jednačina.

Po dobijanju koeficijenata, dati integral se svodi na

$$\int \left(\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} \right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + C = \frac{1}{2(1-x^2)} + C.$$

713. Naći $\displaystyle\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Podintegralna funkcija je neprava racionalna funkcija (stepen brojioca nije manji od stepena imenioca). Stoga je najpre potrebno da se izvrši deljenje, kako bi se funkcija napisala u obliku zbira polinoma i prave racionalne funkcije. Deljenjem polinomâ na uobičajeni način, dobijamo

$$\frac{x^{10}}{x^2+x-2} = x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x + 342}{x^2+x-2}.$$

Dalje, kako je

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2),$$

jednostavno nalazimo da je

$$\frac{-341x+342}{x^2+x-2} = \frac{-341x+342}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1024}{3(x+2)}.$$

Na osnovu toga, dati integral se dobija u obliku

$$\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3}\log\frac{|x-1|}{|x+2|^{1024}} + C.$$

714. Naći $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$. Na kojim intervalima postoji ovaj neodređeni integral?

Rešenje. U ovom slučaju stepen brojioca je jednak stepenu imenioca, pa pre razlaganja na parcijalne razlomke treba izdvojiti slobodan član (tj. napisati podintegralnu funkciju u obliku zbira konstante i prave racionalne funkcije). To se može uraditi deljenjem, kao u zadatku 713, ali je jednostavnije da se primeni transformacija

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}.$$

Kako je

$$x^3-5x^2+6x = x(x-2)(x-3),$$

važi jednakost

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3},$$

tj.

$$5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$$

Ako ovde stavimo redom $x=0$, $x=2$ i $x=3$, nalazimo da je

$$A=\frac{1}{6},\quad B=-\frac{9}{2},\quad C=\frac{28}{3}.$$

Prema tome,

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}.$$

Integracijom poslednje jednakosti dobijamo

$$(1)\quad \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|+C.$$

Da bismo ustanovili na kojim intervalima postoji primitivna funkcija date funkcije, primetimo da funkcija $x\mapsto 1/x$ nema primitivnu funkciju ni na jednom intervalu koji sadrži nulu. Analogno, funkcija $x\mapsto 1/(x-a)$ nema primitivnu funkciju ni na jednom intervalu koji sadrži a. Odavde sleduje da data funkcija ima primitivnu funkciju koja je data izrazom (1), na jednom od sledećih intervala ili na njihovim podintervalima:

$$(-\infty,0),\quad (0,2),\quad (2,3),\quad (3,+\infty).$$

715. Naći $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$.

Rešenje. Razložimo najpre podintegralnu funkciju na parcijalne razlomke. Iz jednakosti

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

nalazimo da je $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$. Odavde je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$
$$= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

716. Naći integrale

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ $\quad\left[\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\right]$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$ $\quad\left[\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$

c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$ $\quad\left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C\right]$

717. Naći integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ za $x \in (-\infty, +\infty)$.

Rešenje. Odredimo najpre traženi integral formalno.

I način: Kako jednačina $x^4+1=0$ nema realnih korena, važi faktorizacija

$$x^4+1 = (x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2), \tag{1}$$

gde su diskriminante oba kvadratna trinoma u (1) negativne. Ako pretpostavimo da je $q_1=q_2=1$, tada izjednačavanjem koeficijenata u (1) nalazimo $p_1=\sqrt{2}$, $p_2=-\sqrt{2}$.

Alternativno, možemo uočiti da je

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

Dalje, iz

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

nalazimo

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D=\frac{1}{2}.$$

Odavde dobijamo da je traženi integral jednak

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right) + C.$$

Ovaj izraz se može uprostiti primenom formule iz zadatka 123.

II način: Direktnim transformacijama dobijamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} &= \frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)+(1+x^2)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C. \quad \square
\end{aligned}$$

Neka je $\varphi(x)$ funkcija definisana poslednjim izrazom sa $C = 0$. Ova funkcija je definisana, neprekidna i diferencijabilna za svako $x \in \mathbf{R}$ osim za $x = 0$, gde imamo da je

$$\varphi(0_-) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \qquad \varphi(0_+) = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Iz uslova neprekidnosti primitivne funkcije u nuli, nalazimo traženi integral u obliku

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x) + C & x < 0, \\ \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + C & x = 0, \\ \varphi(x) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C & x > 0, \end{cases}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

718. Naći $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Po pravilima o razlaganju racionalne funkcije na parcijalne razlomke, imamo

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2},$$

odnosno,

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+x+1) + (Dx+E)(x-1).$$

Ako se u poslednju jednakost stavi redom $x = 1, 0, -1, 2, -2$, dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2&=9A\\ -2&=A-C-E\\ -4&=A+2(B-C)+2(D-E)\\ 8&=49A+7(2B+C)+2D+E\\ -4&=9A+18B-9C+6D-3E, \end{aligned}$$

čije je rešenje dato sa

$$A=\frac{2}{9},\quad B=-\frac{2}{9},\quad C=-\frac{4}{9},\quad D=\frac{1}{3},\quad E=\frac{8}{3}.$$

Dati integral se, prema tome, svodi na

$$-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{2}{9}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

Rešavanjem ovih integrala (videti zadatak 710), nalazimo dati integral u obliku

$$\frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}-\frac{1}{9}\log(x^2+x+1)+\frac{2}{9}\log|x-1|+\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+C.$$

719. **Metod Ostrogradskog.** Dokazati: Ako je

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

gde je

$$Q(x)=a_n(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdots(x^2+p_kx+q_k)^{r_k}(x-x_{k+1})^{r_{k+1}}\cdots(x-x_s)^{r_s},$$

tada je

$$\int f(x)\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx+C, \tag{1}$$

gde je

$$\begin{aligned} Q_1(x)&=a_n(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}\cdots(x^2+p_kx+q_k)^{r_k-1}\\ &\quad\times(x-x_{k+1})^{r_{k+1}-1}\cdots(x-x_s)^{r_s-1},\\ Q_2(x)&=a_n(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_kx+q_k)(x-x_{k+1})\cdots(x-x_s), \end{aligned}$$

dok su P_1 i P_2 polinomi, $\operatorname{dg}P_1<\operatorname{dg}Q_1$, $\operatorname{dg}P_2<\operatorname{dg}Q_2$.

Rešenje. U zadatku 707 dokazali smo da je, za $k > 1$,

$$(2) \qquad U(x,a,k) = \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{\alpha}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad \alpha = \frac{1}{1-k}.$$

Iz rekurentne formule izvedene u zadatku 708, dobija se da je, za $k > 1$,

$$(3) \qquad V(x,p,q,k) = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$(4) \qquad = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \beta \int \frac{dx}{x^2+px+q} + C,$$

gde je R polinom, $\deg R < k-1$. Iz ove dve formule, primenom zadatka 709, nalazimo da je

$$(5) \quad W(x,p,q,k) = \int \frac{x\,dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{S(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \gamma \int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

gde je S polinom sa $\deg S < k-1$.

Kako se svaki integral oblika $\int P(x)/Q(x)\,dx$ može napisati u obliku zbira integrala oblika U, V ili W, formula (1) se dobija iz (2), (3) i (5).

720. Primenom metoda OSTROGRADSKOG, izloženog u zadatku 719, naći integral $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Rešenje. Na osnovu razvoja (1) iz zadatka 719, imamo da je

$$(1) \qquad \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{\alpha x+\beta}{(x-1)(x+1)}\,dx.$$

Podintegralna funkcija u integralu na desnoj strani u (1) može se dalje razložiti na parcijalne razlomke, tako da dobijamo

$$(2) \qquad \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + D\int \frac{dx}{x-1} + E\int \frac{dx}{x+1},$$

gde su A, B, C, D, E koeficijenti koje treba odrediti. Diferenciranjem jednakosti (2) i sređivanjem, dobijamo jednakost

$$x = (D+E)x^4 + (-A+2D)x^3 + (A-2B-2E)x^2 + (-2A+B-3C-2D)x + C - B - D + E,$$

odakle je

$$A = B = -\frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = -E = -\frac{1}{16}.$$

Prema tome, dati integral se svodi na

$$-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C.$$

721. Naći integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$.

Rešenje. Po metodu OSTROGRADSKOG, važi razlaganje

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + D\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x,$$

pri čemu smo koristili faktorizaciju $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.
Diferenciranjem i sređivanjem dobijamo

$$1 = -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1),$$

odakle nalazimo $A=C=0$, $B=1/3$, $D=-E=2/9$, $F=4/9$.
Dalje se, na standardan način dolazi do rešenja integrala u obliku

$$\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Primedba. Metod OSTROGRADSKOG, u poređenju sa "klasičnim" metodom razlaganja na parcijalne razlomke, ima prednost u tome što se svi integrali svode samo na integrale tipa

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} \quad \text{i} \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x,$$

čime se izbegavaju teži integrali kod kojih je imenilac podintegralne funkcije oblika $(x^2+px+q)^k$, $k>1$. Međutim, kod primene ovog metoda, komplikuje se nalaženje koeficijenata. Stoga se metod OSTROGRADSKOG primenjuje uglavnom u slučajevima kada imenilac podintegralne funkcije sadrži jedan ili više faktora oblika $(x^2+px+q)^k$, za $k>1$.

722. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} \qquad (a\neq 0, n=2,3,\ldots).$$

Rešenje. Parcijalnom integracijom integrala I_{n-1}, sa

$$u = \frac{1}{(x^2-a^2)^{n-1}},\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}u = 2(n-1)\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n},\ v=x,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \frac{t}{(t^2-a^2)^n} - 2(n-1)\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^n} \\ &= \frac{t}{(t^2-a^2)^n} - 2(n-1)\int \frac{t^2-a^2+a^2}{(t^2-a^2)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{(t^2-a^2)^n} - 2(n-1)I_{n-1} + 2(n-1)a^2 I_n. \end{aligned}$$

Odavde je

$$I_n = -\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

Primedba. Svaki integral oblika

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^n} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\alpha(x-x_1)^n(x-x_2)^n}, \quad (x_1, x_2 \in \mathbf{R})$$

može se svesti na integral I_n pomoću odgovarajuće smene. Iako se integrali ovog tipa mogu rešavati na standardan način, rastavljanjem na parcijalne razlomke, za veliko n jednostavnije je koristiti izvedenu rekurentnu formulu.

723. Naći integral $I = \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^4}$.

Rešenje. Ako bismo rešavali dati integral na uobičajen način, trebalo bi naći osam koeficijenata u razvoju

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^4} = \sum_{k=1}^{4} \frac{A_k}{(x-1)^k} + \sum_{k=1}^{4} \frac{B_k}{(x+1)^k}.$$

Primena metoda OSTROGRADSKOG bi takođe zahtevala nalaženje 8 koeficijenata. Umesto toga, uočimo da je

$$I = \int \frac{x^2-1+1}{(x^2-1)^4}\,\mathrm{d}x = I_3 + I_4,$$

gde je I_n integral iz zadatka 722 sa $a = 1$. Primenom izvedene rekurentne formule, nalazimo da je

$$I_1 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$

$$I_2 = -\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2}I_1,$$

$$I_3 = -\frac{x}{4(x^2-1)^2} - \frac{3}{4}I_2,$$

$$I_4 = -\frac{x}{6(x^2-1)^3} - \frac{5}{6}I_3.$$

Odavde je

$$I = -\frac{x}{6(x^2-1)^3} - \frac{x}{24(x^2-1)^2} + \frac{x}{16(x^2-1)} + \frac{1}{32}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

724. Neka je

$$F(x) = \int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Za koje vrednosti $a, b, c \in \mathbf{R}$ je funkcija F racionalna ?

Rešenje. Podintegralna funkcija se razlaže na parcijalne razlomke na sledeći način:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}. \tag{1}$$

Posle integracije, samo će članovi uz B, C i E biti racionalne funkcije; prema tome, integral F je racionalna funkcija ako i samo ako je $A = D = 0$. Ako se u (1) stavi $A = D = 0$ i desna strana dovede na zajednički imenilac, dobija se

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{(B+E)x^3 + (-2B+C)x^2 + (B-2C)x + C}{x^3(x-1)^2},$$

tj.

$$\begin{aligned} B+E &= 0 \\ -2B+C &= a \\ B-2C &= b \\ C &= c \end{aligned}$$

Iz prve,druge i četvrte jednačine gornjeg sistema, dobijamo da je

$$C = c, \quad B = b+2c, \quad E = -b-2c,$$

pa zamenom u treću jednačinu nalazimo

$$a+2b+3c = 0.$$

Ovo je potreban i dovoljan uslov da funkcija F bude racionalna (obrazložiti dovolj nost uslova).

725. Odrediti parametre $a, b, c \in \mathbf{R}$ tako da funkcija F definisana sa

$$F(x) = \int \frac{x^4+ax^2+bx+c}{(x-2)^2(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$$

bude racionalna. [$12a+5b+2c+64 = 0$]

726. Da li se realni brojevi a i b mogu odrediti tako da

$$\int \frac{x^2+ax+b}{(x-2)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$$

bude racionalna funkcija? [Ne mogu.]

727. Naći integrale racionalnih funkcija:

a) $\dfrac{x^2}{(x^2-1)(x^2-9)}$ $\left[\frac{3}{16}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \frac{1}{16}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\right]$

b) $\dfrac{x^3+3x+1}{x^2+3x+3}$ $\left[\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}\log(x^2+3x+3) - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C\right]$

c) $\dfrac{2x^2+3x+4}{(5x^2+2x+3)^2}$ $\left[\frac{59x-19}{140(5x^2+2x+3)} + \frac{23\sqrt{14}}{392}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{14}} + C\right]$

d) $\dfrac{2x+3}{(x^2+2x+3)(x^2+2x+4)}$

$\left[\log\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$

e) $\dfrac{3x^5+8x^3+9}{(x-1)(x^2-6x+8)}$

$\left[x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 113x + \frac{20}{3}\log|x-1| - \frac{169}{2}\log|x-2| + \frac{3593}{6}\log|x-4| + C\right]$

f) $\dfrac{x^4-10x^3+38x^2-65x+40}{(x^2-4x+5)(x^2-6x+10)(x-2)(x-3)}$

$\left[\log\left|\frac{x-2}{x-3}\right| + \operatorname{arctg}(x-2) + \operatorname{arctg}(x-3) + C\right]$

g) $\dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$ $\left[\frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1)\right]$

LEONARD EULER (1707–1783)

Smatra se da je ovaj švajcarski naučnik najplodniji matematičar svih vremena. Za njega se pričalo da je mogao napisati matematički rad između prvog i drugog poziva na obrok.

Radeći naporno na jednom astronomskom problemu, izgubio je vid na jedno oko, a u poznijim godinama je oslepeo i na drugo. Zahvaljujući svom izuzetnom pamćenju i sposobnosti da računa napamet, radio je i dalje, iako slep.

Dva EULERova studenta su, računajući neku sumu, dobili rezultate koji se nisu slagali na petnaestoj decimali. EULER je proverio čitav račun u glavi i tako je otkrio koji rezultat je bio pogrešan.

4.2.2 Integracija nekih iracionalnih funkcija

Neke klase integrala kod kojih podintegralna funkcija sadrži korene, mogu se svesti na integrale racionalnih funkcija. Navodimo ovde tri takve klase.

√ *Ako je podintegralna funkcija oblika*

$$R\left(x^{p_1/q_1}, \ldots, x^{p_k/q_k}\right) \qquad p_i, q_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots k,$$

gde je R racionalna funkcija, tada se smenom

$$x^{1/q} = t\,, \qquad q = \text{NZS}(q_1, \ldots q_k)$$

integral svodi na integral racionalne funkcije po t.

√ *Ako je podintegralna funkcija oblika*

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\,,$$

mogu se primeniti EULEROve *smene pomoću kojih se integral svodi na integral racionalne funkcije. Nova promenljiva t se uvodi pomoću*

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm x\sqrt{a} + t\,, && \text{ako je } a > 0\,,\\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= xt \pm \sqrt{c}\,, && \text{ako je } c > 0\,,\\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)\,, && \text{ako } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

pri čemu se u prve dve formule može uzimati ili znak + ili znak −.

√ *Integral oblika*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \,\mathrm{d}x \qquad m, n, p \in \mathbb{Q},\quad m = \frac{m_1}{m_2},\ n = \frac{n_1}{n_2},\ p = \frac{p_1}{p_2}\,,$$

naziva se **integral binomnog diferencijala.** *Ovaj integral može se izraziti pomoću elementarnih funkcija (i to svođenjem na integrale racionalnih funkcija) samo u tri slučaja:*

p ceo broj: Smena $x = t^k$, gde je $k = \text{NZS}(m_2, n_2)$.

$\dfrac{m+1}{n}$ ceo broj: Smena $a + bx^n = t^{p_2}$.

$\dfrac{m+1}{n} + p$ ceo broj: Smena $ax^{-n} + b = t^{p_2}$.

728. Naći $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x}}$.

Rešenje. Smenom

$$\sqrt{x} = t\,, \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\,,$$

dati integral se svodi na

$$\int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2\log(1+t) + C = 2\sqrt{x} - 2\log(1+\sqrt{x}) + C.$$

729. Naći integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

Rešenje. U podintegralnoj funkciji se pojavljuje $x^{1/2}$ i $x^{1/3}$. Kako je NZS(2, 3) = 6, pogodna smena je

$$x^{1/6} = t, \quad dx = 6t^5\,dt.$$

Primenom ove smene dobija se integral racionalne funkcije:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{6t^5\,dt}{t^6(1+2t^3+t^2)} = 6\int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)} \\
&= 6\left(\log t - \frac{1}{4}\log(t+1) - \frac{3}{8}\log(2t^2-t+1) - \frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right) + C \\
&= \log\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^{3/2}(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^{9/4}} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C
\end{aligned}$$

730. Naći $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$.

Rešenje. Ako stavimo $\sqrt[3]{x+2} = t$, dobijamo integral racionalne funkcije: ♣

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx = 3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}\,dt \\
&= 3\int \left(t^3 - t + \frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}\right) dt \\
&= \int \left(3t^3 - 3t - \frac{3}{4(t-1)} + \frac{15t-6}{4(t^2+t+2)}\right) dt \\
&= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\log|t-1| + \frac{15}{8}\log(t^2+t+2) - \frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

731. Naći integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$.

Rezultat. Pomoću smene $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = t$, dobija se da je integral jednak

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

732. Naći $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\,dx$.

Uputstvo. Primeniti smenu $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \sqrt[4]{\frac{x}{a-x}} = t$.

733. Izračunati integral

$$J = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Rešenje. I način: Primenom EULERove smene $\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$ dobijamo

$$x = 2\frac{t-1}{t^2+1},\quad dx = 2\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Odavde je

$$J = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{2}{1+t^2}\right) dt$$
$$= \log\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C, \qquad t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}.$$

II način: Uvođenjem EULERove smene $\sqrt{1-2x-x^2} = xt+1$, dobijamo

$$J = \int \frac{t^2+2t-1}{(1+t^2)(1-t)}\,dt = \int \left(\frac{1}{1-t} - \frac{2}{1+t^2}\right) dt$$
$$= -\log|1-t| - 2\operatorname{arctg} t + C, \qquad t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}.$$

734. Naći integrale:

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ $\quad\left[\frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2}\log\frac{t^4}{|2t+1|^3} + C,\quad t = x+\sqrt{x^2+x+1}\right]$

b) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

$$\left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}(t-1)^3 + (t-1)^2 + (t-1) + \frac{1}{3(t-1)^3} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1}\right) + C,\right.$$
$$\left. t = x+\sqrt{x^2-2x+2}\right]$$

c) $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}$ $\quad\left[\sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C\right]$

735. Naći integral $F(x) = \int \sqrt{x^3 + x^4}\,\mathrm{d}x$, gde je $x > 0$.

Rešenje. Ovo je integral binomnog diferencijala, sa $m = 3/2, n = 1, p = 1/2$:

$$F(x) = \int \sqrt{x^3 + x^4}\,\mathrm{d}x = \int x^{3/2}(1+x)^{1/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Kako je $(m+1)/n + p = 3$ ceo broj, treba upotrebiti smenu

$$x^{-1} + 1 = t^2\,, \quad x = \frac{1}{t^2 - 1}\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}\,.$$

Na taj način dobijamo

$$F(x) = -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^4} = -2G(t)\,,$$

gde je integral $G(t)$ izračunat u zadatku 723.

Primedba. Podintegralna funkcija je definisana i neprekidna i za $x \in (-\infty, -1)$. Kako se dobija funkcija F u ovom slučaju?

736. Naći integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Rešenje. Po pravilima integracije binomnog diferencijala, stavimo

$$(1) \qquad t = \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}}\,, x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}\,, \mathrm{d}x = -(t^3-1)^{-4/3}t^2\,\mathrm{d}t \qquad (x \neq 0)\,.$$

Na ovaj način dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t-1)(t^2+t+1)} = -\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1} + \frac{-t+1}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{3}\log|t-1| + \frac{1}{6}\log(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Primedba. Smena (1) nije definisana za $x = 0$. Da li izvedena formula važi i na intervalu koji sadrži nulu ?

Pokažite da se smenom $t = x/\sqrt[3]{1+x^3}$, koja je definisana za svako x iz domena podintegralne funkcije, dobija isti rezultat.

737. Ispitati da li je

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = P(t)\,,$$

gde je $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$ i P – polinom.

738. Naći integrale

a) $\int (1+x^4)^{-1/4}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,\quad t = x^{-1}(1+x^4)^{-1/4}\right]$

b) $\int x(1+x^6)^{-1/6}\,dx$

$$\left[\frac{1}{6}\log\left|\frac{t-1}{1+t}\right| + \frac{1}{12}\log\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{3}} + C,\quad t = (1+x^6)^{1/6}\right]$$

c) $\int x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/5}\,dx$ $\quad\left[\frac{5}{4}t^4 - \frac{5}{9}t^9 + C,\quad t = (1+\frac{1}{x})^{1/5}\right]$

d) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$

$$\left[\frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4}\log\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,\quad t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}\right]$$

739. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala

$$J_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Rešenje. Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\begin{aligned}
J_n &= -\int x^{n-1}\,d\sqrt{1-x^2} = -(x^{n-1}\sqrt{1-x^2} - (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx)\\
&= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\
&= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - (n-1)\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\
&= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n\,.
\end{aligned}$$

Odavde se dobija rekurentna formula

$$J_n = -\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}J_{n-2}\,.$$

4.2.3 Integracija trigonometrijskih funkcija

Integrali oblika

(1) $$\int R(\sin x, \cos x)\,dx\,,$$

gde je R racionalna funkcija, mogu se svesti na integrale racionalnih funkcija po promenljivoj integracije.

√ *Svaki integral oblika (1) može se, primenom smene*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\,,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\quad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

svesti na racionalnu funkciju po t. Iako je ova smena primenljiva kod svakog integrala navedenog tipa, ona obično dovodi do komplikovanih racionalnih funkcija, pa se zato upotrebljava uglavnom u slučajevima kada se integral ne može rešiti na drugi način.

√ *Ako je*

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\,,$$

tada se, pored navedene, može primeniti i smena[1]

$$\cos x=t\,,\quad \sin x=\sqrt{1-t^2}\,,\quad \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\,,$$

√ *Ako je*

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\,,$$

može se primeniti smena

$$\sin x=t\,,\quad \cos x=\sqrt{1-t^2}\,,\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

√ *Ako je*

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)\,,$$

integral se može rešiti pomoću smene

$$\operatorname{tg}x=t\,,\quad \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\,.$$

√ *Ako podintegralna funkcija zavisi od trigonometrijskih funkcija različitih argumenata, na primer $f(\sin\alpha x,\sin\beta x)$, tada se u nekim slučajevima, primenom raznih trigonometrijskih transformacija, ovi integrali mogu rešiti.*

740. Neka je $(u,v)\mapsto R(u,v)$ racionalna funkcija dve promenljive. Dokazati:

a) Ako je $R(-u,v)=-R(u,v)$, tada je

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=-\int R\left(\sqrt{1-t^2},t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\qquad(\text{smena } t=\cos x).$$

[1] U ovom, kao i u sledeća dva slučaja, može se, za razliku od onoga što je rečeno u 1.3.2 na strani 29, uvek uzeti znak + u transformacionim formulama, na primer $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ itd. Videti zadatak 740.

b) Ako je $R(u,-v) = -R(u,v)$, tada je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (\text{smena } t = \sin x).$$

c) Ako je $R(-u,-v) = R(u,v)$, tada je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad (\text{smena } t = \operatorname{tg} x).$$

Rešenje. **a)** Ako je x takvo da je $\sin x \geq 0$, tada se ova formula dobija direktno iz jednakosti $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, gde je $t = \cos x$. Neka je $\sin x < 0$, tj $\sin x = -\sqrt{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/\sqrt{1-t^2}$ i neka je $R(-u,v) = -R(u,v)$. Tada je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(-\sqrt{1-t^2}, t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\int R\left(\sqrt{1-t^2}, t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},$$

što znači da se dobija isti rezultat kao u slučaju da je $\sin x \geq 0$.

Druge dve formule se dokazuju na analogan način.

741. Naći integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos x}$.

Rešenje. Podintegralna funkcija je oblika $R(\sin x, \cos x)$, gde je racionalna funkcija R data sa $R(u,v) = 1/(u^2 v)$. Kako je $R(u,-v) = -R(u,v)$, pogodna smena je $\sin x = t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos x} &= \int \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1-t^2)} = \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.\end{aligned}$$

742. Primenom smene $\sin x = t$ ili $\cos x = t$ naći integrale:

a) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ $\quad\left[\frac{2}{15}\sin x + \frac{1}{15}\sin x \cos^2 x - \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + C\right]$.

b) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ $\quad\left[-\left(\frac{\sin^2 x}{5} + \frac{2}{5}\right)\cos^3 x + C\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$ $\quad\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\cos x}\right| + C\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin^2 x - \cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$

$\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\log(2\cos x + 1 + \sqrt{5}) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\log(2\cos x + 1 - \sqrt{5}) - \cos x + C\right]$

e) $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx$

$[\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\log\frac{2-\sin x}{2+\sin x} + C$, rastaviti na dva integrala $]$

f) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ $\qquad [\ \frac{1}{6}\log\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C\ ]$

743. Za $x \in (-\infty, +\infty)$ naći integral

(1) $$F(x) = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$$

Rešenje. Primenom smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dobijamo

$$F(x) = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

(2) $$= \int \frac{dt}{3\left((t+1/3)^2 + (\sqrt{5}/3)^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C.$$

Ovo je, međutim, rešenje samo na intervalu na kome je funkcija $x \mapsto \operatorname{tg} x/2$ neprekidna i na kome ima inverznu funkciju, jer je smena $\varphi(x) = t$ dozvoljena samo ako su φ i njena inverzna funkcija neprekidne (videti 4.1.2).

Prema tome, sa (2) je dato rešenje integrala samo za $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, tj.

(3) $$(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi,$$

gde je $n \in \mathbf{Z}$ fiksirano.

S druge strane, podintegralna funkcija u (1) je neprekidna na $\mathbf{R}$. Naime, ova funkcija bi imala prekid samo ako bi jednačina $2\sin x = 5 + \cos x$ imala rešenja, što nije moguće, jer je $2\sin x \le 2$, dok je $5 + \cos x \ge 4$ za svako $x \in \mathbf{R}$.

Iz neprekidnosti podintegralne funkcije sledi da ona ima primitivnu funkciju koja je takođe neprekidna na $(-\infty, +\infty)$. Ako je C_n konstanta u (2), za fiksirano n imamo da je

(4) $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_n, \quad (2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$$

Iz uslova

$$\lim_{x\to(2n+\pi)_-} F(x) = \lim_{x\to(2n+\pi)_+} F(x),$$

i iz (4) dobijamo vezu između konstanti C_n i C_{n+1}:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1}, \quad \text{tj.} \quad C_{n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_n.$$

Ako stavimo $C_0 = C$, tada iz poslednje jednakosti dobijamo

$$C_n = \frac{n\pi}{\sqrt{5}} + C, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{5}$$

Odavde je

$$F((2n+1)\pi) = \lim_{x \to (2n+1)\pi} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}}\pi + C.$$

Konstanta C_n određena pomoću (5), važi ako je

$$2n\pi - \pi < x < 2n\pi + \pi, \quad \text{odnosno} \quad n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1,$$

odakle nalazimo da je $n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$ $(x \neq (2n+1)\pi)$, gde je $[\cdot]$ ceo deo realnog broja. Prema tome,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{5}} \left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right] + C, & x \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{2n+1}{2\sqrt{5}}\pi + C = \dfrac{x}{2\sqrt{5}}\pi + C, & x = (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Primedba. U svim zadacima u kojima se uvode smene $\operatorname{tg} x/2 = t$ ili $\operatorname{tg} x = t$, s obzirom na njihove prekide, može se razmatrati problem određivanja integracionih konstanti tako da primitivna funkcija bude definisana na čitavom domenu na kome je podintegralna funkcija neprekidna. Ako u postavci zadatka nije eksplicitno rečeno, mi ćemo ignorisati ovaj problem, i time tražiti neodređeni integral samo na jednom od intervala na kojima je smena neprekidna.

744. Ako je $a \in \mathbf{R}$, naći integral $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + a\cos x}$.

Rešenje. Ako stavimo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dobijamo da je

$$I = \frac{2}{1-a} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + b}, \qquad b = \frac{1+a}{1-a}, a \neq \pm 1.$$

Dalji postupak zavisi od znaka b.

1° Ako je $-1 < a < 1$, tada je $b > 0$, pa se dobija

$$I = \frac{2}{1-a^2} \operatorname{arctg} t\sqrt{b} + C, \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2° Ako je $a < -1$ ili $a > 1$, tada je $b < 0$ i integral postaje

$$I = \frac{2}{1-a} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - |b|} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \log \left| \frac{t - \sqrt{|b|}}{t + \sqrt{|b|}} \right| + C.$$

3° Za $a=-1$, dati integral je jednak

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$$

4° Za $a=1$ imamo da je

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

745. Naći integral $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,\mathrm{d}x$.

$$\left[-\tfrac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\tfrac{4}{5\sqrt{5}}\log\left|\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}+\tfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|+C\right]$$

746. Naći $I=\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Pomoću smene $\operatorname{tg}x=t$ dobijamo

$$I=\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+(t^2)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t^2+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2x+C.$$

747. Ako je $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, odrediti primitivnu funkciju funkcije f na $(-\infty,+\infty)$.

Rešenje. Data funkcija je neprekidna za svako $x\in\mathbf{R}$ i ima primitivnu funkciju na $\mathbf{R}$.

I način: Uvedimo smenu $\operatorname{tg}x=t$. Tada je

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

Ovim smo dati integral sveli na integral racionalne funkcije. Dalje se može nastaviti na standardan način, ali je jednostavnije da se primeni smena $t-1/t=u$, pomoću koje nalazimo

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t&=\int\frac{1/t^2+1}{1/t^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}\operatorname{tg}x}+C.\end{aligned}\tag{1}$$

II način: Kako je

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1+\cos^2 2x}{2},$$

možemo uvesti smenu $\operatorname{tg} 2x = t$, tako da dati integral postaje

$$F(x) = \int \frac{2}{1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C. \tag{2}$$

Pokažite da se izrazi na desnim stranama u (1) i (2) mogu razlikovati samo za proizvoljnu konstantu na intervalima na kojima su neprekidni. □

Primitivnu funkciju na $\mathbf{R}$ odredićemo polazeći od izraza (2). Kako je funkcija $x \mapsto \operatorname{tg} 2x$ neprekidna za $x \in \left(\frac{2n-1}{4}\pi, \frac{2n+1}{4}\pi\right)$, imamo da je

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C_n, \quad x \in \left(\frac{2n-1}{4}\pi, \frac{2n+1}{4}\pi\right), n = 0, \pm 1, \ldots \tag{3}$$

Iz uslova neprekidnosti primitivne funkcije u krajnjim tačkama navedenih intervala, dobijamo (na isti način kao u zadatku 743):

$$C_{n+1} = C_n + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \text{tj.} \quad C_n = C + \frac{\pi}{\sqrt{2}}n.$$

Kako važi

$$\frac{2n-1}{4}\pi < x < \frac{2n+1}{4}\pi \Rightarrow n = \left[\frac{2x}{\pi} + \frac{1}{2}\right],$$

konstantu C_n možemo napisati u obliku

$$C_n = \left[\frac{2x}{\pi} + \frac{1}{2}\right] \cdot \frac{\pi}{2} + C.$$

U tačkama $x_n = (2n+1)\pi/4$ važi da je

$$F(x_n) = \lim_{x \to x_n} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} + C.$$

Prema tome, funkcija F je definisana na $\mathbf{R}$ pomoću

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + \left[\dfrac{2x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right] \cdot \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} + C, & x \neq \dfrac{2n+1}{4}\pi \\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + \dfrac{n\pi}{\sqrt{2}}, & x = \dfrac{2n+1}{4}\pi. \end{cases} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots)$$

748. Naći integrale:

a) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x-1}{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}\right)+C\right]$

b) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$ $\left[x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C\right]$

749. Naći integral $\int \sin^3 x\,dx$.

Rešenje. Kako je podintegralna funkcija neparna po $\sin x$, kanonska smena kojom se rešava ovaj integral je $\cos x = t$. Zaista,

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x\,d(\cos x) = -\int (1-t^2)\,dt$$
$$= -\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

Primedba. Na ovaj način jednostavno se rešavaju integrali tipa $\int (\sin x)^{2n+1}\,dx$ ili $\int (\cos^x) 2n+1\,dx$.

750. Naći integral $\int \sin^4 x\,dx$.

Rešenje. Pomoću smene $\operatorname{tg} x = t$ ovaj integral se može svesti na integral racionalne funkcije. Međutim, jednostavnije je iskoristiti ideju iz zadatka 683:

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$$
$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{4} = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

Primenom ove transformacije nalazimo da je

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

751. Naći integral $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Rešenje. **I način:** Smenom $\cos x = t$ dobijamo

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}.$$

II način: Ako se uvede smena $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, dobija se jednostavniji integral:[1]

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=\int\frac{(1+t^2)^2}{4t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\log|t|+\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}\log|t|+\frac{1}{8}\frac{(t^2-1)(t^2+1)^2}{(t^2+1)t^2}+C=\frac{1}{2}\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C.$$

752. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala

$$S_n=\int\sin^n x\,\mathrm{d}x\qquad(n\geq 2).$$

Rešenje. I način:

$$S_n=\int\sin^{n-1}x\sin x\;\mathrm{d}x=-\int\sin^{n-1}x\;\mathrm{d}(\cos x)$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\;\mathrm{d}x$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\;\mathrm{d}x$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\,.$$

Rešavanjem po S_n dobijamo

$$S_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}\,.$$

II način: Ako se u integralu

$$J_n=\int\frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\;\mathrm{d}t$$

uvede smena $t=\sin x$, dobiće se

$$J_n=S_n\operatorname{sgn}(\cos x)\,.$$

Prema tome, integrali S_n i J_n se svode jedan na drugi. Rekurentnu formulu za izračunavanje integrala J_n izveli smo u zadatku 739.

753. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala

$$C_n=\int\cos^n x\;\mathrm{d}x\,.$$

Rezultat. $C_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}C_{n-2}$.

[1] Ovo je jedan od retkih slučajeva u kojima se smenom $\operatorname{tg} x/2=t$ dobija jednostavniji integral nego primenom alternativnih trigonometrijskih smena.

754. Primenom formula

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

naći integrale

$$C_n = \int \cos^n x \, dx \text{ i } S_n = \int \sin^n x \, dx$$

u konačnom obliku.

Rešenje.

Za integral C_n imamo

$$C_n = \int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n dx = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int e^{i(2k-n)x}\, dx$$

Kako je C_n realan broj, imamo da je

$$(1)\quad C_n = \operatorname{Re}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int e^{i(2k-n)x}\,dx = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int \cos(2k-n)x\,dx\,.$$

Dalje je

$$\int \cos(2k-n)x\, dx = \begin{cases} \frac{1}{n-2k}\sin(n-2k)x, & n \neq 2k, \\ x, & n = 2k, \end{cases}$$

tako da je potrebno posebno razmatrati slučaj parnog i neparnog n.

Ako je n neparno, iz (1) sledi

$$(2)\qquad C_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\sin(n-2k)x}{n-2k}\,.$$

Kako je

$$\binom{n}{k}\frac{\sin(n-2k)x}{n-2k} = \binom{n}{n-k}\frac{\sin(n-2(n-k))x}{n-2(n-k)},$$

jednakost (2) postaje

$$C_n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k}\frac{\sin(n-2k)x}{n-2k}, \quad n \text{ neparno}\,.$$

Za parno n dobijamo

$$C_n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\frac{\sin(n-2k)x}{n-2k} + \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2}x\,, \quad n \text{ parno}\,.$$

Na sličan način (uz nešto više pažnje), dobija se

$$S_n = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos(n-2k)x}{n-2k}, \quad n \text{ neparno},$$

$$S_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin(n-2k)x}{n-2k} + \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2}x, \quad n \text{ parno}.$$

U izvedenim formulama treba još dodati proizvoljne konstante.

755. Izračunati integral

$$J = \int \cos^5 x \, dx$$

na dva načina: smenom $\sin x = t$ i metodom iz zadatka 754. Na osnovu ovoga dokazati da je

(1) $$48\sin^5 x - 160\sin^3 x = 3\sin 5x + 25\sin 3x - 90\sin x.$$

Rešenje. Ako se u datom integralu uvede smena $\sin x = t$, dobija se

$$J = \int (1-t^2)^2 \, dt = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C_1.$$

Iz rešenja zadatka 754 sleduje da je

$$J = \frac{1}{16}\left(\frac{\sin 5x}{5} + \frac{5\sin 3x}{3} + 10\sin x\right) + C_2.$$

Izjednačavanjem dva nađena izraza za J i sređivanjem, dobija se

(2) $$48\sin^5 x - 160\sin^3 x = 3\sin 5x + 25\sin 3x - 90\sin x + C,$$

gde je C neka konstanta. Ako u (2) stavimo $x = 0$, dobijamo da je $C = 0$, čime je dokazana jednakost (1).

756. Izvesti rekurentne formule za izračunavanje integrala ($n \geq 2$)

$$\text{a) } I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad \text{b) } J_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

Rezultat.

$$\text{a) } I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2},$$

$$\text{b) } J_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}.$$

757. Naći integral $\int \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$.

Rešenje. Kako je (videti 1.3.2)

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x),$$

dat integral se svodi na

$$\frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x.$$

758. Ako je $|a| \neq |b|$, naći integrale:

a) $\int \sin ax \cos bx \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right) + C \right]$

b) $\int \sin ax \sin bx \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right) + C \right]$

c) $\int \cos ax \cos bx \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right) + C \right]$

759. Naći integral

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)}, \quad (\alpha - \beta \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}).$$

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \int \frac{\sin((x+\alpha)-(x+\beta))}{\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \int \frac{\sin(x+\alpha)\cos(x+\beta) - \cos(x+\alpha)\sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \left(\int \frac{\cos(x+\beta)}{\sin(x+\beta)}\, \mathrm{d}x - \int \frac{\cos(x+\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \log \left| \frac{\sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha)} \right| + C. \end{aligned}$$

760. Ako je $\alpha \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbf{Z}$, naći integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - \sin \alpha}$.

Rezultat. $\frac{1}{\cos\alpha} \log \left| \frac{\sin((x-\alpha)/2)}{\cos((x+\alpha)/2)} \right| + C.$

►► 8.3

4.3 Određeni integral

4.3.1 Definicija određenog integrala

- *Neka je dat interval* $[a,b], a<b$ *i neka je* $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. *Neka su* $\xi_i, i=0,\ldots,n-1$ *zadate tačke na segmentima* $[x_i,x_{i+1}]$. *Tačkama* x_i *i* ξ_i *definisana je jedna* **podela intervala** $[a,b]$. *Ako je* d *data podela, tada se veličina*

$$\|d\| = \max_{0\le i\le n-1} |x_{i+1}-x_i|$$

naziva **normom podele** d.

- *Neka je funkcija* f *definisana na* $[a,b]$. *Za datu podelu* d, **integralna suma** *funkcije* f *na* $[a,b]$ *je*

$$S(f,d,a,b)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\,.$$

- **Određeni integral** *(ili* RIEMANNov *integral) funkcije* f *na intervalu* (a,b) *definiše se pomoću*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|d\|\to 0} S(f,d,a,b)\,,$$

ako postoji konačna granična vrednost sa desne strane i ako je ona nezavisna od izbora podela.

Preciznije, ako za svako dato $\varepsilon>0$ *postoji* $\delta>0$ *tako da za svaku podelu* d *sa* $\|d\|<\delta$ *važi da je*

$$|S(f,d,a,b)-I|<\varepsilon\,,$$

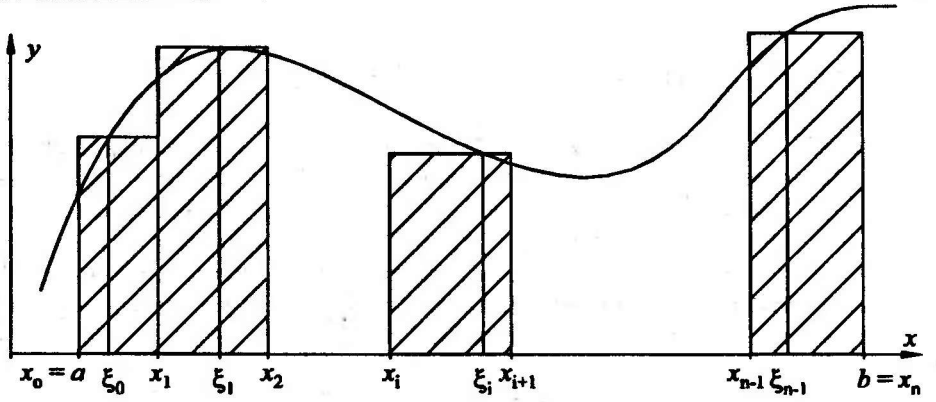
tada se realan broj I *naziva određenim integralom funkcije* f *na* $[a,b]$. □

Za nenegativnu funkciju f, *određeni integral je granična vrednost zbira površina pravougaonika koji su upisani u figuru kao na slici 40. Stoga određeni integral daje mogućnost izračunavanja površinâ krivolinijskih figura (u stvari, površina se i definiše pomoću integrala).*

√ *U simbolu* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, x *se pojavljuje kao tzv.* **nema promenljiva**, *tj. ovaj izraz ne zavisi od* x. *Tako je, na primer,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u=\ldots$$

- *Za funkciju za koju postoji određeni integral na* $[a,b]$ *kažemo da je* **integrabilna funkcija** na $[a,b]$.



Slika 40. *Uz definiciju određenog integrala*

√ *Svaka funkcija koja je neprekidna na* $[a, b]$ *ili ima konačno mnogo prekida je integrabilna na tom intervalu.*

√ *Svaka integrabilna funkcija na* $[a, b]$ *je ograničena na* $[a, b]$.

• *Neka je*

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Donja i gornja integralna suma *za funkciju* f *definišu se, respektivno, pomoću*

$$S_*(f, d, a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad S^*(f, d, a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

√ *Funkcija* f *je integrabilna na* $[a, b]$ *ako i samo ako postoji zajednička granična vrednost donjih i gornjih integralnih suma kada norma podele teži nuli. Ta granična vrednost je jednaka integralu funkcije* f *na* $[a, b]$.

√ *Funkcija* f *je integrabilna na* $[a, b]$ *ako i samo ako je*

$$\lim_{\|d\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = 0,$$

tj. ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za svaku podelu* d *čija je norma* $\|d\|$ *manja od* δ, *važi*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon.$$

761. Polazeći od definicije, izračunati $\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Funkcija $x \mapsto x^2$ je neprekidna na $[-1,2]$ i stoga je integrabilna. Prema tome, graničnu vrednost integralnih suma možemo da nađemo polazeći od proizvoljne podele, i puštajući da norma podele teži nuli. Najjednostavniji način da se to uradi jeste da se interval $[-1,2]$ podeli na n jednakih delova, pri čemu se za ξ_i uzimaju leve (ili desne) krajnje tačke tako dobijenih intervala. Ovakva podela se naziva **ekvidistantna podela**. Integralna suma koja se u ovom primeru dobija (uzimajući za ξ_i leve krajnje tačke intervalâ) je

$$S_n = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right) = \frac{3}{n}\left(n-\frac{3(n-1)}{2n}\right).$$

Odavde je

$$\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} S_n = 3.$$

762. Polazeći od definicije određenog integrala, izračunati $\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Ako podelimo segment $[0,\pi/2]$ ekvidistantnom podelom na n delova dužine $\pi/2n$, dobijamo

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin(\pi/4)\sin((n-1)\pi/4n)}{\sin(\pi/4n)} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4n}\cdot\frac{\sin(\pi/4-\pi/4n)}{\sin(\pi/4n)}, \end{aligned}$$

gde smo koristili formulu za zbir $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$, koja je izvedena u zadatku 100.

Iz poslednje jednakosti imamo da je

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

763. Dokazati da je $\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x$.

764. Izračunati $\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Ako u ovom zadatku primenimo ekvidistantnu podelu, dobićemo sumu četvrtih stepena prirodnih brojeva. Jednostavnije je, međutim, da uvedemo podelu

u kojoj tačke podele obrazuju geometrijsku progresiju, a da za tačke u kojima izračunavamo funkciju uzmemo leve krajnje tačke tako dobijenih intervala. Prema tome, imamo da je

$$x_i = 2^{i/n}\ ;\ x_{i+1} - x_i = 2^{i/n}(\sqrt[n]{2} - 1)\,, i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

odakle je

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^4 (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{4i/n} \cdot 2^{i/n}(\sqrt[n]{2} - 1)$$
$$= (\sqrt[n]{2} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} 2^{5i/n} = \frac{(\sqrt[n]{2} - 1)(2^5 - 1)}{\sqrt[n]{32} - 1}\,.$$

Traženi integral jednak je

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{31}{5}\,.$$

765. Polazeći od definicije određenog integrala, izračunati $\int_a^b x^m \, \mathrm{d}x$, $m \in \mathbf{Z}$, $0 < a < b$.

Uputstvo. Izabrati podelu po geometrijskoj progresiji, kao u zadatku 764. Razlikovati slučajeve $m \neq -1$ i $m = -1$.

766. Pokazati da funkcija

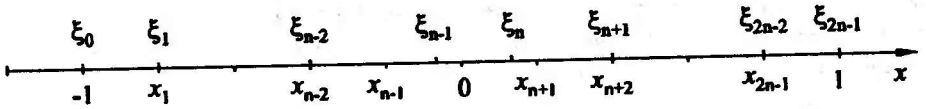
$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\,, \\ 1\,, & x \in \mathbf{Q}\,, \end{cases}$$

nije integrabilna na $[a, b]$, za proizvoljne realne brojeve $a < b$.

Rešenje. Pri proizvoljnoj podeli intervala $[a, b]$, u svakom od dobijenih n intervala postojaće i racionalne i iracionalne tačke. S obzirom na definiciju funkcije f, to znači da f u svakom od intervala dostiže minimum $m_i = 0$ i maksimum $M_i = 1$. Stoga su donja i gornja integralna suma respektivno,

$$S_*(f, d, a, b) = 0\,, \quad S^*(f, d, a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = b - a\,.$$

Kako ovo važi za svaku podelu d, očigledno je da donje i gornje sume ne mogu imati zajedničku graničnu vrednost, pa integral ne postoji.



Slika 41. *Integralna podela iz zadatka 767.*

767. Da li je funkcija $f(x) = 1/x$ integrabilna na $[-1, 1]$?

Rešenje. Nije. Posmatrajmo ekvidistantnu podelu intervala $[-1, 1]$ na $2n$ delova, pomoću tačaka

$$x_i = -1 + \frac{i}{n}, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Neka je (videti sliku 41)

$$\xi_i = \begin{cases} x_i & i = 0, 1, \ldots, n-2, \\ -\dfrac{1}{n^{a-1}} & i = n-1, \\ \dfrac{1}{n^{b-1}} & i = n, \\ x_{i+1} & i = n+1, \ldots, 2n-1, \end{cases}$$

gde su a i b proizvoljni pozitivni brojevi. Ove tačke su izabrane tako da su ξ_i i ξ_{2n-i-1} $(i = 0, 1, \ldots, n-2)$ simetrične u odnosu na nulu, tj.

$$\xi_i + \xi_{2n-i-1} = x_i + x_{2n-i} = -1 + \frac{i}{n} - 1 + \frac{2n-i}{n} = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2),$$

dok tačke u prvom levom i prvom desnom intervalu do nule nisu simetrične.

Integralna suma za datu funkciju je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{2n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=n+1}^{2n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &\quad + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + f(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} (f(\xi_i) + f(\xi_{2n-i-1}))\frac{1}{n} + (f(\xi_{n-1}) + f(\xi_n))\frac{1}{n} \\ &= n^b - n^a, \end{aligned}$$

jer je, na osnovu uočene osobine simetrije,

$$f(\xi_i)+f(\xi_{2n-i-1})=\frac{1}{\xi_i}+\frac{1}{\xi_{2n-i-1}}=0\,,\quad (i=0,1,\ldots,n-2)\,.$$

Kad bi funkcija f bila integrabilna, postojala bi jedinstvena granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, koja ne bi zavisila od izbora a i b. Međutim, lako je videti da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\begin{cases}0\,, & a=b\,,\\ +\infty\,, & a<b\,,\\ -\infty\,, & a>b\,,\end{cases}$$

odakle sleduje da funkcija f nije integrabilna na $[-1,1]$.

Primedba. Na isti način se dokazuje da data funkcija nije integrabilna ni na jednom intervalu koji sadrži nulu.

768. Da li je funkcija definisana sa

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}\,, & \text{ako je } x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbf{N},\ \mathrm{NZS}(p,q)=1\\ 0\,, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj}\,,\end{cases}$$

integrabilna na $[0,1]$?

Rešenje. Data funkcija ima beskonačno mnogo tačaka prekida, ali je ipak integrabilna na $[0,1]$ (a i na svakom konačnom intervalu). Dokazaćemo da je ispunjen potreban i dovoljan uslov integrabilnosti

$$\lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)=0\,. \tag{1}$$

Neka je d podela za koju je $\|d\|<\lambda$. Za fiksiran prirodan broj N, svaki interval podele ili sadrži racionalne brojeve oblika p/q, gde je $\mathrm{NZS}(p,q)=1$ i $q\le N$ ili ne sadrži takve racionalne brojeve.

a) Kako racionalnih brojeva oblika p/q, $\mathrm{NZS}(p,q)=1$, $q\le N$ ima samo konačno mnogo, recimo k_N, onda broj intervala podele koji sadrže takve brojeve mora biti manji ili jednak od k_N; njihova ukupna dužina je manja ili jednaka $2k_N\lambda$ (u najgorem slučaju, dva susedna intervala mogu da sadrže po jednu takvu tačku). Na svakom intervalu je $M_i-m_i\le 1$, što proizilazi iz definicije funkcije f. Prema tome,

$$\sum_{i\in I}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)\le 2k_N\lambda\,,$$

gde je sa I označen skup indeksa i takav da i-ti interval sadrži racionalne brojeve oblika p/q, $\mathrm{NZS}(p,q)=1$, $q\le N$.

b) Neka je J skup indeksa ostalih intervala. U njima je $M_i - m_i < 1/N$, a njihova ukupna dužina je manja od 1; prema tome,

$$\sum_{i\in J}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \le \frac{1}{N}.$$

Odavde sledi da za datu podelu važe nejednakosti

$$0 \le \sum_{i}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \le 2k_N\lambda + \frac{1}{N}.$$

Za dato $\varepsilon > 0$ neka je $N > 2/\varepsilon$ i neka je $\|d\| < \lambda < \varepsilon/(4k_N) = \delta$. Tada je

$$\sum_{i}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon \text{ za}$$

čime je dokazano da važi (1) i da je, prema tome, data funkcija integrabilna.

769. Dokazati: Ako se integrabilne funkcije f i g razlikuju u konačno mnogo tačaka na $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

4.3.2 Izračunavanje određenih integrala

√ **Newton-Leibnizova formula.** *Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i neka je F njena primitivna funkcija na $[a, b]$ (videti 4.1.1). Tada je*

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

U navedenoj formuli, F može da bude bilo koja primitivna funkcija, jer se u izrazu $F(b) - F(a)$ poništavaju konstante po kojima se dve primitivne funkcije mogu razlikovati.

Primenom NEWTON–LEIBNIZove *formule, primitivna funkcija i neodređeni integral mogu se izraziti preko određenog integrala: Stavimo u (1) da je $b = x$ i $F(a) = C$, čime dobijamo*

$$(2) \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

gde je a proizvoljan realan broj takav da je funkcija f neprekidna na nekom intervalu koji sadrži tačke a i x.

✓ *Formula (1) važi i ako je F primitivna funkcija za f samo na intervalu (a,b), pri čemu postoje granične vrednosti funkcije F u tačkama a i b zdesna odnosno sleva. U tom slučaju imamo da je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b_-) - F(a_+) = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)\,.$$

✓ *Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$, tada je integrabilna i na svakom intervalu koji je sadržan u $[a,b]$.*

✓ *Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$, tada je*

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

✓ **Aditivnost.** *Ako su a,b,c realni brojevi i ako je funkcija f integrabilna na nekom intervalu koji sadrži a,b,c, tada važi*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

✓ **Linearnost.** *Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, tada je*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad (\alpha,\beta\in\mathbf{R})\,.$$

✓ *Ako je f integrabilna funkcija na $[a,b]$ $(a>b)$ i ako je $f(x)>0$ za svako $x\in[a,b]$, tada je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.*

✓ *Ako je f integrabilna na $[a,b]$ $(a>b)$, tada je funkcija $|f|$ takođe integrabilna na $[a,b]$ i važi* **nejednakost trougla za integral**:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

770. Primenom NEWTON-LEIBNIZove formule, izračunati integrale:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Rešenje. a) Funkcija $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ ima primitivnu funkciju $F(x)=\frac{3}{4}x^{4/3}$. Primenom NEWTON-LEIBNIZove formule nalazimo da je

$$\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = F(8) - F(-1) = \frac{3}{4}\left(8^{4/3} - (-1)^{4/3}\right) = \frac{45}{4}\,.$$

b) Neodređeni integral funkcije $x \mapsto \sin x$ jednak je $-\cos x + C$. Prema tome,

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = \cos 0 - \cos \pi = 2 .$$

Primetimo da se konstanta C ne uzima u obzir pri računu, jer je

$$(-\cos x + C)\Big|_0^{\pi} = (-\cos \pi + C) - (-\cos 0 + C) = \cos 0 - \cos \pi .$$

c) Kako je $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, imamo da je

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{3} .$$

771. Izračunati $\int_0^2 |1-x| \, dx$.

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} \int_0^2 |1-x| \, dx &= \int_0^1 |1-x| \, dx + \int_1^2 |1-x| \, dx \\ &= \int_0^1 (1-x) \, dx + \int_1^2 (x-1) \, dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 1 . \end{aligned}$$

Primedba. Ako bismo direktno primenili NEWTON–LEIBNIZovu formulu, bilo bi potrebno da se nađe primitivna funkcija za funkciju $x \mapsto |1-x|$ na intervalu $[0, 2]$ (videti i zadatak 659 na strani 284). Zbog osobine aditivnosti određenog integrala, primitivna funkcija se ne mora nalaziti na čitavom intervalu integracije (što nekad može značajno da olakša rešavanje zadatka). Naime, ako funkcija f ima primitivne funkcije F_1 i F_2 na intervalima $[a, c]$ i $[c, b]$ respektivno, tada je

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = F_1(x)\Big|_a^c + F_2(x)\Big|_c^b .$$

772. Naći $\int_0^2 f(x) \, dx$, gde je

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Rešenje. Imamo da je

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

773. Izračunati $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Rešenje. U zadatku 743 smo našli primitivnu funkciju na intervalima $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C, \tag{1}$$

Za nalaženje primitivne funkcije na $(0, 2\pi)$, potrebno je odrediti vezu između konstanti C_1 i C_2 na intervalima $(0,\pi)$ i $(\pi, 2\pi)$ respektivno, iz uslova neprekidnosti funkcije F u tački π. Na osnovu primedbe u zadatku 771, umesto toga možemo da podelimo interval integracije na dva intervala na kojima je primitivna funkcija (1) neprekidna:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$
$$= F(\pi_-) - F(0) + F(2\pi) - F(\pi_+) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Primetimo da bi se nepravilnom primenom NEWTON–LEIBNIZove formule dobio pogrešan rezultat:

$$F(2\pi) - F(0) = 0.$$

774. Da li se NEWTON–LEIBNIZova formula može primeniti na izračunavanje integrala

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) dx$?

Rešenje. a) Formalnom primenom NEWTON–LEIBNIZove formule dobili bismo

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \log|x|\,\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Međutim, uslovi za primenu ove formule nisu zadovoljeni, jer podintegralna funkcija ima prekid u tački $x = 0$. U zadatku 767 pokazano je da funkcija $x \mapsto 1/x$ nije integrabilna na $[-1, 1]$. Prema tome, određeni integral $\int_{-1}^{1} dx/x$ ne postoji.

b) Kako je $\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + C$, formalno dobijamo da je

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Međutim, funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x)$ nije neprekidna u tački $x = 0$, pa stoga ne može da bude primitivna funkcija na intervalu $[-1, 1]$. Pravilan postupak za izračunavanje datog integrala je:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0-} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{0+}^{1} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Primedba. Šta bi se dobilo pod a) ako bi se primenio isti postupak kao pod b)? Obrazložiti.

775. Uporediti sledeće integrale po veličini (bez izračunavanja):

a) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,\mathrm{d}x$ i $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$,

b) $I_1 = \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ i $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. a) Za $x \in (0, \pi/2)$ imamo da je $\sin^{10} x < \sin^2 x$; stoga je funkcija $f(x) = \sin^2 x - \sin^{10} x$ pozitivna na datom intervalu, pa je i njen integral pozitivan, tj.

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = I_2 - I_1 > 0.$$

b) Za $x \in (0, 1)$ važi nejednakost $e^{-x} < e^{-x^2}$, odakle na isti način kao pod a), zaključujemo da je $I_1 < I_2$.

4.3.3 Smena promenljive

✓ *Smena $x = \varphi(t)$:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

ako važi sledeće:

Funkcija f je neprekidna na $[a, b]$,

$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

funkcije φ i φ' su neprekidne na $[\alpha, \beta]$,

funkcija $t \mapsto f(\varphi(t))$ je definisana za sve vrednosti $t \in [\alpha, \beta]$.

√ *Smena* $\varphi(x) = t$*:*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ako važi:

Funkcija f *je neprekidna na* $[a,b]$,

$\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$,

funkcija φ *je strogo monotona (rastuća ili opadajuća) na* $[a,b]$ *i ima inverznu funkciju* $\psi = \varphi^{-1}$

funkcija ψ *ima neprekidan izvod na* $[\alpha,\beta]$.

Smena $\varphi(x) = t$ *se najčešće koristi u slučaju kada podintegralna funkcija već sadrži faktor* $\varphi'(x)$*; u tom slučaju važi:*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ako su ispunjeni navedeni uslovi.

776. Izračunati $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad (a > 0)\,.$

Rešenje. Smenom $x = a\sin t\,, t \in [0, \pi/2]$, dobijamo

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}\,.$$

Primetimo da, za razliku od postupka kod neodređenog integrala, pri smeni promenljive kod određenog integrala nije potrebno vraćati se na početnu promenljivu. !

777. Da li je ispravan sledeći postupak: Smenom $\sin x = t$, $\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-t^2}$, dobijamo

$$\int_0^{5\pi/6} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}\Big|_0^{1/2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,?$$

Rešenje. Postupak nije ispravan, jer se uzima da je $\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}x = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ na celom domenu integracije, što nije tačno u ovom slučaju. Osnovna greška je u tome što funkcija $x \mapsto \sin x$ nije monotona na $[0, 5\pi/6]$, pa se smena $\sin x = t$ ne može upotrebiti. ¡

Navedena smena može se uvesti na sledeći način:

$$\int_0^{5\pi/6} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{5\pi/6} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} - \int_1^{1/2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\sqrt{1-t^2}\Big|_0^1 + \sqrt{1-t^2}\Big|_1^{1/2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

778. U integralu $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$ uvesti smenu $\sin x = t$.

Rešenje. Interval $[0, 2\pi]$ možemo da predstavimo kao uniju tri intervala na kojima je funkcija $x \mapsto \sin x$ strogo monotona:

$$[0, 2\pi] = [0, \pi/2] \cup [\pi/2, 3\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]\,.$$

Slično kao u zadatku 125, zaključujemo da važi

$$\sin x = t \iff x = \begin{cases} \arcsin t\,, & x \in [0, \pi/2] \\ \pi - \arcsin t\,, & x \in [\pi/2, 3\pi/2] \\ 2\pi + \arcsin t\,, & x \in [3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

Prema tome,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(\arcsin t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^0 f(2\pi + \arcsin t)\,\mathrm{d}t.$$

779. Da li je ispravan sledeći postupak: Uvođenjem smene $x = \cos t$, $t \in [-1, 1]$, dobijamo

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos^2 t}\,(-\sin t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\,?$$

780. Izračunati integral

$$I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{2x - x^2}}\,.$$

Rešenje. Uvedimo novu promenljivu t pomoću EULERove smene

$$\sqrt{2x - x^2} = xt\,,\quad x = \frac{2}{1 + t^2}\,,\quad \mathrm{d}x = -\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(1 + t^2)^2}\,.$$

Odavde je

$$I = 4\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1 + t)^2(1 + t^2)}\,.$$

Ako stavimo

$$\frac{t}{(1 + t)^2(1 + t^2)} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B}{(1 + t)^2} + \frac{Ct + D}{1 + t^2}\,,$$

dobijamo $A = 0$, $B = -1/2$, $C = 0$, $D = 1/2$, pa je

$$I = 4\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t)^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

781. Dokazati da važi formula

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

i primeniti je na izračunavanje integrala

$$J = \int_0^{\pi/3} \log(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešenje. Da bismo dokazali (1), uvedimo novu promenljivu t pomoću smene $x = a - t$:

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(a-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(a-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ako ovu formulu primenimo na integral J, dobijamo:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/3} \log\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \log\left(1+\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\,\mathrm{tg}\,x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/3} \log\frac{4}{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{d}x = \log 4\int_0^{\pi/3}\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/3}\log(1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\pi}{3}\log 2 - J\,. \end{aligned}$$

Odavde je $J = \frac{\pi}{3}\log 2$.

782. Dokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,\mathrm{d}x\,,$$

gde je f neprekidna funkcija na $[0,1]$.

783. Neka je f neprekidna i periodična funkcija, sa periodom T. Dokazati da za svako $a, b \in \mathbf{R}$ važi

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

tj. integrali funkcije f po svakom intervalu dužine T su jednaki.

784. Neka je funkcija f neprekidna na $[-a,a]$ i parna. Tada je

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ako je f neprekidna na $[-a, a]$ i neparna, tada je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Dokazati.

Uputstvo. U oba slučaja primenti smenu $x = -t$.

785. Dokazati da su sledeći integrali jednaki nuli:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^{17}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, b) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin 2x (\cos x)^{4/3}\,dx$.

786. Neka je f neprekidna, neparna i periodična funkcija sa periodom T. Dokazati da tada za svako $a \in \mathbf{R}$ važi

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = 0.$$

787. Dokazati da su sledeći integrali jednaki nuli:

a) $\int_{\pi}^{4\pi/3} \sin 3t \cos^2 6t\,dt$, b) $\int_{0}^{2\pi} e^{\cos t} \sin 7t \cos 8t\,dt$,

c) $\int_{-1}^{3} \frac{\sin 4\pi x - \sin 5\pi x}{\sin^2 2\pi x + \cos^2 3\pi x}\,dx$.

788. Dokazati osobine **ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija**: Ako su m, n celi brojevi različiti od nule, tada je

$$\int_{0}^{2\pi} \cos mx \cos nx = \pi\delta_{m,n}, \int_{0}^{2\pi} \sin mx \cos nx = 0, \int_{0}^{2\pi} \sin mx \sin nx = \pi\delta_{m,n},$$

gde je

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } m \neq n \\ 1, & \text{ako je } m = n \end{cases}$$

789. Dokazati da za svaku neprekidnu funkciju f važi

$$\int_{0}^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\,dx.$$

Rešenje. Neka je α ugao za koji važi

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Tada je $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$. Na osnovu zadatka 783, imamo da je

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f\big(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ako u poslednjem integralu sa desne strane uvedemo smenu $x-\alpha = t$ i iskoristimo parnost funkcije $t \mapsto \cos t$, dobijamo:

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f\big(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\sqrt{a^2+b^2}\cos t\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{\pi} f\big(\sqrt{a^2+b^2}\cos t\big)\,\mathrm{d}t\,,$$

što je i trebalo dokazati.

790. Dokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} g(\sin 2x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} g(\cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x\,,$$

gde je g neprekidna funkcija na $[0,1]$.

791. Izračunati integral

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešenje. Uvođenjem nove promenljive t pomoću smene $x = \operatorname{tg} t$, $t = \operatorname{arctg} x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/(1+x^2)$, imamo da je

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\operatorname{tg} t)\,\mathrm{d}t.$$

Primenom formule (1) iz zadatka 781, dobijamo

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\operatorname{tg}(\pi/4-t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\frac{2}{1+\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\log 2 - \int_0^{\pi/4}\log(1+\operatorname{tg} t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\log 2 - I,$$

odakle je $I = \dfrac{\pi}{8}\log 2$.

792. Dokazati da važi jednakost

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Uputstvo. Uvesti smenu $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

793. Ako je $x \mapsto f(\sin x)$ neprekidna funkcija na $[0,\pi]$, dokazati da je

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

i na osnovu toga izračunati

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešenje. Smenom $x = \pi - t$ dobijamo:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t - I\,, \end{aligned}$$

odakle sledi jednakost (1). Za funkciju

$$f(\sin x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}\,,$$

koja je neprekidna na $[0,\pi]$, imamo da je

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

794. Dokazati da važi jednakost

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \arcsin(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Rešenje. Uvođenjem smene $t = \sin x, x = \arcsin t$, odnosno $t = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} t$ u prvi i drugi integral respektivno, dobija se

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \arcsin(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \operatorname{arctg} t\cdot \mathrm{d}(\arcsin t) + \int_0^1 \arcsin t\cdot \mathrm{d}(\operatorname{arctg} t) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}(\operatorname{arctg} t\cdot \arcsin t) = \operatorname{arctg} t\cdot \arcsin t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \end{aligned}$$

795. Ako je $x > 1$ i $n \in \mathbf{N}$, dokazati da važi

$$\int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos t\right)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\cos t\right)^{n+1}}.$$

796. Izračunati integral $\int_{1/2}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+1/x}\,\mathrm{d}x$.

[$\frac{3}{2}e^{5/2}$, smena $t = x + 1/x$]

797. Izračunati $\int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left|\left(\cos\left(\log\frac{1}{x}\right)\right)'\right| \mathrm{d}x$.

[$4n$, smena $t = \log(1/x)$]

798. Izračunati integrale:

a) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,\mathrm{d}x$ [$\frac{8191}{26}$]

b) $\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ [$\frac{1}{2}\log 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$]

c) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$ [$-\frac{468}{7}$]

d) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ [$2\pi\sqrt{2}$, videti i zadatak 747.]

e) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ [$2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$]

f) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x$ [$\frac{1}{6}$]

g) $\int_0^{\log 2} \mathrm{sh}^4 x\,\mathrm{d}x$ [$\frac{3}{8}\log 2 - \frac{225}{1024}$]

4.3.4 Parcijalna integracija

✓ *Ako su funkcije u, v i njihovi izvodi u', v' neprekidne na $[a, b]$, tada je*

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$
$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)\,.$$

799. Izračunati integrale

$$A = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,\mathrm{d}x\,, \quad B = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešenje. Primenom dve parcijalne integracije nalazimo:

$$A = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} e^x\,\mathrm{d}(\sin x) = e^x \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x)e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= e^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x\,\mathrm{d}(\cos x) = e^{\pi/2} + e^x \cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos x)e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= e^{\pi/2} - 1 - A\,,$$

odakle je $A = (e^{\pi/2} - 1)/2$.
Na sličan način dobijamo

$$B = -\int_0^{\pi/2} e^x\,\mathrm{d}(\cos x) = -e^x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= 1 + \int_0^{\pi/2} e^x\,\mathrm{d}(\sin x) = 1 + e^x \sin x\Big|_0^{\pi/2} - B$$
$$= 1 + e^{\pi/2} - B\,,$$

tj. $B = (1 + e^{\pi/2})/2$.

800. Izračunati

$$I = \int_0^{\pi/2} xe^x \sin x\;\mathrm{d}x\,.$$

Rešenje. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$I = \int_0^{\pi/2} xe^x \sin x\;\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/2} xe^x\;\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -xe^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (1+x)e^x \cos x \ \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1+x)e^x \ \mathrm{d}(\sin x) = (1+x)e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (2+x)e^x \sin x \ \mathrm{d}x$$

$$= (1+\frac{\pi}{2})e^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \ \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} xe^x \sin x \ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2+\pi}{2}e^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \ \mathrm{d}x - I \ ,$$

odakle je

$$I = \frac{2+\pi}{4}e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x = \frac{2+\pi}{4}e^{\pi/2} + \frac{1}{2}(1+e^{\pi/2})$$

$$= \frac{\pi}{4}e^{\pi/2} - \frac{1}{2}.$$

(Videti zadatak 799 za izračunavanje poslednjeg integrala).

801. Izračunati integral

$$\int_0^1 2x\operatorname{arctg}\sqrt{x} \ \mathrm{d}x \ .$$

Rešenje. Parcijalnom integracijom sa

$$u = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, \ dv = 2x \ \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2(1+x)\sqrt{x}}, \ v = x^2,$$

dobijamo:

$$\int_0^1 2x\operatorname{arctg}\sqrt{x} \ \mathrm{d}x = x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{t^4 \ \mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad (t=\sqrt{x})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{t^2(1+t^2)-(1+t^2)+1}{1+t^2} \ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 t^2 \ \mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

802. Izračunati integral

$$J = \int_0^{\pi/2} 2x\cos^2 x \, dx \, .$$

Rešenje.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} 2x\frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int_0^{\pi/2} x \, dx + \int_0^{\pi/2} x\cos 2x \, dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} x \, d\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

803. Izračunati integrale:

a) $\int_1^e (x\log x)^2 \, dx$ $\left[\frac{5e^3-2}{27}\right]$

b) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2 \, dx$ $\left[\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}\right]$

c) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} \, dx$ $\left[\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right]$

d) $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x\cos(n+1)x \, dx$ [0]

e) $\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x\sin(n+1)x \, dx$ [0]

f) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} \, dx$ $\left[\frac{4}{3}\left(\log(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}(\pi-1)\right)\right]$

4.3.5 Diferenciranje integrala po granici integracije

√ *Ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, tada je funkcija F, definisana sa $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, neprekidna i diferencijabilna po $x \in (a,b)$ i važi $F'(x) = f(x)$.*

Ovo tvrđenje je neposredna posledica formule (2) u 4.3.2.

804. Naći $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$, gde je f neprekidna, a u i v su diferencijabilne funkcije.

Rešenje. Kako je f neprekidna funkcija, važi NEWTON-LEIBNIZova formula

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(v(x)) - F(u(x))\,,$$

gde je F primitivna funkcija za f, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = f(z)\,.$$

Po pravilu o diferenciranju složenih funkcija, imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(v(x)) - F(u(x))\right) = F'(v(x))v'(x) - F'(u(x))u'(x)\\ &= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)\,.\end{aligned}$$

805. Naći izvode:

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{100}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ $\qquad [\,-2x\sqrt{1+x^4}\,]$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ $\qquad [\,\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}\,]$

c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\cos t^2\,\mathrm{d}t$ $\qquad [\,-\sin x\cdot\cos(\cos^2 x) - \cos x\cdot\cos(\sin^2 x)\,]$

806. Izračunati

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}}\,.$$

Rešenje. Granične vrednosti ovog tipa mogu se jednostavno rešavati bez stvarne integracije, što je u ovom slučaju i nemoguće uraditi.[1]

Neka je

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{A(x)}{B(x)}\,,$$

pri čemu $B(x)\to+\infty$. Ako $A(x)$ ima konačnu graničnu vrednost, tada je $L=0$, a ako A nije ograničeno, tada možemo da primenimo L'HOSPITALovo pravilo . U našem slučaju je

$$A(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t > \int_0^x 1\cdot\mathrm{d}t \to +\infty \quad (\text{kad } x\to+\infty)\,.$$

[1] Videti odeljak 4.3.9 na strani 379.

Dakle, možemo primeniti L'HOSPITALovo pravilo. Kako je izvod integrala po gornjoj granici jednak podintegralnoj funkciji izračunatoj u gornjoj granici, imaćemo:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0\,.$$

807. Dokazati da je $\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{2x}e^{x^2} \quad (x\to+\infty)$.

808. Naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$ [1]

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$ [$\frac{\pi^2}{4}$]

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$ [0]

d) $\lim\limits_{x\to0_+} \dfrac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}$ [1]

4.3.6 Nesvojstveni integral

Definicija određenog integrala odnosi se na slučaj ograničene funkcije i konačnog intervala. Ako je interval integracije beskonačan, ili ako je podintegralna funkcija neograničena, tada govorimo o nesvojstvenom integralu. Uvodimo sledeće definicije:

- $$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
- $$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(Videti 6.2.1 za definiciju dvostrukih graničnih vrednosti.)

Ako je podintegralna funkcija neograničena (samo) u okolini tačaka a ili b, tada definišemo, redom,

- $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0_+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Ako je podintegralna funkcija neograničena u okolini tačke $c \in (a,b)$, *definišemo*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0_+ \\ \eta \to 0_+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) .$$

Ukoliko navedene granične vrednosti postoje i konačne su, kažemo da je odgovarajući nesvojstveni integral **konvergentan**, *u suprotnom slučaju je* **divergentan**.

U zadacima koristimo oznake uobičajene za izračunavanje integrala; na primer,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^{+\infty} ,$$

gde je F *primitivna funkcija i gde se podrazumeva da je*

$$F(+\infty) = \lim_{b \to +\infty} F(b) .$$

Ako dvostruke granične vrednosti ne postoje, može (ali ne mora) postojati **glavna vrednost nesvojstvenog integrala** *koja se definiše na sledeći način:*

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x ,$$

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) .$$

Skraćenica v.p. *potiče od* valeur principale, *što na francuskom jeziku znači glavna vrednost.*

809. Ispitati konvergenciju integrala

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \cos x\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. a) Imamo da je

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1 ,$$

pa je integral konvergentan i ima vrednost 1.

b) Kako je

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b \to +\infty} \log b = +\infty ,$$

zaključujemo da je integral divergentan.

c) Granična vrednost

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}(\sin 1 - \sin a)$$

ne postoji; integral je divergentan.

810. Ispitati konvergenciju integrala

a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, b) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\log x}$, c) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, d) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. a) Podintegralna funkcija je neograničena u okolini tačke $x = 0$. Po definiciji je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2.$$

b) Kako je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x} = \log|\log x|,$$

imamo da je

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\log x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\log|\log x|\Big|_{1+\varepsilon}^2 = +\infty,$$

pa je integral divergentan.

c) Uvođenjem smene $1/x = t$ nalazimo da je

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \sin t\,\mathrm{d}t = \cos t = \cos\frac{1}{x},$$

odakle je

$$\int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\cos\frac{1}{x}\Big|_{-\pi/2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\cos\frac{1}{\varepsilon} - \cos\frac{2}{\pi}.$$

Kako poslednja granična vrednost ne postoji, integral je divergentan.

d) Podintegralna funkcija je ograničena na $(0, \pi/2)$, tako da ovaj integral nije nesvojstven. Ako definišemo neprekidnu funkciju f^* sa

$$f^*(x) = \frac{\sin x}{x} \quad x \neq 0, \qquad f(0) = 1,$$

tada je

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f^*(x)\,\mathrm{d}x,$$

čime se dati integral svodi na RIEMANNov integral.

811. Naći v.p. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$. Da li ovaj integral postoji kao nesvojstven?

Rešenje. Po definiciji je

$$\begin{aligned}\text{v.p.} \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \left(\log|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \log|x| \Big|_{\varepsilon}^{2} \right) \\ &= \log 2 .\end{aligned}$$

Dati integral ne postoji kao nesvojstven, jer ne postoji dvostruka granična vrednost

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0_+ \\ \eta \to 0_+}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^{2} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0_+ \\ \eta \to 0_+}} (\log \varepsilon - \log \eta) .$$

Naime, ova granična vrednost treba da bude nezavisna od odnosa ε i η. Međutim, ako se stavi da je $\varepsilon = \eta \to 0_+$, dobija se granična vrednost 0, dok je za, na primer, $\varepsilon = 2\eta$ odgovarajuća granična vrednost jednaka $\log 2$.

812. Ispitati da li je konvergentan integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Rešenje. Kako je, za $a, b > 0$,

$$\int_{-a}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-a}^{b} = \operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} a ,$$

imamo da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \to +\infty \\ b \to +\infty}} (\operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} a) = \pi .$$

Prema tome, integral je konvergentan kao nesvojstveni integral i njegova vrednost je π.

813. Da li integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, dx$ postoji a) kao nesvojstven, b) u smislu glavne vrednosti?

Rešenje. Imamo da je (videti zadatak 700)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b} \operatorname{arctg} x \, dx &= \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right) \Big|_{-a}^{b} \\ &= b \operatorname{arctg} b - a \operatorname{arctg} a - \frac{1}{2} \log \frac{1+a^2}{1+b^2} . \qquad (1)\end{aligned}$$

Ako ovde stavimo $b = a > 0$, vrednost integrala je jednaka nuli, pa je

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{arctg} x \, dx = 0 .$$

Ako stavimo da je, na primer, $b = 2a$, tada

$$b \operatorname{arctg} b - a \operatorname{arctg} a = 2a \operatorname{arctg} 2a - a \operatorname{arctg} a > 2a \operatorname{arctg} 2a \to +\infty ,$$

$$\log \frac{1+a^2}{1+b^2} = \log \frac{1+a^2}{1+4a^2} \to 0 ,$$

odakle zaključujemo da je granična vrednost integrala u (1) beskonačna i dati integral ne postoji kao nesvojstven, već samo u smislu glavne vrednosti.

814. Naći sledeće integrale:

a) $\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$ [0]

b) $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$ [0]

c) $\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ [log(1/2)]

d) $\text{v.p.} \int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x \log x}$ [0]

815. Izračunati integral $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Rešenje. Kako je

$$\int_2^b \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_2^b \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \log \frac{x-1}{x+2} \Big|_2^b = \frac{1}{3} \log \frac{4(b-1)}{b+2} ,$$

imamo da je

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{3} \log \frac{4(b-1)}{b+2} = \frac{1}{3} \log 4 .$$

816. Izračunati integral

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2} \, dx .$$

Rešenje. Parcijalnom integracijom sa

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \quad v = -\frac{1}{1+x},$$

nalazimo da je

$$\begin{aligned} J &= -\operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

817. Izračunati integral

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Rezultat. $-\pi/4$.

818. Izračunati integral

$$I = \int_0^1 x^a \sin(\log x)\,\mathrm{d}x \qquad (a > 0).$$

Rešenje. Uzimajući, pri parcijalnoj integraciji, da je

$$u = \sin(\log x), \quad \mathrm{d}v = x^a\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}u = \cos(\log x)\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad v = \frac{x^{a+1}}{a+1},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a+1}x^{a+1}\sin(\log x)\Big|_0^1 - \frac{1}{a+1}\int_0^1 x^a \cos(\log x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{a+1}\int_0^1 x^a \cos(\log x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Uradimo još jednu parcijalnu integraciju, da bismo i na desnoj strani dobili I. Sa

$$u = \cos(\log x), \quad \mathrm{d}v = x^a\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}u = -\sin(\log x)\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad v = \frac{1}{a+1}x^{a+1}.$$

imamo da je

$$I = -\frac{1}{a+1}\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\cos(\log x)\Big|_0^1 + \frac{1}{a+1}\int_0^1 x^a \sin(\log x)\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{a+1}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1}I\right).$$

Odavde je $I = -1/(a^2+2a+2)$.

819. Dokazati da su integrali

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx \quad \text{i} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

jednaki, i koristeći se tom činjenicom, izračunati ih.

Rešenje. Očigledna ideja koju treba iskoristiti za dokazivanje jednakosti I_1 i I_2 je da je $\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$. Kako je i izraz pod korenom simetričan u odnosu na smenu $x \to 1-t$, uvedimo tu smenu u integral I_1:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = -\int_1^0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{1-t-(1-t)^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{\cos^2\frac{\pi t}{2}}{\sqrt{t-t^2}}\,dt = I_2.$$

Ovim je dokazana jednakost ovih integrala. Neka je I njihova zajednička brojna vrednost. Tada je

$$2I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}, \tag{1}$$

pa se problem svodi na izračunavanje integrala sa desne strane u (1). Uvodjenjem nove promenljive t pomoću EULEROve smene

$$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)} = (1-x)t\ ;\ x = \frac{t^2}{1+t^2}\ ;\ dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

dobijamo:

$$2I = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \pi,$$

odakle je $I = \pi/2$.

820. Izračunati integral

$$J = \int_0^1 \frac{x\exp(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Rešenje. Ako uvedemo smenu $x = \sin t$, $t \in [0,\pi/2]$, tada je $\arcsin x = t$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t\ dt$, tako da je

$$J = \int_0^{\pi/2} e^t \sin t\ dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2}+1),$$

gde se poslednji integral izračunava parcijalnom integracijom (videti zadatak 799).

4.3.7 Teoreme o srednjoj vrednosti

- *Neka je funkcija f integrabilna na $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.* **Srednja vrednost funkcije** *f na intervalu $[a,b]$ definiše se sa*

(1) $$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

- *Na beskonačnom intervalu, na primer na $[a,+\infty)$ srednja vrednost se definiše sa*

$$\bar{f} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Za srednju vrednost funkcije na konačnom intervalu važe sledeće teoreme:

√ *Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$, tada je*

$$m = \inf_{a<x<b} f(x) \le \bar{f} \le \sup_{a<x<b} f(x) = M\ ,$$

√ *Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, tada postoji tačka $c \in (a,b)$ tako da je $\bar{f} = f(c)$, tj. postoji $\theta \in (0,1)$ tako da je $\bar{f} = f(a+\theta(b-a))$.*

√ *Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, pri čemu funkcija g ne menja znak na $[a,b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

za neko μ, $\inf\limits_{a<x<b} f(x) \le \mu \le \sup\limits_{a<x<b} f(x)$. Ako je funkcija f još i neprekidna, tada je $\mu = f(c)$, za neko $c \in (a,b)$.

821. Neka je f integrabilna funkcija na $[a,b], a < b$ i neka je, za svako dato $n \in \mathbf{N}$, segment $[a,b]$ podeljen ekvidistantnom podelom na n jednakih intervala, pri čemu je u i-tom intervalu izabrana tačka $\xi_{i,n}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Dokazati da je

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,n})\ .$$

Rešenje. Neka je

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b\ .$$

U svakom od intervala $[x_{i-1}, x_i]$ izaberimo tačku $\xi_{i,n}$. Tada je

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,n})\cdot(x_{i-1}-x_i)$$
$$= \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,n})\cdot\frac{b-a}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,n})\,.$$

Primedba. Ovaj rezultat pokazuje da je srednja vrednost funkcije na $[a,b]$ u stvari generalizacija aritmetičke sredine.

822. Odrediti srednju vrednost funkcija:

a) $f(x) = x^2$ na $[0,1]$ [1/3]

b) $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0,100]$ [20/3]

c) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ na $[0,2\pi]$ [0]

d) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ na $[0,\pi]$ [$4/\pi$]

823. Dokazati: Ako je funkcija f definisana i neprekidna na $\mathbf{R}$ i ako je srednja vrednost te funkcije ista na svakom intervalu dužine $T > 0$, tada je f periodična sa periodom T. Da li važi i obrnuto?

Rešenje. Neka je f data neprekidna funkcija. Po pretpostavci je

$$F(x) = \frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)\,dt = C\,, \quad \text{za svako } x \in \mathbf{R}\,.$$

Diferenciranjem ovog izraza po x, dobijamo

$$F'(x) = 0 \iff \frac{1}{T}\left(f(x+T) - f(x)\right) = 0\,,$$

odakle sledi da je f periodična sa periodom T.

Obrnuto tvrđenje takođe važi, jer su integrali periodične funkcije jednaki po svakom intervalu dužine T (zadatak 783).

824. Odrediti srednju vrednost funkcije $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na $[0,+\infty)$.

Rešenje. Po definiciji srednje vrednosti, imamo da je

$$\bar{f} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t\;dt}{x}\,. \tag{1}$$

Kako je $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$, integral u brojiocu izraza sa desne strane u (1) teži ka $+\infty$, pa se na određivanje granične vrednosti u (1) može primeniti L'HOSPITALovo pravilo:

$$\bar{f} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Naravno, zadatak se može rešiti i direktnim izračunavanjem integrala.

825. Neka je funkcija f definisana i neprekidna na $\mathbf{R}$ i neka je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Odrediti srednju vrednost funkcije f na $[0,+\infty)$.

Rešenje. Potrebno je da odredimo

$$\bar{f} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Polazeći od analogije sa aritmetičkom sredinom, možemo naslutiti da je $\bar{f} = A$. Dokazaćemo da to zaista važi.

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema pretpostavci o graničnoj vrednosti funkcije, postoji $K > 0$ tako da za svako $t > K$ važi da je

$$A - \varepsilon \le f(t) \le A + \varepsilon\,. \tag{1}$$

Neka je $J_K = \int_0^K f(t)\,\mathrm{d}t$ i neka je $x > K$. Tada je

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(J_K + \int_K^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\,. \tag{2}$$

Kako je f neprekidna, po teoremi o srednjoj vrednosti imamo da je

$$\int_K^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)(x-K)\,, \quad c \in (K,x)\,. \tag{3}$$

Na osnovu (1), iz (3) sleduje da je

$$(A-\varepsilon)(x-K) \le \int_K^x f(t)\,\mathrm{d}t \le (A+\varepsilon)(x-K)\,.$$

Konačno, iz (2) dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{J_K}{x} + (A-\varepsilon)\left(1-\frac{K}{x}\right) &\le \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{J_K}{x} + (A+\varepsilon)\left(1-\frac{K}{x}\right)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Ako u (4) pustimo da $x \to +\infty$, dobijamo da za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$A - \varepsilon \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq A + \varepsilon,$$

tj. srednja vrednost funkcije f na $(0, +\infty)$ jednaka je A.

Primedba. . Ako je $A \neq 0$, zadatak se može rešiti primenom L'HOSPITALovog pravila, kao u zadatku 824. Uočite kakvi problemi mogu da se pojave u slučaju kada je $A = 0$.

826. Odrediti znak integrala $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Imamo da je

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ako u drugom integralu uvedemo smenu $x - \pi = t$, dobijamo

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi + t}\,\mathrm{d}t,$$

pa je

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\pi + x}\right) \sin x\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(\pi + x)}\,\mathrm{d}x.$$

Kako je podintegralna funkcija u poslednjem integralu oblika $f(x)g(x)$, sa $f(x) = \sin x/x$, $g(x) = 1/(\pi + x)$, pri čemu je f neprekidna, a g ne menja znak na $[0, \pi]$, primenom teoreme o srednjoj vrednosti nalazimo da je

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi \frac{\sin c}{c} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\pi + x} = \pi \frac{\sin c}{c} \log 2,$$

za neko c, $0 < c < \pi$. Prema tome, integral ima pozitivnu vrednost.

827. Odrediti znak integrala (bez izračunavanja):

a) $\int_{-2}^{2} x^3 \cdot 2^x\,\mathrm{d}x$, b) $\int_{1/2}^{1} x^2 \log x\,\mathrm{d}x$

Rezultat. Integral pod a) je pozitivan, a pod b) negativan.

828. Dokazati da je

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1 + x} = 0.$$

Primedba. Nije uvek tačno da je $\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim f_n(x)\,dx$. Videti primere u zadacima 1356 i 1357.

Rešenje. Primenom teoreme o srednjoj vrednosti imamo da je

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{1+x} = \frac{1}{1+c_n}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{(n+1)(1+c_n)},$$

gde je $0 < c_n < 1$. Odavde sleduje da je granična vrednost datog niza integrala jednaka nuli.

829. Bez izračunavanja integrala, dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = 0.$$

Rešenje. Primenom teoreme o srednjoj vrednosti nalazimo da je

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin^n \xi_n, \quad 0 < \xi_n < \frac{\pi}{2}.$$

Ovde se, međutim, pojavljuje sledeći problem: tačke ξ_n mogu da budu proizvoljno blizu $\pi/2$, tj. $\sin^n \xi_n$ ne mora da teži ka nuli. Podelimo zato oblast integracije na dva dela: od 0 do $\pi/2-\varepsilon$ i od $\pi/2-\varepsilon$ do $\pi/2$, gde je ε proizvoljno mali broj. Tada je

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx &= \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n x\,dx + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^n x\,dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n \xi_n + \varepsilon \sin^n \eta_n,\end{aligned}$$

gde je $\xi_n \in (0, \pi/2-\varepsilon)$, $\eta_n \in (\pi/2-\varepsilon, \pi/2)$. Prema tome,

$$0 < \sin\xi_n \le \sin(\pi/2-\varepsilon) = q < 1, \quad 0 < \sin\eta_n < 1$$

i imamo da je

$$0 < \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx < \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)q^n + \varepsilon,$$

odakle se dobija, kad $n \to +\infty$,

$$0 \le \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \le \varepsilon.$$

Kako je ε proizvoljno malo, zaključujemo da je tražena granična vrednost jednaka nuli.

830. Dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x = 0.$$

831. Naći granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{tx^3+1}$ [1]

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+a}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad (a>0)$ [0]

832. Neka je

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(\theta x).$$

Naći θ ako je

a) $f(t)=t^n, \quad (n>-1)$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt[n]{1+n}}\right]$

b) $f(t)=\log t$ $[e^{-1}]$

833. Neka je $f:[0,1]\mapsto \mathbf{R}$ četiri puta diferencijabilna funkcija za koju važi $f(0)=-f(1)$ i $f'(0)=f'(1)$. Dokazati:

a) $I=\int_0^1 x^2(x-1)^2 f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x = 24\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$,

b) Ako je $|f^{(4)}(x)|\le M$ za svako $x\in[0,1]$, tada je $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \dfrac{M}{720}$.

Rešenje. a) Ako u integralu I primenimo parcijalnu integraciju četiri puta uzastopno, dobićemo:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^1 (4x^3-6x^2+2x)f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 (6x^2-6x+1)f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f'(1)-f'(0)-12\int_0^1 (2x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2(f'(1)-f'(0))-12(f(1)+f(0))+24\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

odakle, s obzirom na date uslove, sleduje jednakost koju je trebalo dokazati.

b) Polazeći od jednakosti koju smo dokazali pod a) i primenom teoreme o srednjoj vrednosti, imamo

$$\left|\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\right| = \frac{1}{24}\left|\int_0^1 x^2(x-1)^2 f^{(4)}(x)\ \mathrm{d}x\right|$$
$$\leq \frac{1}{24}\int x^2(x-1)^2|f^{(4)}|\ \mathrm{d}x \leq \frac{M}{24}\int x^2(x-1)^2\ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{M}{24}\cdot\frac{1}{30} = \frac{M}{720}\,.$$

4.3.8 Rekurentne formule za izračunavanje određenih integrala

Za izračunavanje određenih integrala često se koriste rekurentne formule, koje se uglavnom dobijaju primenom parcijalne integracije.

834. Izvesti rekurentnu formulu za integral

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a zatim izračunati ovaj integral.

Rešenje. Parcijalnom integracijom, sa $u = \sin^{n-1} x$, $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$, dobijamo

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$
$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)\,.$$

Odavde se dobija rekurentna formula

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Sukcesivnom primenom formule (1), svaki integral I_{2k} može se izraziti pomoću I_0:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2} I_0\,.$$

Na sličan način, svaki integral I_{2k+1} može se izraziti pomoću I_1:

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1} I_1\,.$$

Kako je

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1,$$

konačno dobijamo da je

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Primedba. Uporediti sa zadatkom 752, gde je izvedena rekurentna formula za odgovarajući neodređeni integral. Ovde se efektivno izračunavanje integrala primenom rekurentne relacije uprošćava, jer se prvi deo (uv) kod parcijalne integracije anulira u datim granicama. Ovo je tipična situacija kod izračunavanja određenih integrala primenom rekurentnih relacija: postupak je obično jednostavniji nego kod neodređenih integrala.

835. Izračunati $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x$.

Uputstvo. Videti zadatak 782.

836. Izračunati $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^{2n} x \, \mathrm{d}x$. $\left[(-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right) \right]$

837. Ako je

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x,$$

dokazati da je

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

i na osnovu toga izračunati I_n.

Rešenje. Ako u integralu I_n izvršimo parcijalnu integraciju sa $u = (1-x^2)^n$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, dobijamo

$$\begin{aligned} I_n &= (1-x^2)^n \cdot x \Big|_{-1}^{1} + 2n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1} x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= 2n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1} (x^2 - 1 + 1) \, \mathrm{d}x \\ &= -2n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n + 2n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1} \, \mathrm{d}x \\ &= -2nI_n + 2nI_{n-1}, \end{aligned}$$

odakle sledi (1).

Na osnovu (1) imamo da je

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} I_{n-2} = \ldots = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} I_0$$
$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_0 .$$

Kako je

$$I_0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2 ,$$

traženi integral je

$$I_n = \frac{2 \cdot (2n)!!}{(2n+1)!!} .$$

Primedba. Ovaj integral može se izračunati pomoću integrala iz zadatka 834 ako se uvede smena $x = \cos t$.

838. Ako je

$$A_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \ \mathrm{d}x , \qquad B_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \ \mathrm{d}x ,$$

odrediti a, b, c, d tako da važi

$$A_n = aB_{n-1} + b, \quad B_n = cA_{n-1} + d ,$$

i na osnovu toga naći A_n i B_n.

Rešenje. Neka je

$$U_n = \int_0^{\pi/2} x^n e^{ix} \ \mathrm{d}x = A_n + iB_n .$$

Parcijalnom integracijom ($u = x^n$, $\mathrm{d}v = e^{ix} \ \mathrm{d}x$) dobijamo:

$$U_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n + inU_{n-1} . \tag{1}$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela u (1) nalazimo

$$A_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nB_{n-1} , \tag{2}$$

$$B_n = nA_{n-1} . \tag{3}$$

Iz (3) imamo da je $B_{n-1} = (n-1)A_{n-2}$, pa se smenom u (2) dobija

$$A_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)A_{n-2} . \tag{4}$$

Vraćanjem unazad po formuli (4) dolazimo do A_0 ako je n paran broj, odnosno do A_1 ako je n neparan. Kako je

$$A_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1, \quad A_1 = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 ,$$

iz (4) nalazimo da integral A_n ima vrednost

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j n(n-1)\cdots(n-2j+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2j} + (-1)^k n! C_n ,$$

gde je $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ i

$$C_n = \begin{cases} 1 & n = 2k, \\ \frac{\pi}{2} - 1 & n = 2k+1. \end{cases}$$

Integral B_n dobijamo iz jednakosti (3), znajući A_{n-1}.

839. Dat je integral

$$I(p,q,r) = \int_0^1 x^p (1-x)^q (1+x)^r \, dx \quad (p, q \geq 0) .$$

Uvođenjem smene $x = (1-t)/(1+t)$, dokazati da važi

(1) $$I(p,q,r) = 2^{q+r+1} I(q,p,-p-q-r-2) .$$

Koristeći se formulom (1), ili na drugi način, dokazati da je

$$J = \int_0^1 (x - x^2)^{1/2} (1+x)^{-3} \, dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{32} .$$

Rešenje. Uvođenjem naznačene smene dobijamo

$$\begin{aligned} I(p,q,r) &= -\int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^p \left(1 - \frac{1-t}{1+t}\right)^q \left(1 + \frac{1-t}{1+t}\right)^r \frac{2\,dt}{(1+t)^2} \\ &= 2\int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^p \frac{2^q t^q}{(1+t)^q} \frac{2^r}{(1+t)^r} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= 2^{q+r+1} \int_0^1 t^q (1-t)^p (1+t)^{-p-q-r-2} \, dt = 2^{q+r+1} I(q,p,-p-q-r-2) , \end{aligned}$$

čime je dokazana jednakost (1). Za $p = 1/2$, $q = 1/2$, $r = -3$, ova jednakost postaje

(2) $$J = \int_0^1 x^{1/2} (1-x)^{1/2} (1+x)^{-3} \, dx = 2^{-3/2} \int_0^1 x^{1/2} (1-x)^{1/2} \, dx .$$

Ako u drugom integralu u (2) uvedemo smenu $x = \sin^2 t$, dobijamo

$$J = 2^{-1/2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = 2^{-1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t \, dt}{4}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} \, dt = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{32} .$$

840. Ako je n prirodan broj ili nula, dokazati da važi

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^{2n+2}} \, dx = \frac{(n!)^2}{2(2n+1)!} . \tag{1}$$

Rešenje. I način: Jednakost (1) važi za $n = 0$, jer je

$$J_0 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} .$$

Neka je $n \geq 1$. Ako u integralu J_n izvršimo parcijalnu integraciju sa

$$u = x^n , \quad dv = (x+1)^{-(2n+2)} , \quad du = nx^{n-1} \, dx , \quad v = -\frac{1}{2n+1}(x+1)^{-(2n+1)} ,$$

dobijamo

$$J_n = -\frac{x^n}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} \Big|_0^1 + \frac{n}{2n+1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(x+1)^{2n+1}} \, dx$$
$$= -\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \frac{n}{2n+1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1-x)}{(x+1)^{2n+1}} \, dx \tag{2}$$
$$= -\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \frac{n}{2n+1} \left(J_{n-1} - \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^{2n+1}} \, dx \right) .$$

Poslednji integral ćemo izračunati još jednom primenom parcijalne integracije:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^{2n+1}} \, dx = -\frac{x^n}{2n(x+1)^{2n}} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(x+1)^{2n}} \, dx \tag{3}$$
$$= -\frac{1}{2^{2n+1} n} + \frac{1}{2} J_{n-1} .$$

Smenom (3) u (2) dobija se rekurentna relacija

$$J_n = \frac{n}{2(2n+1)} J_{n-1} . \tag{4}$$

Pokazali smo da je (1) tačno za $n = 0$. Pretpostavimo da je (1) tačno za neko $n - 1 \geq 0$, tj, da je

$$J_{n-1} = \frac{((n-1)!)^2}{2(2n)!} .$$

Tada iz (4) sleduje

$$J_n = \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{2(2n)!} = \frac{(n!)^2}{2(2n+1)!} ,$$

čime je dokazano da (1) važi za svako $n = 0, 1, \ldots$

II način: Primenom rezultata zadatka 839 za $p = n$, $q = 0$, $r = -2n - 2$, imamo da je

$$J_n = I(n, 0, -2n-2) = \frac{1}{2^{2n+1}} I(0, n, n) = \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$$
$$= \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad \text{(na osnovu zadatka 837).}$$

Pokažite da je ovaj rezultat isti kao i dobijeni primenom I načina.

841. Dat je integral

$$I_n = \int_0^a \operatorname{tg}^n x \, dx \qquad (0 < a < \frac{\pi}{2}) .$$

Dokazati jednakost

(1) $$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = \operatorname{tg}^{n-1} a \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Izračunati I_3 i I_4 i odavde zaključiti da za $a \in (0, \frac{\pi}{4})$ važe nejednakosti

$$a + \log \sec a < \operatorname{tg} a + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 a - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 a .$$

Rešenje. Transformišimo I_n na sledeći način:

$$I_n = \int_0^a \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^a \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

(2) $$= \int_0^a \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \underbrace{\int_0^a \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx}_{I_{n-2}}$$

Iz (2) dobijamo

$$I_n + I_{n-2} = \int_0^a \operatorname{tg}^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$= \int_0^{\operatorname{tg} a} t^{n-2} \, dt \quad (\text{smena } t = \operatorname{tg} x)$$
$$= \frac{t^{n-1}}{n-1} \Big|_0^{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} a}{n-1} ,$$

čime je dokazana jednakost (1).

Iz rekurentne relacije (1) možemo da odredimo I_3 i I_4, ako izračunamo I_1 i I_0:

$$I_3 = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{2} - I_1 = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{2} - \int_0^a \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 a + \log|\cos a|,$$

$$I_4 = \frac{\operatorname{tg}^3 a}{3} - I_2 = \frac{\operatorname{tg}^3 a}{3} - (\operatorname{tg} a - I_0) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 a - \operatorname{tg} a + a.$$

Za $x \in [0, \pi/4]$ imamo da je $0 < \operatorname{tg} x < 1$, pa je

$$\operatorname{tg}^4 x < \operatorname{tg}^3 x .$$

Integracijom ove nejednakosti u granicama od 0 do a, za $a \in (0, \pi/4)$ dobijamo da je $I_4 < I_3$, tj,

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 a - \operatorname{tg} a + a < \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 a + \log\cos a ,$$

ili, posle sređivanja,

$$a - \log\cos a < \operatorname{tg} a + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 a - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 a ,$$

odakle se dobijaju tražene nejednakosti (uočiti da je $-\log\cos a = \log\sec a$).

842. Neka je

$$J_n = J_n(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \quad (a < t) .$$

Izvesti rekurentnu formulu kojom se J_n svodi na J_{n-1}, pa na osnovu toga izračunati J_n.

Rešenje. Polazeći od

$$J_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f^n(x)\,\mathrm{d}x ,$$

parcijalnom integracijom sa

$$u = f^{(n)}(x),\ \mathrm{d}v = (t-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}u = f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x,\ v = -\frac{1}{n}(t-x)^n ,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(t-x)^n \Big|_{x=a}^{t} + \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(t-a)^n + J_n . \end{aligned}$$

Odavde je

(1) $$J_n = J_{n-1} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(t-a)^n \, .$$

Kako je

$$J_0 = \int_a^t f'(x) \, \mathrm{d}x = f(t) - f(a) \, ,$$

iz rekurentne formule (1) se dobija

(2) $$J_n = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a) - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(t-a)^n \, .$$

Primedba. Iz (2) se vidi da je J_n ostatak u TAYLOROvoj formuli. Prema tome, ako su ispunjeni uslovi za primenu TAYLOROve formule, imamo

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n f^{(n+1)}(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Ovo je **TAYLOROva formula sa ostatkom u integralnom obliku.**

843. Izračunati integral $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \, \mathrm{d}x$, $m, n = 1, 2, \ldots$

$\left[\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \right]$

844. Izračunati integral

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m \log^n x \, \mathrm{d}x \qquad (m, n \in \mathbf{N}) \, .$$

Rešenje. Primenimo parcijalnu integraciju:

$$u = \log^n x \, , \quad \mathrm{d}v = x^m \, \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}u = n \log^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \, , \quad v = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \, .$$

(1) $$I_{m,n} = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \log^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} \log^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Prvi sabirak u (1) jednak je nuli za $x = 1$. Za $x = 0$ potrebno je odrediti graničnu vrednost:

$$\lim_{x \to 0} x^{m+1} \log^n x = \lim_{x \to 0} \frac{\log^n x}{x^{-(m+1)}} \, .$$

Višestrukom primenom L'HOSPITALovog pravila nalazimo da je ova granična vrednost jednaka nuli. Na taj način iz (1) dobijamo

(2) $$I_{m,n} = -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1} \, .$$

Uzastopnom primenom rekurentne formule (2), možemo da izrazimo $I_{m,n}$ pomoću $I_{m,0}$:

$$(3)\quad I_{m,n} = -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} I_{m,n-2} = \ldots = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_{m,0}\,.$$

Kako je

$$I_{m,0} = \int_0^1 x^m \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}\,,$$

iz (3) dobijamo konačan rezultat:

$$I_{m,n} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}\,.$$

845. Izračunati integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{1/2}} \qquad (n \in \mathbf{N})\,.$$

Uputstvo. **I način:** Smenom $x = \sin t$ dobija se

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t\,.$$

Videti zadatke 739 i 752.

II način: Smenom $t = \sqrt{1-x^2}$ dobija se

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \,\mathrm{d}t\,.$$

Parcijalnom integracijom sa $u = (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$, može se dobiti rekurentna formula

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geq 2)\,.$$

846. Dat je integral

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n \sqrt{x-a}} \qquad (n \in \mathbf{N}, a \in \mathbf{R})\,.$$

a) Izračunati $J_1(a)$.

b) Uvodeći smenu $x = at$, dokazati

$$(1)\qquad J_n(a) = a^{1/2-n} J_n(1)\,.$$

c) Izvesti rekurentnu formulu

$$2nJ_{n+1}(1) = (2n-1)J_n(1) \tag{2}$$

d) Na osnovu gornjih rezultata, izračunati $J_n(a)$.

Rešenje. a) Smenom $t = \sqrt{x-a}$, $x = t^2 + a$, $\mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$ u integralu $J_1(a)$ dobijamo

$$J_1(a) = \int_0^\infty \frac{2t\ \mathrm{d}t}{(t^2+a)t} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

b) Uvođenjem smene $x = at$ u integral $J_n(a)$ imamo

$$J_n(a) = \int_1^\infty \frac{a\ \mathrm{d}t}{t^n a^n \sqrt{at-a}} = a^{1/2-n} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^n \sqrt{t-1}} = a^{1/2-n} J_n(1).$$

c) Ako na integral $J_n(1)$ primenimo parcijalnu integraciju dobijamo

$$\begin{aligned} J_n(1) &= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{x-1}} = 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-1}}{x^n} = 2\frac{\sqrt{x-1}}{x^n}\Big|_1^\infty + 2n\int_1^\infty \frac{\sqrt{x-1}}{x^{n+1}}\ \mathrm{d}x \\ &= 2n\int_1^\infty \frac{x-1}{x^{n+1}\sqrt{x-1}}\ \mathrm{d}x = 2n\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{x-1}} - 2n\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}\sqrt{x-1}} \\ &= 2nJ_n(1) - 2nJ_{n+1}(1). \end{aligned}$$

Odavde se direktno dobija rekurentna formula (2), koju je trebalo dokazati.

d) Na osnovu rezultata pod c), imamo da je

$$J_n(1) = \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}(1) = \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}J_{n-2}(1) = \ldots = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}J_1(1). \tag{3}$$

Kako je, na osnovu a), $J_1(1) = \pi$, iz (3) dobijamo

$$J_n(1) = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi. \tag{4}$$

Konačno, iz (1) i (4) nalazimo da je

$$J_n(a) = a^{1/2-n}J_n(1) = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi a^{1/2-n}.$$

►► 8.3, ►► 8.7.3

4.3.9 Neelementarne funkcije

Ako je funkcija f neprekidna na nekom intervalu, ona na tom intervalu ima primitivnu funkciju F. Međutim, ako je f elementarna funkcija, funkcija F ne mora da bude elementarna[1]. *Za neke integrale je dokazano da se ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija*[2]. *Navodimo nekoliko primera takvih integrala:*

$$\int \frac{e^x}{x^n}\,\mathrm{d}x\,,\quad \int \frac{x^n}{\log x}\,\mathrm{d}x\,,\quad \int \frac{\sin x}{x^n}\,\mathrm{d}x\,,\quad \int \frac{\cos x}{x^n}\,\mathrm{d}x\,,\qquad (n=1,2,\ldots)$$

Ovi integrali mogu se svesti na sledeće osnovne tipove:

- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = \mathrm{li}\,x + C \quad \textit{(Integralni logaritam)},$$
- $$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{si}\,x + C \quad \textit{(Integralni sinus)},$$
- $$\int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{ci}\,x + C \quad \textit{(Integralni kosinus)}.$$

Funkcije $\mathrm{li}\,x, \mathrm{si}\,x$ *i* $\mathrm{ci}\,x$ *definišu se pomoću određenih integrala:*

- $$\mathrm{li}\,x = \mathrm{v.p.}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}\,,(x>0)\,,$$
- $$\mathrm{si}\,x = -\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\ (x\geq 0)\,,\quad \mathrm{ci}\,x = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\ (x>0)\,,$$

pri čemu se dokazuje konvergencija navedenih integrala.

Neelementarna funkcija je i integral binomnog diferencijala, sem u tri slučaja koji su navedeni na strani 318.

Navodimo još nekoliko određenih integrala koji se pojavljuju u primenama, a ne mogu se izraziti pomoću elementarnih funkcija:

- $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}x \quad \textit{(Gama funkcija)},$$
- $$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t \quad \textit{(Beta funkcija)},$$
- $$\mathrm{Erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \textit{(Erf funkcija, funkcija greške)},^3$$
- $$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}\,\mathrm{d}t\,, S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}\,\mathrm{d}t \quad \textit{(FRESNELovi integrali)},$$

[1] Videti definiciju elementarnih funkcija na strani 53.
[2] Kaže se i da su ovakvi integrali "nerešivi".
[3] Ovaj integral se u literaturi naziva i EULEROV, POISSONOV ili LAPLACEOV integral

- $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$. *(BESSELove funkcije).*

Podela na elementarne i neelementarne funkcije je prilično proizvoljna, naročito ako se govori o izračunavanju funkcija. Naime, odrediti vrednosti za, na primer, $\sin 11°$, $e^{\sqrt{2}}$ *ili* $\log \pi$ *je podjednako teško (ili lako) kao i odrediti vrednosti nekih tzv. neelementarnih funkcija. U oba slučaja za izračunavanje se primenjuju numeričke metode.*

847. Izraziti integral

$$I_n = \int \frac{e^x}{x^n}\,\mathrm{d}x\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

pomoću elementarnih funkcija i integralnog logaritma.

Rešenje. Parcijalnom integracijom sa

$$u = e^x\,,\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^n}\,, \quad \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x\,, v = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\,,$$

dobijamo:

$$I_n = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}I_{n-1}\,.$$

Uzastopnom primenom ove rekurentne formule, nalazimo da je

$$I_n = -e^x\left(\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!x}\right) + \frac{1}{(n-1)!}I_1\,.$$

Smenom $e^x = t$ u integralu I_1, dobijamo da je

$$I_1 = \int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \mathrm{li}\,(t) + C = \mathrm{li}\,(e^x) + C\,.$$

Prema tome, imamo da je

$$I_n = -e^x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-1)\cdots(n-k)x^{n-k}} + \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{li}\,(e^x) + C\,.$$

848. Neka je

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\,, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}\,.$$

Naći potreban i dovoljan uslov da integral

$$\int P(1/x)e^x\,\mathrm{d}x$$

bude elementarna funkcija.

Rešenje. Na osnovu zadatka 847, imamo da je

$$\int P(1/x)e^x\,\mathrm{d}x = G(x) + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\right)\cdot \mathrm{li}\,(e^x),$$

gde je G elementarna funkcija. Prema tome, potreban i dovoljan uslov da dati integral bude elementarna funkcija je da koeficijent uz $\mathrm{li}\,(e^x)$ bude jednak nuli, tj.

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0.$$

849. Naći integrale:

a) $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.

Rešenje. a) Kvadriranjem i primenom parcijalne integracije (videti i zadatak 847), nalazimo da je

$$\begin{aligned}\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,\mathrm{d}x &= \int \left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x = e^x - 4\mathrm{li}\,(e^x) - \frac{4}{x}e^x + 4\mathrm{li}\,(e^x) + C\\ &= e^x\left(1-\frac{4}{x}\right) + C.\end{aligned}$$

b) Razlaganjem racionalne funkcije pod integralom na parcijalne razlomke, a zatim parcijalnom integracijom, dobijamo

$$\int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = \int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{x-1} = e^4\mathrm{li}\,(e^{2(x-2)}) - e^2\mathrm{li}\,(e^{2(x-1)}) + C.$$

850. Naći $\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}$.

$$\left[\left(x^2+3x-\tfrac{32}{x-2}\right)\tfrac{e^{2x}}{2} + 64e^4\mathrm{li}\,(e^{2x-2}) + C\right]$$

851. Izraziti sledeće integrale pomoću elementarnih funkcija i funkcija si i ci:

a) $\int \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ $\quad\left[-\frac{\sin x}{x}+\operatorname{ci}(x)+C\right]$

b) $\int \frac{x^2\cos x}{x-2}\,dx$

$$\left[\cos x+(x+2)\sin x+4(\cos 2\cdot \operatorname{ci}(x-2)+\sin 2\cdot \operatorname{si}(x-2))+C\right]$$

c) $\int \frac{\cos^2 x}{x^2}\,dx$ $\quad\left[-\frac{\cos^2 x}{x}-\operatorname{si}(2x)+C\right]$

d) $\int\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\cos x\,dx$ $\quad\left[-\frac{3\cos x}{x}+\sin x+2\operatorname{ci}(x)-3\operatorname{si}(x)+C\right]$

852. Smatrajući poznatim da je

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{Erf}(x)=1, \tag{1}$$

gde je Erf funkcija greške, ispitati funkciju $x\mapsto \operatorname{Erf}(x)$ i nacrtati njen grafik.[1]

Rešenje. Data funkcija je definisana za svako $x\in\mathbf{R}$. Kako je

$$\operatorname{Erf}(-x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt,$$

smenom $t=-u$ nalazimo da je

$$\operatorname{Erf}(-x)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-u^2}\,du=-\operatorname{Erf}(x),$$

tj. data funkcija je neparna. Iz (1) zaključujemo da funkcija ima desnu horizontalnu asimptotu $y=1$, a iz neparnosti sleduje da ima i levu horizontalnu asimptotu $y=-1$. Vertikalnih ni kosih asimptota nema. Izvode je lako naći, diferencirajući integral po gornjoj granici:

$$y'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},\quad y''=-\frac{4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$

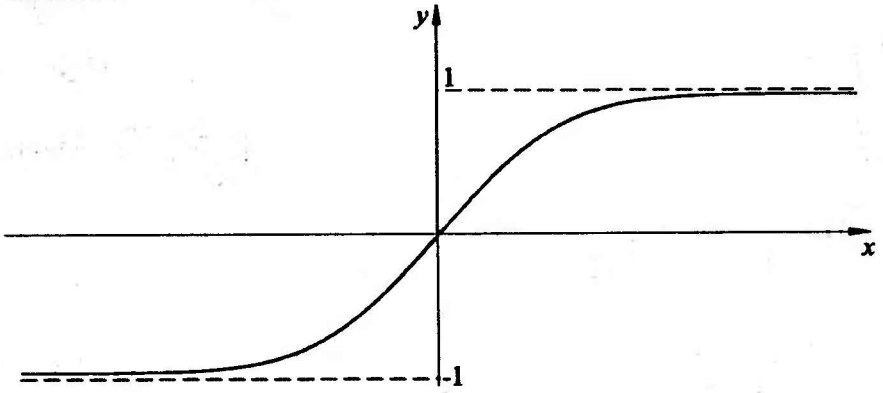
Prema tome, funkcija je rastuća za sve vrednosti argumenta, konveksna za $x<0$, konkavna za $x>0$ i ima prevojnu tačku u $x=0$.

Grafik Erf funkcije nacrtan je na slici 42.

853. Neka je funkcija Φ definisana pomoću

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

[1] Dokaz da $\operatorname{Erf}(x)\to 1$ kad $x\to+\infty$ sprovodi se, na primer, pomoću dvojnih integrala, i ne može se izložiti u okviru ove knjige.



Slika 42. *Grafik funkcije* $x \mapsto \mathrm{Erf}\,(x)$.

Izraziti funkciju Φ pomoću Erf funkcije, a zatim dokazati da je $\Phi(0) = 1/2$, $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$.

Rezultat. $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Erf}\,(x/\sqrt{2}) + 1\right)$.

Primedba. Funkcija Φ ima primene u teoriji verovatnoće. Na primer, raspodela veličina slučajnih grešaka merenja izražava se pomoću funkcije Φ. U stvari, i funkcija Erf dobila je naziv po ovoj primeni (*ERror Function*).

854. Dokazati da se integral

$$I_n = \int_0^x t^n e^{-t^2}\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

za neparno n može izraziti samo pomoću elementarnih funkcija. Zatim dokazati da za $k = 1, 2, \ldots$ važi jednakost:

$$I_{2k} = -\frac{e^{-x^2}}{2}\left(x^{2k-1} + \frac{2k-1}{2}x^{2k-3} + \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2}x^{2k-5} + \cdots + \frac{(2k-1)!!}{2^{k-1}}x\right) + \frac{\sqrt{\pi}\,(2k-1)!!}{2^{k+1}}\mathrm{Erf}\,(x).$$

855. Naći potreban i dovoljan uslov da funkcija

$$F(x) = \int_0^x P(t)e^{-t^2}\,dt,$$

gde je P polinom, bude elementarna funkcija.

856. Naći integrale:

a) $\int_0^x t^4 e^{-t^2}\,dt$ $\qquad \left[-\frac{xe^{-x^2}(2x^2+3)}{4} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\mathrm{Erf}\,(x)\right]$

b) $\int_0^x t^3 e^{-t^2}\,dt$ $\quad\left[\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}(x^2+1)\right)\right]$

c) $\int_0^x t^5 e^{-t^4}\,dt$ $\quad\left[-\frac{x^2e^{-x^4}}{4}+\frac{\sqrt{\pi}}{8}\mathrm{Erf}\,(x^2)\right]$

857. Dokazati da je

$$\Gamma(n)=(n-1)!\,,\qquad (n=1,2,\ldots)\,.$$

Primedba. Gama funkcija se, na osnovu ove osobine, može shvatiti kao generalizacija faktorijela na skupu realnih brojeva.

858. Izraziti integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$ pomoću beta funkcije.

Rešenje. Ako stavimo $x^4=t$, dobijamo da je

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{1/2}=\frac{1}{4}B(1/4,3/2)\,.$$

4.3.10 Primene određenih integrala

Izračunavanje površine.

√ *Veličina površine koja je ograničena neprekidnim krivama* $y=y_1(x)$ *i* $y=y_2(x)$ $(y_1(x)\le y_2(x))$ *i pravama* $x=a$ *i* $x=b$, $a<b$*:*

$$P=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx\,.$$

√ *Veličina površine koja je ograničena zatvorenom krivom zadatom parametarskim jednačinama*

$$x=x(t)\,,y=y(t)\,,\qquad (\alpha\le t\le\beta)\,,$$

pri čemu se kriva obilazi u pozitivnom smeru (suprotno od kretanja kazaljke na časovniku) kada se parametar menja od α *do* β*:*

$$P=\int_\alpha^\beta x(t)\dot{y}(t)\,dt=\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x(t)\dot{y}(t)-y(t)\dot{x}(t)\right)dt\,.$$

√ *Veličina površine ograničene neprekidnom krivom zadatom u polarnim koordinatama pomoću* $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ *i polupravama* $\varphi=\alpha$ *i* $\varphi=\beta$*:*

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Izračunavanje dužine luka krive.

√ *Dužina luka krive date jednačinom* $y = f(x)$, $a \le x \le b$, *gde je* f *funkcija sa neprekidnim izvodom:*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

√ *Dužina luka krive zadate parametarskim jednačinama* $x = x(t), y = y(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

√ *Dužina luka krive zadate u polarnim koordinatama sa* $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Izračunavanje zapremine.

√ *Ako je poznata veličina* $S(x)$ *površine preseka tela i ravni normalnom na* x*-osu u tački* x $(a \le x \le b)$, *tada je zapremina tela jednaka*

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Površina i zapremina rotacionog tela.

Ako površina čije tačke zadovoljavaju relacije

$$a \le x \le b\,, \quad 0 \le y \le f(x)$$

rotira oko x*-ose, obrazuje se jedno* **rotaciono telo.**

√ *Veličina površine omotača rotacionog tela je*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

√ *Zapremina rotacionog tela je*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

859. Naći površinu koju ograničavaju krive zadate jednačinama

$$ax = y^2, \quad ay = x^2, \qquad (a > 0).$$

Rešenje. Date krive seku se u tačkama $(0,0)$ i (a,a) i ograničavaju jednu površinu u I kvadrantu (nacrtati sliku!). Za $0 \le x \le a$, grafik prve krive u I kvadrantu je iznad grafika druge. Ako napišemo jednačine krivih u obliku

$$y = \sqrt{ax}, \quad y = \frac{1}{a}x^2,$$

imamo da je

$$P = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{a^2}{3}.$$

860. Naći površinu ograničenu krivom $y = \log x$ i pravama $x = 1/2$ i $x = 2$.

Rešenje. Funkcija $x \mapsto \log x$ je negativna u intervalu $(1/2, 1)$ i pozitivna u intervalu $(1, 1/2)$. Prema tome, veličina tražene površine se izračunava pomoću

$$P = -\int_{1/2}^1 \log x\, dx + \int_1^2 \log x\, dx = \frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}.$$

861. Naći površinu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rešenje. Zbog simetrije elipse, njena površina jednaka je četvorostrukoj površini koja se nalazi u I kvadrantu, tj.

$$P = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = ab\pi.$$

862. Odrediti veličinu površine koja je ograničena x-osom i krivom

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \qquad (0 \le t \le 2\pi, a > 0).$$

Rešenje. Kada se parametar t menja od 0 do 2π, tačka na krivoj opisuje luk od $(0,0)$ do $(2a\pi, 0)$, pri čemu je uvek $y \ge 0$. Veličina tražene površine jednaka je

$$P = \int_0^{2a\pi} y\, dx = \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)\, dt = a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = 3\pi a^2.$$

863. Izračunati površinu koju zatvara kriva zadata jednačinama

$$x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3, \qquad t \geq 0.$$

Rešenje. Za $t = 0$ i $t = 2$ dobija se $(x, y) = (0, 0)$. Prema tome, data kriva ima "petlju", koja se opisuje kada t uzima vrednosti od 0 do 2. Površinu te petlje nalazimo na sledeći način:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^2 (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{15}.$$

864. Naći veličinu površine koju zatvara lemniskata $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Rešenje. Data kriva ima dve simetrične petlje koje se dobijaju kada se ugao φ menja od $-\pi/4$ do $\pi/4$, odnosno od $3\pi/4$ do $5\pi/4$. Kako obe petlje imaju istu površinu, ukupna površina se dobija iz

$$P = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = a^2.$$

Naravno, mogli smo da uočimo i simetriju u odnosu na x-osu i da površinu računamo kao četvorostruku površinu u I kvadrantu (tj. za φ od 0 do $\pi/4$).

865. Naći dužinu luka krive $y = x^{2/3}$ za $0 \leq x \leq 4$.

Rešenje.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1).$$

866. Naći dužinu luka krive zadate pomoću $y^2 = 2px$, za $0 \leq x \leq a$, $p, a > 0$.

Rešenje. Data kriva je parabola simetrična u odnosu na x-osu; njene dve grane imaju istu dužinu za $0 \leq x \leq a$. Stoga je

$$\begin{aligned} l &= 2\int_0^a \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a \sqrt{(\sqrt{2x})^2 + p}\,\mathrm{d}(\sqrt{2x}) \\ &= 2\sqrt{a(a + p/2)} + p\log\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + p/2}}{\sqrt{p/2}}. \end{aligned}$$

867. Naći dužinu luka krive date jednačinama

$$x = (\mathrm{ch}\,t)^3, \quad y = (\mathrm{sh}\,t)^3, \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Rešenje. Kako je

$$\dot{x}(t) = 3(\operatorname{ch} t)^2 \operatorname{sh} t\,, \quad \dot{y}(t) = 3(\operatorname{sh} t)^2 \operatorname{ch} t\,,$$

imamo da je

$$l = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \operatorname{sh} 2t\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left((\operatorname{ch} 2T)^{3/2} - 1\right).$$

868. Izračunati dužinu luka krive date u polarnim koordinatama jednačinom

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi}\,, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,, \qquad (p > 0)\,.$$

Rešenje.

$$l = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{p}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3(\varphi/2)} = p(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))\,.$$

869. Naći dužinu zatvorene krive $r = a\sin^3(\varphi/3)$, $a > 0$.

Rešenje. Za φ od 0 do 3π kriva izlazi iz koordinatnog početka i ponovo se vraća u istu tačku. Imamo da je

$$l = a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3a\pi}{2}\,.$$

870. Dokazati da je obim elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ jednak dužini luka sinusoide $y = c\sin(x/b)$ na jednom periodu, gde je $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

871. Naći zapreminu tela koje je ograničeno površima

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,, \quad x^2 + y^2 = ax \qquad (a > 0).$$

Rešenje. Dato telo je ograničeno površinom cilindra $x^2 + y^2 = ax$ i gornjom i donjom površinom sfere. Zbog simetrije, dovoljno je izračunati samo zapreminu dela koji se nalazi iznad xOy ravni, tj. dela u kome je $z \ge 0$. Odredićemo površinu preseka tela sa ravni koja je normalna na x-osu. Nije teško videti da je, za fiksirano x, ta površina jednaka

$$S(x) = \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Smenom $y = \sqrt{a^2 - x^2}\,\sin t$ nalazimo da je

$$S(x) = (a^2 - x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right).$$

Prema tome, tražena zapremina je

$$V = 2\int_0^a (a^2 - x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right)\mathrm{d}x.$$

Smenom $x = a\mathrm{tg}^2\varphi$ u poslednjem integralu, dobijamo da je

$$V = 4a^3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}\right).$$

872. Date su funkcije

$$f(x) = e^{-x}(1-2x)\,,\quad g(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}\,.$$

Izračunati veličinu $P(\lambda)$ površine u oblasti $x \geq 0$, koju ograničavaju date krive i prava $x = \lambda > 0$. Da li postoji $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} P(\lambda)$?

Rešenje. Kako je $f(0) = g(0) = 1$ i

$$g(x) - f(x) = 2xe^{-x} + 3e^{-x}(1 - e^{-x}) > 0 \quad \text{za } x > 0\,,$$

zaključujemo da se krive seku za $x = 0$, i da je za $x > 0$, grafik funkcije g iznad grafika funkcije f. Stoga se veličina tražene površine nalazi iz

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \int_0^\lambda \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^\lambda (2xe^{-x} + 3e^{-x} - 3e^{-2x})\,\mathrm{d}x \\ &= -5e^{-\lambda} + \frac{3}{2}e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-\lambda} + \frac{7}{2}\,. \end{aligned}$$

Kad $\lambda \to +\infty$, vidimo da $P(\lambda) \to 7/2$.

873. Odrediti obim zatvorene figure čije su strane delovi krivih

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x\,,\ y = 0\,,\ x = 1\,,\ x = 2\,.$$

Rešenje. Kako je $f(1) = 1/4$, i za $x \in (1,2)$:

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x} > 0\,,$$

zaključujemo da funkcija f raste za $x \in [1,2]$ i da na tom intervalu ne seče x-osu. Traženi obim je, prema tome, jednak

$$S = f(1) + f(2) + 1 + L = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\log 2 + L\,,$$

gde je L dužina luka krive $y = f(x)$ između tačaka čije su apscise $x = 1$ i $x = 2$. Ova dužina je

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + f'^2(x)}\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\log 2,$$

odakle je $S = 21/8$.

874. Odrediti obim i površinu zatvorene figure čije su strane delovi krivih

$$y = f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log x\,,\ y = 0\,,\ x = 1\,,\ x = 2\,.$$

Rešenje. Kako je $f'(x) = x/2 - 1/2x > 0$ za $x > 1$, i kako je $f(1) > 0$, zaključujemo da je grafik funkcije $y = f(x)$ iznad x-ose u intervalu $[1,2]$. Stoga je obim date figure jednak

$$\begin{aligned} S &= 2 - 1 + f(1) + f(2) + \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2(x)}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\log 2 + \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{(x^2-1)^2}{4x^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\log 2 + \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x}\ \mathrm{d}x = 3 \end{aligned}$$

Površina je (na osnovu prethodne analize) data izrazom

$$P = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log x\right)\mathrm{d}x = \frac{13}{12} - \log 2\,.$$

875. Izračunati veličinu površine tela koje nastaje rotacijom oko x-ose površine ograničene krivom

(1) $$y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

i pravama $y = 1$ i $x = 2$.

Rešenje. Kriva (1) seče pravu $y = 1$ u tački čija je apscisa $x = 0$. Izvod funkcije date sa (1) je

$$y'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Prema tome, grafik date krive u intervalu $(0,1)$ opada od $y=1$ do $y=y(1)=\sqrt{2}/2$, a zatim raste do $y(2)=\sqrt{5}/2$.

Na osnovu ove analize (nacrtati sliku!), zaključujemo da je tražena zapremina data sa:

$$V=2\pi-\pi\int_0^2\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Smenom $1+x=t$ u (2), dobijamo

$$V=2\pi-\pi\int_1^3\frac{t^2-2t+2}{t^2}\,\mathrm{d}t=\pi\left(\log 9-\frac{4}{3}\right)\,.$$

876. Izračunati veličinu S površine tela koje nastaje rotacijom oko x-ose dela ravni ograničenog krivom čija je jednačina

$$9ay^2=x(3a-x)^2\,,\quad a>0\,.$$

Rešenje. Data kriva je simetrična u odnosu na x-osu i seče ovu osu u tačkama $x=0$ i $x=3a$ (videti sliku 43). Deo krive iznad x-ose, a između ove dve tačke ima jednačinu

$$y=f(x)=\frac{3a-x}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}\,.$$

Izvod funkcije f je

$$f'(x)=\frac{a-x}{2\sqrt{ax}}\,.$$

Primenom formule za veličinu površine rotacionog tela dobijamo

$$S=2\pi\int_0^{3a}f(x)\sqrt{1+f'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a-x)(a+x)\,\mathrm{d}x=3\pi a^2\,.$$

877. Izračunati veličinu površine obrtnog tela koje nastaje rotacijom kardioide

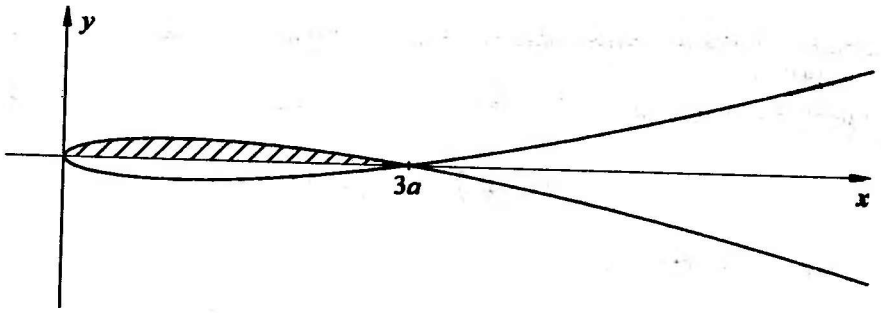
$$\rho=a(1+\cos\theta)\qquad(a>0)$$

oko polarne ose.

Rešenje. Grafik kardioide je prikazan na slici 38 na strani 273.

Površina nastala rotacijom kardioide oko polarne ose jednaka je površini koja nastaje kada gornja polovina kardioide $(0\le\theta\le\pi)$ rotira oko polarne ose. Veličina P te površine je

$$P=2\pi\int_0^{\pi}|\rho\sin\theta|\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{1}$$



Slika 43. *Grafik krive iz zadatka 876 za* $a = 1$.

U domenu $\theta \in [0, \pi]$ je $\sin\theta \geq 0$, pa se u (1) možemo osloboditi apsolutne vrednosti. Iz jednačine kardioide imamo $\rho' = -a\sin\theta$; zamenom u (1) i sređivanjem, dobijamo

$$P = 2\pi a^2\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{3/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Poslednji integral se lako rešava smenom $t = \cos\theta$ i dobija se $P = 32\pi a^2/5$.

Šta bismo dobili da smo u (1) uzeli granice integracije od 0 do 2π ? Da li bi se dobio tačan rezultat? Objasniti.

878. Luk krive čija je jednačina

$$y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

u intervalu od tačke maksimuma do njoj najbliže prevojne tačke rotira oko x-ose. Naći zapreminu tako dobijenog obrtnog tela.

Rešenje. Kako je

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,,\quad f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}\,,$$

zaključujemo da je funkcija f dostiže svoj maksimum za $x = 1$. Ova funkcija ima tri prevojne tačke, $x = 0, \pm\sqrt{3}$, od kojih je $x = \sqrt{3}$ najbliža tački maksimuma. U intervalu $x \in [1, \sqrt{3}]$ je $f > 0$, pa je

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2} \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{24} + \frac{2-\sqrt{3}}{8}\pi\,. \end{aligned}$$

879. Naći veličinu površine dela ravni ograničenog sa:

a) $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0$ $(x \geq 0)$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\right]$

b) $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ $(0 \leq y \leq 1)$ $\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\right]$

c) krivom $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ i x-osom. $[3\pi a^2]$

d) $r = a \sin 3\varphi$ $[\pi a^2/4]$

e) $x^3 + y^3 = 3axy$ $[3a^2/2]$

f) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ $[\pi a^2\sqrt{2}]$

880. Izračunati dužinu luka krivih:

a) $y = \log \cos x$, $0 \leq x \leq a$, $(a < \pi/2)$ $[\log \operatorname{tg}(a/2 + \pi/4)]$

b) $r = a(1 + \cos \varphi)$ $[8a]$

c) $r = a\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $[\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + (a/2)\log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$

d) $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ $\left[\frac{3}{2}a\pi\right]$

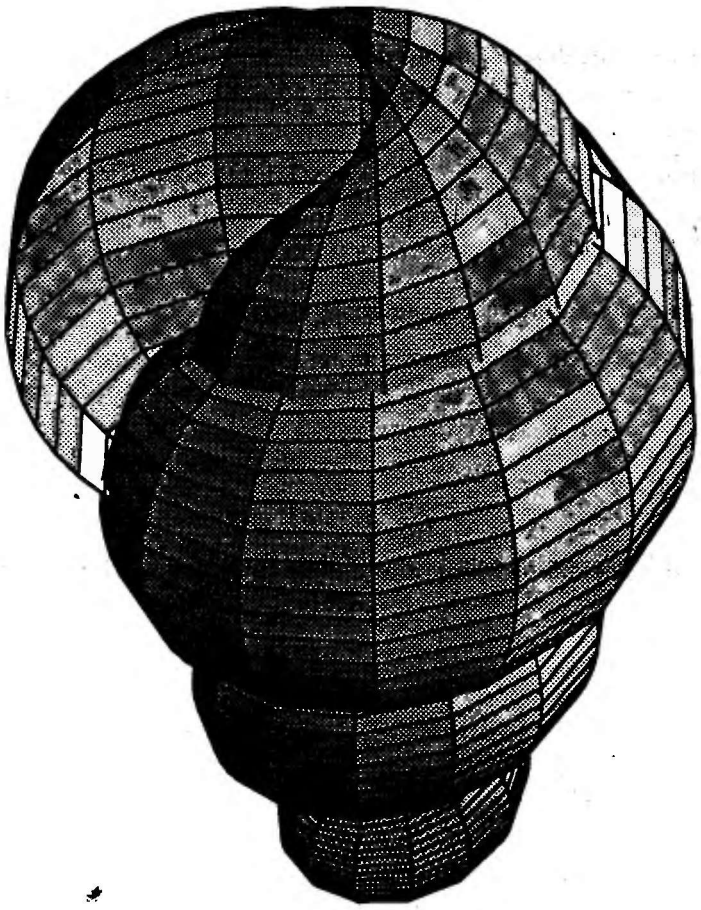
881. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\left[\frac{4}{3}\pi abc\right]$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c$ $\left[\frac{8}{3}\pi abc\right]$

c) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ $\left[\frac{16}{3}a^3\right]$

882. Naći zapreminu tela koje se dobija rotacijom krive $x^2 - xy + y^2 = a^2$ oko x-ose. $\left[\frac{8}{3}\pi a^3\right]$



Brzi Ahil neće nikada stići kornjaču koja puzi ispred njega. Jer, da bi Ahil prestigao kornjaču, on mora najpre da dođe na mesto sa kojeg je kornjača krenula; kada Ahil dođe do tog mesta, kornjača je već otišla i tako je ona uvek ispred Ahila.
Po Zenonu (495–435 p.n.e.)

U matematici jedva da postoji beskonačan red čiji se zbir može rigorozno odrediti.
Niels Henrik Abel, 1826.

Glava 5

Redovi

U teoriji i primenama matematičke analize, redovi imaju značajnu ulogu. Vrednosti funkcija se mogu izračunati razvijanjem u stepene redove, što je posebno značajno za računarske algoritme, jer su za sumiranje stepenog reda potrebne samo četiri osnovne računske operacije.

U odeljku 5.1 proučavamo brojne redove, a u 5.2 funkcionalne, gde posebno razmatramo stepene redove (5.2.3) i osobine MACLAURINovih redova (5.2.4).

5.1 Brojni redovi

5.1.1 Definicija reda

Teorija redova proučava sumiranje beskonačnog broja sabiraka. Slobodno govoreći, ako je $a_1, a_2, \ldots$ dati niz, beskonačna suma

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ , ili } \sum_{k=m}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

naziva se **red**. *Ovo nije stroga definicija, jer značenje simbola beskonačnog sumiranja u (1) nije precizirano; kod sumiranja beskonačnog broja sabiraka pojavljuju se neke nove osobine u odnosu na konačan slučaj. Zato definiciju reda možemo da formulišemo i na sledeći način:*

- *Neka je dat niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. *Definišimo*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Uređen par (a_n, S_n) *naziva se* **red**, a_n *su* **članovi reda**, S_n *su* **parcijalne sume reda**.

U daljem tekstu koristićemo samo neformalnu definiciju (1). Ako nije bitno od kog indeksa počinje sumiranje, upotrebljavaćemo i oznaku $\sum a_n$.

Članovi reda mogu da budu realni ili kompleksni brojevi; takav red je **brojni red** *ili* **numerički red**, *za razliku od slučaja kada su članovi reda funkcije (funkcionalni red). U ovom odeljku posmatraćemo samo brojne redove i to sa realnim članovima, ukoliko nije drugačije naznačeno.*

- *Ako postoji konačna granična vrednost*

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

tada kažemo da je red **konvergentan** *(ili da konvergira) i da je* S **suma reda** *(ili zbir reda), u oznaci*

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k .$$

Za red koji nije konvergentan, kažemo da je **divergentan** *(ili da divergira).*

- *Ako je dat red* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, *tada se red* $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$ *naziva* **ostatkom reda posle** n**-tog člana**.

Navodimo sada osnovne osobine brojnih redova.

√ *Red i njegov ostatak su* **ekvikonvergentni**, *tj. oba reda su ili konvergentna ili divegentna.*

√ *Ako je red konvergentan i ako je* r_n *njegov ostatak posle* n*-tog člana, tada je* $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$.

√ *Ako je red* $\sum a_n$ *konvergentan, tada je*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 .$$

Obrnuto ne važi, tj. ovaj uslov nije dovoljan za konvergenciju reda.

√ **Cauchyjev kriterijum konvergencije redova.** *Red* $\sum a_n$ *konvergira ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tako da za svako* $n > n_0$ *i za svako* $k \in \mathbf{N}$ *važi*

$$|S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon .$$

Ovaj kriterijum se izvodi iz CAUCHY*jevog kriterijuma konvergencije niza parcijalnih suma* S_n.

√ *Ako su redovi* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *konvergentni, tada je konvergentan i red* $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$, *gde su* α *i* β *proizvoljni realni (ili kompleksni) brojevi, i važi jednakost*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n .$$

883. Ako je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan, dokazati jednakosti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_{n-k} = \sum_{n=-k+1}^{+\infty} a_{n+k} ,$$

gde je k proizvoljan ceo broj.

Rešenje. Dokažimo jednakost prve i četvrte sume. Parcijalna suma prvih m članova reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + \cdots a_m .$$

Parcijalna suma prvih m članova reda $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_{n-k}$ je

$$\sum_{n=k+1}^{k+m} a_{n-k} = a_{k+1-k} + a_{k+2-k} + \cdots a_{k+m-k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m .$$

Prema tome, posmatrani redovi imaju jednake parcijalne sume (i jednake odgovarajuće članove), pa su im i sume, kao granične vrednosti niza parcijalnih suma, jednake.

Ostale jednakosti se dokazuju na isti način.

884. Dokazati da važe jednakosti

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_{2n+1}$,

pri čemu se pretpostavlja da su svi redovi konvergentni.

Primedba. U zadacima 883 i 884, pretpostavka o konvergenciji redova se uvodi samo zato što ne možemo govoriti o jednakosti suma divergentnih redova (jer te sume i ne postoje). Ako se koristi stroga definicija reda kao uređenog para (a_n, S_n), tada se red ne poistovećuje sa svojom sumom, pa ima smisla ispitivati da li su dva divergentna reda jednaka.

885. Da li je dozvoljena "smena promenljive" u redu? Na primer, ako u konvergentnom redu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{3n+1}$ uvedemo novu promenljivu $m = 3n + 1$, da li će važiti jednakost

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{3n+1} = \sum_{m=4}^{+\infty} a_m \ ?$$

Rešenje. Jednakost neće važiti. Naime, imamo da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{3n+1} = a_4 + a_7 + a_{10} + \cdots,$$

dok je

$$\sum_{m=4}^{+\infty} a_m = a_4 + a_5 + a_6 + \cdots.$$

Jedina dozvoljena smena promenljive sumiranja je smena $m = n \pm k$, gde je k ceo broj, kao u zadatku 883.

886. Ispitati da li su konvergentni sledeći redovi:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} c$, $c = \text{const.}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$.

Rešenje. a) n–ta parcijalna suma datog reda je $S_n = nc$; prema tome, za $c = 0$ red konvergira i njegova suma je jednaka 0, dok je za $c \neq 0$ red divergentan.

b) Parcijalne sume datog reda su:

$S_1 = -1$, $S_2 = -1+1 = 0$, $S_3 = -1+1-1 = -1$, $S_4 = -1+1-1+1 = 0, \ldots$

i u opštem slučaju,

$$S_{2n-1} = -1, \quad S_{2n} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Kako niz parcijalnih suma nema graničnu vrednost, red je divergentan.

887. Za koje vrednosti $q \in \mathbf{R}$ konvergira red $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$?

Rešenje. Parcijalna suma ovog reda je zbir geometrijske progresije:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Kao što smo pokazali u zadatku 208 na strani 71, niz S_n ima konačnu graničnu vrednost ako i samo ako je $|q| < 1$; u tom slučaju je i dati red konvergentan i njegova suma je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

888. Ispitati konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$, d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{600n}$.

Rezultat. Redovi pod a) i b) su divergentni, pod c) i d) su konvergentni.

889. Dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Uputstvo. Videti zadatak 211.

890. Ako je $\{a_n\}$ nula niz, dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1.$$

891. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Rešenje. Parcijalna suma ovog reda je

$$S_n = \log 2 + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n+1}{n} = \log(n+1),$$

i red divergira, jer je $\lim \log(n+1) = +\infty$.

892. Ispitati da li konvergira **harmonijski red**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Rešenje. **I način.** Videti zadatak 281.

II način. Uočimo da se red može napisati u obliku

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{15}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{31}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\right)+\cdots$$

U svakoj zagradi, svaki član je veći od prvog člana u sledećoj zagradi; stoga je suma reda, ukoliko postoji, veća od

$$1+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,$$

iz čega zaključujemo da je dati red divergentan.

Primedba. Za opravdanje postupka grupisanja članova u II načinu videti zadatak 901 i primedbu iza zadatka 903.

893. Ispitati da li konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rešenje. Primenićemo CAUCHYjev kriterijum konvergencije redova. Imamo da je

$$\begin{aligned}0<S_{n+k}-S_n&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}\\&\le\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo (videti i zadatak 284 na strani 102) da je S_n CAUCHYjev niz, pa je dati red konvergentan.

894. Primenom CAUCHYjevog kriterijuma ispitati konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$.

Rešenje. Red a) divergira, redovi b) i c) konvergiraju.

895. Dokazati da su sledeći redovi ekvikonvergentni (tj. ili su oba reda konvergentna ili oba divergentna):

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+k}$, $k \in \mathbf{N}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$, $k \in \mathbf{N}$.

Rešenje. a) Neka su S_n i S'_n parcijalne sume redova $\sum a_n$ i $\sum a_{n+k}$, respektivno. Tada je

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad S'_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n},$$

odakle je

$$S'_n = S_{n+k} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k), \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$S_n = S'_{n-k} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_k), \quad n = k+1, k+2, \ldots$$

Kako je k fiksiran prirodan broj, zbir prvih k članova reda je konačan; neka je to neki broj A. Tada imamo da je

$$S'_n = S_{n+k} - A, \quad S_n = S'_{n-k} + A.$$

Pretpostavimo da postoji $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$. Tada iz osobina nizova zaključujemo da je i $\lim_{n\to+\infty} S_{n+k} = S$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty} (S_{n+k} - A) = S - A.$$

Ovim smo dokazali da konvergencija reda $\sum a_n$ implicira konvergenciju reda $\sum a_{n+k}$.
Na isti način, ako pretpostavimo da je red $\sum a_{n+k}$ konvergentan, tada je

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty} S'_{n-k} = S',$$

odakle je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (S'_{n-k} + A) = S + A,$$

pa je i red $\sum a_n$ konvergentan.
Deo b) dokazuje se analogno.

896. Koristeći zadatak 895, ispitati konvergenciju redova

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+100}$, b) $\sum_{n=7}^{+\infty} 2^{n+7}$, c) $\sum_{n=121}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-3}}$, d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Rezultat. Redovi pod a) i b) divergiraju; redovi pod c) i d) konvergiraju.

897. Ako je $\sum a_n$ konvergentan red, dokazati da je $\lim a_n = 0$.

Rešenje. Neka je red $\sum a_n$ konvergentan, neka je S njegova suma i neka je S_n njegova n–ta parcijalna suma. Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S,$$

odakle sleduje da je

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Kako je $a_n = S_n - S_{n-1}$, dokaz je završen.

898. Ispitati da li su konvergentni redovi

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n}$.

♣ **Rešenje.** a) Opšti član svakog konvergentnog reda teži nuli kad $n \to +\infty$. Kako je $\lim \frac{n}{n+1} = 1$, dati red je divergentan.

b) Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

potreban uslov konvergencije reda nije ispunjen, pa zaključujemo da je red divergentan.

899. Pokazati da red $\sum a_n$, gde je $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, divergira, iako je $\lim a_n = 0$.

900. Za koje $x \in \mathbf{R}$ konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx$?

Rešenje. Ako je $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tada dati red očigledno konvergira i suma mu je jednaka nuli. Pretpostavimo da je red konvergentan i za neko $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Iz ove pretpostavke proizilazi da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sin nx = \lim_{n\to+\infty} \sin(n+1)x = 0,$$

odnosno

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (\overbrace{\sin nx}^{\to 0} \cos x + \cos nx \sin x) = \sin x \cdot \lim_{n\to+\infty} \cos nx,$$

odakle nalazimo da je (zbog $\sin x \neq 0$)

$$\lim_{n\to+\infty} \cos nx = \lim_{n\to+\infty} \sin nx = 0,$$

što nije moguće zbog $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1$.

Prema tome, polazna pretpostavka nije tačna i red je divergentan za svako $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

901. Ako je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan, dokazati da njegova suma ostaje ista ako se članovi grupišu bez promene poretka, tj. dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = (a_1+a_2+\cdots+a_{p_1})+(a_{p_1+1}+a_{p_1+2}+\cdots+a_{p_2})+\cdots, \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \cdots).$$

Ako red dobijen grupisanjem konvergira, da li i početni red mora da konvergira?

Rešenje. Stavimo da je $p_0 = 0$ i definišimo

$$A_n = a_{p_{n-1}+1} + a_{p_{n-1}+2} + \cdots + a_{p_n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Treba dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

pri čemu pretpostavljamo da red sa desne strane konvergira. Neka su S'_n i S_n parcijalne sume redova sa leve odnosno sa desne strane gornje jednakosti. Tada je, očigledno,

$$S'_n = S_{p_n},$$

pa kako je granična vrednost podniza jednaka graničnoj vrednosti konvergentnog niza, imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty} S_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} S_n,$$

iz čega zaključujemo da je red dobijen grupisanjem takođe konvergentan i da ima istu sumu kao i dati red.

Ako red dobijen grupisanjem konvergira, početni red ne mora da konvergira, jer, ako jedan podniz parcijalnih suma konverira, to ne znači da i niz konvergira. Posmatrajmo, na primer, red $\sum(-1)^n$ koji je divergentan (zadatak 886b) Grupisanjem po dva člana počevši od prvog, dobija se konvergentan red

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+2}) = 0.$$

902. Neka je dat red $\sum a_n$, gde je $\lim a_n = 0$. Ako članove reda grupišemo bez promene poretka, pri čemu svaka grupa sadrži najviše $M < +\infty$ članova, i ako je red dobijen grupisanjem konvergentan, dokazati da je i red $\sum a_n$ konvergentan i da ima istu sumu kao grupisani red.

Rešenje. Neka su, kao u zadatku 901,

$$A_k = a_{p_{k-1}+1} + a_{p_{k-1}+2} + \cdots + a_{p_k}, \qquad p_0 = 0,$$

članovi grupisanog reda, i neka su S_n i S'_n parcijalne sume redova $\sum a_n$ i $\sum A_k$, respektivno. Za svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $k(n) \in \mathbf{N}$ tako da je $p_{k(n)-1} < n \leq p_{k(n)}$. Tada je

$$|S_n - S'_{k(n)}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{p_{k(n)}}|. \tag{1}$$

Broj članova sa desne strane u (1) nije veći od broja članova koji ulaze u $A_{p_{k(n)}}$, a taj broj nije veći od M. Dakle, sa desne strane u (1) imamo najviše M sabiraka od kojih svaki teži nuli kada $n \to +\infty$; stoga i njihov zbir teži nuli. Prema tome,

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n - S'_{k(n)}) = 0. \tag{2}$$

Kako je red $\sum A_k$ po pretpostavci konvergentan, postoji $\lim S'_{k(n)} = S$, pa iz (2) zaključujemo da je i $\lim S_n = S$, što je i trebalo dokazati.

903. Neka je dat red $\sum a_n$, gde je $a_n > 0$ za skoro svako $n \in \mathbf{N}$, ili je $a_n < 0$ za skoro svako n. Ako je konvergentan red koji se dobija od datog reda grupisanjem članova bez promene poretka, dokazati da je tada i dati red konvergentan i da ima istu sumu kao grupisani red.

Rešenje. Ako su skoro svi članovi reda pozitivni, tada je niz parcijalnih suma S_n monotono rastući, za dovoljno veliko n. Iz pretpostavke o konvergenciji reda koji se dobija od datog reda grupisanjem članova sleduje da je jedan podniz S_{p_n} konvergentan (videti zadatak 901). Monoton niz S_n, čiji je jedan podniz konvergentan, i sam je konvergentan (zadatak 262). Prema tome, dati red je takođe konvergentan i ima istu sumu kao grupisani red.

Slučaj kada su članovi reda negativni svodi se na prethodni slučaj množenjem sume reda sa -1.

Primedba. Iz zadataka 901, 902 i 903 zaključujemo: Ako dokazujemo da je red divergentan, tada možemo uvek da grupišemo članove bez promene poretka i da pokažemo da je tako dobijeni red divergentan. Međutim, iz konvergencije reda dobijenog grupisanjem može se zaključiti konvergencija datog reda samo ako su članovi datog reda istog znaka, ili ako je broj elemenata grupâ ograničen, a opšti član datog reda teži nuli.

904. Da li važe jednakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} \; ?$$

Rešenje. Jednakost $\sum u_n + \sum v_n = \sum(u_n + v_n)$ važi samo u slučaju kada su redovi $\sum u_n$ i $\sum v_n$ konvergentni. Kako je harmonijski red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ divergentan (zadatak 892), druga jednakost nije tačna.

905. Da li važe jednakosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} \; ?$$

[Ne.]

906. Ako je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan i red $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentan, dokazati da je red $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ divergentan.

Na osnovu ovoga dokazati da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ divergentan.

907. Ako su redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentni, da li red $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ može da bude konvergentan?

Rešenje. Može. Na primer, neka je $a_n = \frac{1}{n+1}$ i neka je $b_n = -\frac{n}{(n+1)^2}$. Tada je $a_n + b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ i red $\sum(a_n + b_n)$ je konvergentan, dok su redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ divergentni.

U opštem slučaju, ako je $b_n = c_n - a_n$, gde je $\sum a_n$ divergentan, a $\sum c_n$ konvergentan, tada će i red $\sum b_n$ biti divergentan, a red $\sum(a_n + b_n)$ konvergentan.

908. Ako su x_n i y_n dva konvergentna niza, iz $x_n < y_n$ može se zaključiti samo da je $\lim x_n \leq \lim y_n$. Ako su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni redovi i ako je, za svako $n \in \mathbf{N}$, $a_n < b_n$, da li se može zaključiti da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; ? \tag{1}$$

Rešenje. Može. Neka su A_n i B_n parcijalne sume odgovarajućih redova i neka su A'_n i B'_n parcijalne sume iz kojih je izostavljen prvi član (a_1, odnosno b_1). Tada je

$$A_n - B_n = (A'_n + a_1) - (B'_n + b_1) = (A'_n - B'_n) + (a_1 - b_1) .$$

Iz uslova zadatka sleduje da je $A'_n < B'_n$, pa je

$$\lim(A'_n - B'_n) \leq 0 .$$

Odavde je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(A_n - B_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(A'_n - B'_n) + a_1 - b_1 \leq a_1 - b_1 < 0 ,$$

što znači da važi nejednakost (1).

909. Da li se može zaključiti da važi nejednakost (1) iz prethodnog zadatka ako je

a) $a_n < b_n$ za skoro svako n, [Ne]

b) $a_n \leq b_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$ i $a_{n_0} < b_{n_0}$ za bar jedan indeks n_0 ? [Da]

910. Dokazati: Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju i ako je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira.

Pokazati na primerima da se, u slučaju divergencije redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$, ne može izvesti zaključak o divergenciji reda $\sum c_n$.

Rešenje. Primenićemo CAUCHYjev kriterijum konvergencije redova. Ako su redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergentni, tada za dato $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da za svako $n \geq n_0$ i za svako $k \in \mathbf{N}$ važi

$$-\varepsilon < a_{n+1} + \cdots + a_{n+k} < \varepsilon , \quad -\varepsilon < b_{n+1} + \cdots + b_{n+k} < \varepsilon .$$

Kako je $a_m < c_m < b_m$ za svako $m \in \mathbf{N}$, imamo da je

$$-\varepsilon < a_{n+1} + \cdots + a_{n+k} < c_{n+1} + \cdots + c_{n+k} < b_{n+1} + \cdots + b_{n+k} < \varepsilon ,$$

tj. $|c_{n+1} + \cdots + c_{n+k}| < \varepsilon$. Odavde zaključujemo da je i red $\sum c_n$ konvergentan. Ako redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ divergiraju, red $\sum c_n$ može da bude i konvergentan. To je slučaj, na primer, sa $a_n = \frac{1}{n^2} - 1$, $b_n = \frac{1}{n^2} + 1$ i $c_n = \frac{1}{n^2}$.

5.1.2 Pozitivni redovi

Red čiji su skoro svi članovi pozitivni naziva se **pozitivnim redom.** *Parcijalne sume pozitivnog reda su monotono rastuće; prema tome, granična vrednost ovih suma uvek postoji (konačna ili beskonačna). U slučaju pozitivnih redova (i samo u tom slučaju) ako je red konvergentan pišemo* $\sum a_n < +\infty$*; ako je red divergentan, tada pišemo* $\sum a_n = +\infty$*. Navodimo nekoliko kriterijuma konvergencije pozitivnih redova.*

Neka su $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *dati pozitivni redovi.*

✓ **Poredbeni kriterijumi.**

I *Ako je* $a_n \leq b_n$ *za skoro svako* n*, tada*

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \quad \sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty.$$

II *Ako je* $a_n = O(b_n)$ *i* $b_n = O(a_n)$ $(n \to +\infty)$ *ili* $a_n \sim b_n$ *ili ako postoji* $\lim \frac{a_n}{b_n} = K$*,* $0 < K < +\infty$*, tada*

$$\sum a_n < +\infty \iff \sum b_n < +\infty.$$

III *Ako je* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$*, tj.* $a_n = o(b_n)$ *kad* $n \to +\infty$*, tada*

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \quad \sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty.$$

IV *Ako za skoro svako* n *važi* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$*, tada*

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \quad \sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty.$$

✓ **Integralni kriterijum.** *Neka je* f *nepekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na* $[a, +\infty)$*, za neko* $a > 0$*. Tada su*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \sum f(n)$$

ekvikonvergentni.

✓ **D'Alembertov kriterijum.** *Ako postoji*[1] $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$*, tada*

$$L < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \qquad L > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

Ako je $L = 1$*, kriterijum je neodlučiv (red može da konvergira ili da divergira).*

[1] U ovom i u svim sledećim kriterijumima granična vrednost L može da bude i beskonačna.

✓ **Cauchyjev kriterijum.** *Ako postoji* $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$, *tada*

$$L < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \qquad L > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

U slučaju kada je $L = 1$, *kriterijum je neodlučiv.*

✓ **Gaussov kriterijum.** *Neka je*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O(1/n^{1+\varepsilon}), \qquad (n \to +\infty),$$

za neko $\lambda, \mu, \varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. *Tada*

$$\lambda > 1 \text{ ili } \lambda = 1, \mu > 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty,$$
$$\lambda < 1 \text{ ili } \lambda = 1, \mu \leq 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

✓ **Raabeov kriterijum.** *Ako postoji* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$, *tada*

$$L > 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \qquad L < 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

Ako je $L = 1$, *kriterijum je neodlučiv.*

✓ **Bertrandov kriterijum.** *Ako postoji* $\lim(\log n)\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = L$, *tada*

$$L > 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \qquad L < 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

Ako je $L = 1$, *kriterijum je neodlučiv.*

✓ **Kummerov kriterijum.** *Neka je red* $\sum \frac{1}{b_n}$ *divergentan* ($b_n > 0$). *Ako postoji* $\lim\left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) = L$, *tada*

$$L > 0 \Rightarrow \sum a_n < +\infty, \qquad L < 0 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

Ako je $L = 0$, *kriterijum je neodlučiv.*

Svi navedeni kriterijumi važe samo za pozitivne redove i ne mogu se koristiti za ispitivanje konvergencije redova koji nisu pozitivni.

Svi kriterijumi kod kojih se pretpostavlja postojanje granične vrednosti nekog niza, mogu da se iskažu u uopštenom obliku, gde nije potrebno da postoji odgovarajuća granična vredost. Na primer, CAUCHYjev *kriterijum u ovom obliku tvrdi da ako postoji konstanta* $q < 1$ *tako da za skoro svako* n, $\sqrt[n]{n} \leq q < 1$, *tada je* $\sum a_n < +\infty$, *dok u slučaju da je* $\sqrt[n]{n} \geq 1$ *za skoro svako* n, *tada je* $\sum a_n = +\infty$. *Analogno se*

formulišu uopšteni D'ALEMBERTov, RAABEov, BERTRANDov *i* KUMMERov *kriterijum.*

Koji kriterijum treba primeniti zavisi od oblika opšteg člana a_n *datog reda.*

Poredbeni kriterijumi se koriste kada se a_n *može lako porediti sa opštim članom* b_n *nekog reda za koji već znamo da je konvergentan ili divergentan.*

Integralni kriterijum se koristi kada je $a_n = f(n)$, *gde je* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *moguće izračunati bez većih problema.*

U ostalim slučajevima primenjujemo najpre D'ALEMBERTov *ili* CAUCHYjev *kriterijum, a ako su oni neodlučivi, onda* GAUSSov.

RAABEov *i* BERTRANDov *kriterijum se koriste ako* GAUSSov *kriterijum ne može da se primeni ili ako je to jednostavnije od primene* GAUSSovog *kriterijuma.*

KUMMERov *kriterijum je uglavnom od teorijskog značaja, i pomoću njega se, izborom niza* b_n, *mogu izvesti različiti posebni kriterijumi.*

911. U zavisnosti od $p > 0$, ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+p^n}.$$

Rešenje. Ako je $p \leq 1$, tada opšti član reda $a_n = \dfrac{1}{1+p^n}$ ne teži nuli, pa je red divergentan. Neka je $p > 1$. Kako je $a_n \leq (1/p)^n$, a red $\sum(1/p)^n$ je konvergentan za $p > 1$ (zadatak 887), primenom poredbenog kriterijuma I nalazimo da je i dati red konvergentan.

912. Ispitati da li je red $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{x}{3^n}$ $(x > 0)$ konvergentan.

Rešenje. Za dovoljno veliko n, n-ti član datog reda je pozitivan i važi nejednakost

$$2^n \sin \frac{x}{3^n} \leq x \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Kako red $\sum(2/3)^n$ konvergira, zaključujemo da i dati red konvergira.

913. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Rešenje. Kako je

$$\sqrt{n(n+1)} \sim n \qquad (n \to +\infty)$$

a red $\sum 1/n$ je divergentan, primenom poredbenog kriterijuma II nalazimo da je i dati red divergentan.

914. Dokazati integralni kriterijum.

Rešenje. Neka je dat red $\sum f(n)$, gde je f neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na $[a, +\infty)$. Bez smanjenja opštosti stavimo $a = 1$. Iz monotonosti funkcije f imamo da je

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k) \qquad \text{za } x \in [k, k+1], k = 1, 2, \ldots .$$

Integracijom u granicama od k do $k+1$ dobijamo

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le f(k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sabiranjem ovih nejednakosti za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ nalazimo

$$(1) \quad f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

Alternativno, nejednakosti (1) se mogu izvesti i na sledeći način: Ako interval $[1, n]$ podelimo tačkama $1, 2, \ldots, n$ na $n-1$ delova dužine 1, tada su, s obzirom na monotonost funkcije f, donja i gornja integralna suma za integral $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ date sa

$$S_* = f(2) + f(3) + \cdots + f(n), \quad S^* = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1),$$

i nejednakosti (1) se dobijaju iz

$$S_* \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le S^* \qquad \square$$

Ako je integral konvergentan, tada postoji konačan $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = J$, pa iz leve nejednakosti u (1) zaključujemo da su parcijalne sume reda ograničene odozgo sa J i monotono rastuće (zbog $f(n) \ge 0$), tako da je i red konvergentan.

Ako je integral divergentan, tada je $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (jer je $f(x) \ge 0$), pa iz desne nejednakosti u (1) zaključujemo da je i red divergentan.

Primedba. Integralni kriterijum samo utvrđuje ekvikonvergenciju reda i odgovarajućeg integrala; brojne vrednosti reda i integrala, u slučaju njihove konvergencije, mogu da se razlikuju, kao što se i vidi iz izloženog dokaza.

915. U zavisnosti od $a \in \mathbf{R}$ ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$.

Rešenje. Za $a \ge 0$, dati red divergira, jer opšti član n^a ne teži nuli.

Neka je $a < 0$, $a = -b$, $b > 0$. Kako je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^b} = \begin{cases} \frac{1}{1-b} x^{1-b}, & b \ne 1, \\ \log x, & b = 1, \end{cases}$$

zaključujemo, primenom integralnog kriterijuma, da za $b \leq 1$ integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^b}$$

divergira, pa i dati red divergira.

Integral i red konvergiraju ako i samo ako je $b > 1$, odnosno $a < -1$.

Na primer, redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/10}}$$

divergiraju, dok redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10/9}}$$

konvergiraju.

916. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

Rešenje. Primenićemo integralni kriterijum. Neka je

$$f(x) = \frac{1}{x \log x}.$$

Tada je dati red oblika $\sum f(n)$. Integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \log t \Big|_{\log 2}^{+\infty}$$

divergira, odakle sleduje da i dati red divergira.

917. Da li konvergira red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$?

Rešenje. Neka je $a_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. Tada imamo

$$\log \frac{a_n}{b_n} = 2 \log n - \log n \cdot (\log(\log n))$$
$$= (\log n)(2 - \log(\log n)) \to -\infty \qquad (n \to +\infty),$$

odakle proizilazi da je

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

pa kako je red $\sum b_n$ konvergentan, to je i dati red konvergentan na osnovu poredbenog kriterijuma III.

918. Ako je $a, s \in \mathbf{R}, b > 0$, ispitati konvergenciju reda $\sum \frac{1}{(a+bn)^s}$.

Rešenje. Očigledno je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(a+bn)^s}{n^s} = b^s, \qquad 0 < b^s < +\infty.$$

Kako red $\sum \frac{1}{n^s}$ konvergira za $s > 1$ a divergira za $s \leq 1$ (zadatak 915), na osnovu poredbenog kriterijuma II zaključujemo da je dati red konvergentan za $s > 1$ i divergentan za $s \leq 1$.

919. Dokazati da je

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1) \qquad (n \to +\infty),$$

gde je γ realna konstanta.

Rešenje. Neka je $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$. Dokazaćemo da je niz u_n konvergentan, iz čega će se dobiti traženo tvrđenje.

Ako u nejednakostima (1) u zadatku 914 stavimo $f(x) = 1/x$, dobijamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

Odavde je

$$0 < \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \leq 1,$$

tj. niz u_n je ograničen.

Posmatrajmo razliku

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Integracijom nejednakosti $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x}$ $(x \leq n+1)$ u granicama od n do $n+1$, dobijamo

$$\frac{1}{n+1} \leq \log\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

tj. $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pa je niz u_n monotono opadajući, a kako je i ograničen, onda postoji konačan $\lim u_n = \gamma$.

Primedba. 1° Ovo je još jedan dokaz divergencije harmonijskog reda (videti zadatak 892), s tim što je u ovom zadatku pokazano ne samo da harmonijski red divergira, već i da se njegova suma, za veliko n, ponaša kao $\log n + \gamma$.

2° Broj γ se naziva **Eulerovom konstantom**. Njena brojna vrednost je $\gamma = 0.57721566490...$

920. Ako za pozitivne nizove a_n i b_n važi: a) $\lim a_n = \lim b_n = 0$, b) $a_n > b_n$ za beskonačno mnogo vrednosti n, dá li je tada moguće da red $\sum a_n$ bude konvergentan, a red $\sum b_n$ divergentan?

Rešenje. Moguće je. Na primer, neka je

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k, \\ \frac{1}{n^3}, & n = 2k-1 \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Uslov a) je očigledno ispunjen,kao i uslov da je red $\sum a_n$ konvergentan. Red $\sum b_n$ je divergentan, jer je

$$\sum_{n=1}^{2m} b_n > \sum_{k=1}^{m} b_{2k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} \to +\infty$$

Kako je $1/n^2 > 1/n^3$ za svako $n \in \mathbb{N}$, imamo da je $a_n > b_n$ za sve neparne indekse n, pa je i uslov b) ispunjen.

921. Da li je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergentan?

Rešenje. Primenom D'ALEMBERTovog kriterijuma, iz

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

zaključujemo da red konvergira.

922. Za koje $x \geq 0$ red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira?

Rešenje. Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

na osnovu D'ALEMBERTovog kriterijuma dati red konvergira za svako $x \geq 0$.

923. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + (\log n)^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n(3 + (-1)^n)}$.

Rešenje. a) Prema D'ALEMBERTovom kriterijumu, ovaj red konvergira, jer je

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

b) Kako je

$$\frac{n+(\log n)^2}{n} = 1 + o(1) \qquad (n \to \infty)\,,$$

opšti član reda se ponaša kao $1/n$, pa je dati red divergentan.

c) Iz

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n)} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 1/e < 1$$

zaključujemo da je red konvergentan.

d) Članovi sa neparnim indeksima su jednaki nuli; prema tome, dati red se može napisati u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,,$$

odakle proizilazi da je red divergentan.

924. Za koje vrednosti $x > 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ konvergira?

Rešenje. Imamo da je

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{x}{(1+1/n)^n} = \frac{x}{e}\,.$$

Primenom D'ALEMBERTovog kriterijuma zaključujemo da red konvergira za $x < e$ i da divergira za $x > e$. Za $x = e$ D'ALEMBERTov kriterijum je neodlučiv. Međutim, ♣ kako je niz $(1+1/n)^n$ monotono rastući (zadatak 242), svi članovi niza a_{n+1}/a_n su veći od 1 za $x = e$ i prema uopštenom D'ALEMBERTovom kriterijumu red divergira i u ovom slučaju.

925. Ispitati da li red $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$. konvergira.

Rešenje. U ovom slučaju je jednostavnije primeniti CAUCHYjev kriterijum nego D'ALEMBERTov:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

i prema tome, red konvergira.

926. Za koje $a \in \mathbf{R}$ red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}$ konvergira?

Rešenje. Neka je a_n n-ti član datog reda. Kako je

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^2} = \lim \left(1 - \sin^2 \frac{a}{n}\right)^{n^2/2}$$

$$= \lim \left(1 - \sin^2 \frac{a}{n}\right)^{\frac{\sin^2(a/n)\cdot(n^2/2)}{\sin^2(a/n)}} = e^{-a^2/2}\,,$$

po CAUCHYjevom kriterijumu red konvergira za svako $a \neq 0$. Za $a = 0$ neposredno dobijamo da red divergira.

927. Dokazati: Ako je $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = L$, tada pozitivan red $\sum a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

Rešenje. Neka je $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = L$. Za svako $\varepsilon > 0$ skoro svi članovi niza $\sqrt[n]{a_n}$ su manji od $L + \varepsilon$ (zadatak 272 na strani 99).

Neka je $L < 1$. Ako izaberemo $\varepsilon > 0$ tako da je $q = L + \varepsilon < 1$, tada su skoro svi članovi niza manji od q, tj. $a_n \leq q^n$, pa kako je red $\sum q^n$ konvergentan, primenom poredbenog kriterijuma I zaključujemo da je i red $\sum a_n$ konvergentan.

Neka je $L > 1$. Neka je $\sqrt[n_k]{a_{n_k}}$ podniz za koji je $\lim\limits_{k \to +\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = L$. Ako izaberemo ε tako da je $q = L - \varepsilon > 1$, tada za skoro svako k imamo da je $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q$, tj. $a_{n_k} > q^{n_k} > 1$, iz čega zaključujemo da opšti član reda ne teži nuli i da je red divergentan.

928. Ispitati konvergenciju reda $\sum a_n$, gde je $a_n = \dfrac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$.

Rešenje. Kako je

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3 (\sqrt{2} + (-1)^n)}{3},$$

granična vrednost $\lim \sqrt[n]{a_n}$ ne postoji. Međutim, red je konvergentan na osnovu zadatka 927, jer je

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^3 (\sqrt{2} + 1)}{3} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3}.$$

929. Neka je dat red $\sum a_n$, za koji postoji $\lim(a_{n+1}/a_n)$. Dokazati da su tada D'ALEMBERTov i CAUCHYjev kriterijum ekvivalentni (tj. ili su oba neodlučiva ili oba daju isti rezultat).

Pokazati na primeru da postoji slučaj kada se D'ALEMBERTov kriterijum ne može primeniti, dok CAUCHYjev kriterijum daje rezultat.

Rešenje. Na osnovu zadatka 234 na strani 79, ako postoji $\lim(a_{n+1}/a_n)$, tada postoji i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ i ove dve granične vrednosti su jednake. Iz ovoga proizilazi ekvivalentnost D'ALEMBERTovog i CAUCHYjevog kriterijuma.

Jedini slučaj kada ova dva kriterijuma nisu ekvivalentna jeste slučaj kada ne postoji $\lim a_{n+1}/a_n$, a postoji $\lim \sqrt[n]{n}$. Na primer, ako je opšti član reda dat sa

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2^{n-1}}{3^n}, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ \dfrac{2^n}{3^n}, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

imamo da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{4}{3}, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ \frac{1}{3}, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

Kako ne postoji $\lim(a_{n+1}/a_n)$, D'ALEMBERTov kriterijum se ne može primeniti. Ovaj kriterijum se ne može primeniti ni u uopštenom obliku, jer za članove niza a_{n+1}/a_n ne važi da su skoro svi manji od $q < 1$ ni da su skoro svi veći od 1.

S druge strane, nije teško videti da je

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1,$$

tako da prema CAUCHYjevom kriterijumu red konvergira.

Primedba. Ovo je ujedno i primer koji pokazuje da tvrđenje analogno zadatku 927 ne važi za D'ALEMBERTov kriterijum za deo kojim se utvrđuje divergencija. Videti i zadatak 268.

930. Ispitati konvergenciju reda čiji je opšti član:

a) $a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$ [Divergira, $a_n \not\to 0$]

b) $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{(n+1/2)}}$ [Konvergira, poredbeni krit.]

c) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ [Konvergira, CAUCHYjev krit.]

d) $a_n = \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\log n}$ [Konvergira, uopšteni CAUCHYjev krit.]

931. U zavisnosti od realnih parametara p i q ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}.$$

Rešenje. Ako je p ceo negativan broj ili nula, tada su skoro svi članovi reda jednaki nuli i red je konvergentan. Pretpostavimo sada da je $p \neq 0, -1, -2, \ldots$. Neka je a_n opšti član datog reda. Tada je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+1)^q}{n^q(p+n)},$$

i kako je granična vrednost ovog količnika jednaka 1, D'ALEMBERTov kriterijum je neodlučiv. Na osnovu zadatka 929, i CAUCHYjev kriterijum je neodlučiv. Primenićemo GAUSSov kriterijum. Za to je potrebno da dobijemo razvoj oblika

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O(1/n^{1+\epsilon}), \tag{1}$$

pri čemu unapred znamo da je $\lambda = 1$, jer je $\lim(a_n/a_{n+1}) = 1$. Parametre μ i ε nalazimo primenom MACLAURINovog razvoja:

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{p+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^q = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{p}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{p}{n}+O(1/n^2)\right)\left(1+\frac{q}{n}+O(1/n^2)\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{p}{n}\right)\left(1+\frac{q}{n}\right)+O(1/n^2) \\ &= 1+\frac{1-p+q}{n}+O(1/n^2), \qquad (2)\end{aligned}$$

gde smo koristili binomni razvoj

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+O(1/t^2), \quad (t\to 0).$$

Poređenjem (2) sa (1) nalazimo da je

$$\lambda = 1, \quad \mu = 1-p+q, \quad \varepsilon = 1.$$

Prema GAUSSovom kriterijumu, red konvergira kada je $\mu > 1$ i divergira kada je $\mu \le 1$. Odavde zaključujemo da je dati red konvergentan ako i samo ako je $p < q$.

932. Ispitati za koje $p \in \mathbf{R}$ konvergira red $\sum a_n$, gde je $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

Rešenje. Imamo da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}.$$

Kada $n \to +\infty$ ovaj količnik teži jedinici, tako da su D'ALEMBERTov i CAUCHYjev kriterijum neodlučivi. Primenom MACLAURINovog razvoja $\log(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$, nalazimo da je

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) &= (n+p)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 = (n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(1/n^3)\right)-1 \\ &= \frac{p-1/2}{n}+O(1/n^2) \qquad (n\to+\infty).\end{aligned}$$

Dalje je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \exp\left(\frac{p-1/2}{n}+O(1/n^2)\right) = 1+\frac{p-1/2}{n}+O(1/n^2), \qquad (1)$$

gde smo koristili razvoj $e^t = 1+t+O(t^2)$. Primenom GAUSSovog kriterijuma, iz (1) nalazimo da je dati red konvergentan za $p-1/2 > 1$, tj. za $p > 3/2$, dok je za $p \le 3/2$ red divergentan.

933. Ispitati konvergenciju reda $\sum a_n$, gde je

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}.$$

Rešenje. Direktnim izračunavanjem i sređivanjem dobijamo da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}}. \tag{1}$$

Izraz na desnoj strani u (1) ne može se razviti u oblik pogodan za primenu GAUSSovog kriterijuma (zašto?).

Primenom RAABEovog kriterijuma zaključujemo da je dati red konvergentan, jer je

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty.$$

934. Neka je $\sum a_n$ pozitivan red. Dokazati sledeća tvrđenja:

Ako za skoro svako $n \in \mathbf{N}$ važi da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{\mu}{n},$$

za neko $\mu > 1$, tada je $\sum a_n < +\infty$.

Ako je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{\mu}{n},$$

za neko $\mu \leq 1$, tada je $\sum a_n = +\infty$.

Rešenje. U prvom slučaju imamo da je

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \mu > 1,$$

odakle zaključujemo, primenom RAABEovog kriterijuma, da je dati red konvergentan.

U drugom slučaju, ako je $\mu < 1$, primenom RAABEovog kriterijuma nalazimo da je red divergentan, jer je

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq \mu < 1.$$

Ako je $\mu = 1$, tada iz

$$\lim(\log n)\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \leq \lim(\log n)\cdot 0 = 0,$$

pa je red divergentan prema BERTRANDovom kriterijumu.

935. Ispitati za koje $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$ konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n .$$

Rezultat. Za $x < 1$ red konvergira, za $x > 1$ divergira. Ako je $x = 1$, tada red konvergira za $\gamma - \alpha - \beta > 0$ i divergira za $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$. (GAUSSov kriterijum.)

936. Polazeći od KUMMERovog kriterijuma, izvesti RAABEov i BERTRANDov kriterijum.

Uputstvo. Za divergentan red $\sum 1/b_n$ koji se pominje u formulaciji KUMMERovog kriterijuma, uzeti red sa $b_n = n$ i $b_n = n \log n$ respektivno.

937. Polazeći od KUMMERovog kriterijuma (sa određenim b_n), izvesti kriterijum konvergencije koji je različit od poznatih konkretnih kriterijuma.

938. Ispitati konvergenciju redova čiji je n-ti član dat:

a) $a_n = ne^{-n^2}$ [Konvergira, integralni krit.]

b) $a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$, $p > 0$ [Konvergira za $p > 2$, GAUSSov krit.]

c) $a_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$ [Konvergira za $p > 1$, integralni krit.]

d) $a_n = \frac{1}{n(\log n)^p(\log(\log n))^q}$ [Konvergira za $p > 1, q \in \mathbf{R}$ ili $p = 1, q > 1$]

e) $\frac{\log 2 \cdot \log 3 \cdots \log(n+1)}{\log(2+p) \cdot \log(3+p) \cdots \log(n+1+p)}$, $p > 0$ [Divergira]

f) $\frac{1}{\log(n!)}$ [Divergira]

g) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ [Konvergira, RAABEov krit.]

h) $\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ [Divergira, RAABEov krit.]

5.1.3 Brojni redovi sa članovima proizvoljnog znaka

- **Alternativni redovi.** *Red čiji je svaki drugi član drugačijeg znaka, tj. red oblika*

$$\sum(-1)^{n-1}a_n\,, \qquad (a_n > 0)$$

nazivamo alternativnim redom.[1]

✓ **Leibnizov kriterijum.** *Neka je* $a_n > 0$ *monotono opadajući niz i neka je* $\lim a_n = 0$. *Tada*

red $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *konvergira,*

$|r_m| = \left|\sum_{n=m+1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\right| < a_{m+1}$ *(ostatak je po apsolutnoj vrednosti manji od prvog izostavljenog člana),*

$\operatorname{sgn} r_m = (-1)^m$ *(znak ostatka je jednak znaku prvog izostavljenog člana).* □

Dajemo sada dva dovoljna uslova za konvergenciju redova oblika

$$\sum a_n b_n\,, \qquad a_n, b_n \in \mathbf{R}\,,$$

gde a_n *i* b_n *mogu da budu proizvoljnog znaka.*

✓ **Abelov kriterijum.** *Ako je*

(i) niz a_n *monoton i ograničen i*

(ii) red $\sum b_n$ *konvergentan,*

tada red $\sum a_n b_n$ *konvergira.*

✓ **Dirichletov kriterijum.** *Ako su ispunjeni uslovi:*

(i) Niz a_n *monotono teži nuli i*

(ii) niz $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *je ograničen,*

tada red $\sum a_n b_n$ *konvergira.*

Nijedan od tri navedena kriterijuma nije potreban za konvergenciju.

939. Ispitati da li konvergiraju redovi:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, b) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\log^s n}$, $(s>0)$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$, $(x\in\mathbf{R})$

[1] Obično se, kao opšti oblik, uzima $(-1)^{n-1}$ a ne $(-1)^n$, da bi prvi član (za $n=1$) bio pozitivan. Naravno, redovi čiji je opšti član oblika $(-1)^n a_n$ ili $(-1)^{n+p}a_n$ se takođe nazivaju alternativnim.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n ne^{-n/7}$.

Rešenje. Red a) ima opšti član $(-1)^{n-1}a_n$, gde je $a_n = 1/n$ pozitivan, monotono opadajući nula niz. Po LEIBNIZovom kriterijumu, red konvergira. Na isti način nalazimo da konvergira i red b), jer je funkcija $x \mapsto x\log^s x$ monotono rastuća za svako $s > 0$.

Red c) konvergira za $x = 0$. Ako je $x \neq 0$, opšti član reda je oblika $(-1)^n a_n$, gde je $a_n = \sin\frac{x}{n}$. Za fiksirano x i za dovoljno veliko n, a_n ima isti znak kao x; pored toga, za $|x/n| < \pi/2$, niz $|a_n|$ je monotono opadajući i nula niz. Prema tome, za $x > 0$ red $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$, za neko n_0 ispunjava uslove LEIBNIZovog kriterijuma, pa je konvergentan, a time je i dati red konvergentan. Za $x < 0$, prema LEIBNIZovom kriterijumu zaključujemo da je red $-\sum(-1)^n a_n$ konvergentan, a time je i dati red konvergentan.

Članovi reda d) su oblika $(-1)^n a_n$, gde je $a_n = ne^{-n/7}$. Kako je funkcija $x \mapsto xe^{-x/7}$ monotono opadajuća za $x > 7$, zaključujemo da je niz $a_n, n = 7, 8, \ldots$ monoton nula niz, pa je red konvergentan.

940. Koliko članova reda $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ treba sabrati da bi se suma izračunala sa greškom manjom od 10^{-4} ?

Rešenje. Kako su za dati red ispunjeni uslovi LEIBNIZovog kriterijuma, za ostatak posle n-tog člana važi nejednakost

$$|r_n| \leq a_{n+1}.$$

Greška (tj. ostatak) će biti manja od 10^{-4} ako izaberemo takvo n za koje je $a_{n+1} < 10^{-4}$, odakle se dobija da je $n \geq 100$. Prema tome, parcijalna suma S_{100} će se razlikovati od tačne sume reda za manje od 10^{-4}.

941. Konstruisati primer divergentnog reda $\sum(-1)^{n-1}b_n$ sa $b_n > 0$ i $\lim b_n = 0$.

Rezultat. Neka je $b_{2k-1} = 2/k$ i $b_{2k} = 1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Red je divergentan jer je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Primedba. Ovaj primer pokazuje da u LEIBNIZovom kriterijumu ne može biti izostavljen uslov da opšti član **monotono** teži nuli.

942. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Rešenje. Imamo da je

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \cdot \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$$
$$= (-1)^n \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Red $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ je konvergentan prema LEIBNIZovom kriterijumu, dok je red $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$ divergentan. Dakle, dati red je divergentan (videti zadatak 906).

943. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^p}{n} \sin\frac{n\pi}{4}$, gde je $p \in \mathbf{R}$.

Rešenje. Primenimo DIRICHLETov kriterijum. Neka je

$$a_n = \frac{(\log n)^p}{n}, \quad b_n = \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Ako je $p \leq 0$, niz a_n je monotono opadajući za $n \geq 1$; ako je $p > 0$, tada se ispitivanjem funkcije $x \mapsto (\log^p x)/x$ nalazi da je niz opadajući za dovoljno veliko n.

Neka je $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Kako je (zadatak 100)

$$|B_n| = \frac{|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi|}{\sin\frac{\pi}{8}} < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

niz B_n je ograničen.

Kako su ispunjeni dovoljni uslovi DIRICHLETovog kriterijuma, zaključujemo da je dati red konvergentan za svako $p \in \mathbf{R}$.

Primetimo da u ovom slučaju nismo mogli da primenimo ABELov kriterijum, jer ni jedan od redova $\sum a_n$, $\sum b_n$ nije konvergentan.

944. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Rešenje. U ovom slučaju ne možemo da primenimo LEIBNIZov kriterijum, jer niz $a_n = (\sin^2 n)/n$ nije monotono opadajući i svi njegovi članovi nisu istog znaka.

Neka je $b_n = (-1)^n/n$ i $c_n = (-1)^n(\cos 2n)/n$. Tada je $a_n = (b_n - c_n)/2$. Red $\sum b_n$ je konvergentan prema LEIBNIZovom kriterijumu. Pokažimo da je i red $\sum c_n$ konvergentan. Primenićemo DIRICHLETov kriterijum. Imamo da je

$$c_n = u_n v_n\,, \qquad u_n = \frac{1}{n}\,, \quad v_n = (-1)^n \frac{\cos 2n}{n}\,.$$

Niz u_n monotono teži nuli, dok je niz parcijalnih suma

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\cos 2k}{k} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \left(-e^{2i}\right)^k = \operatorname{Re} \left(-e^{2i} \frac{1-(-1)^n e^{2in}}{1+e^{2i}}\right),$$

odakle nalazimo da je

$$|V_n| \le \left| -e^{2i} \frac{1-(-1)^n e^{2in}}{1+e^{2i}} \right| \le \frac{2}{\sqrt{(1+\cos 2)^2 + \sin^2 2}}\,,$$

pa je niz V_n ograničen. Na osnovu DIRICHLETovog kriterijuma, red $c_n = \sum u_n v_n$ je konvergentan.

Kako su redovi $\sum b_n$ i $\sum c_n$ konvergentni, konvergentan je i red $\sum a_n = \left(\sum b_n - \sum c_n\right)/2$.

945. Da li red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$ konvergira?

Rezultat. Konvergira. Primeniti DIRICHLETov kriterijum.

946. Ispitati da li konvergira red $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\log^2 n}$.

Rešenje. Kako je

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\pi \frac{n^2}{n+1} - n\pi\right) = (-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi}{n+1}\,,$$

red je oblika $\sum a_n b_n$, gde je

$$a_n = \cos \frac{n\pi}{n+1}\,, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\log^2 n}\,.$$

Niz a_n je ograničen i monoton za dovoljno veliko n. Red $\sum b_n$ konvergira prema LEIBNIZovom kriterijumu. Prema tome, primenom ABELovog kriterijuma, nalazimo da je dati red konvergentan.

947. Ako je $\{a_n\}$ pozitivan niz takav da, kad $n \to +\infty$ važi

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o(1/n), \quad , \tag{1}$$

dokazati da je red $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ konvergentan za $p > 0$ i divergentan za $p < 0$.

Rešenje. Ako je $p > 0$, iz (1) sleduje da je, za dovoljno veliko n, $a_n/a_{n+1} > 1$, tj. niz $\{a_n\}$ je monotono opadajući. U zadatku 1231 dokazano je da je $\lim a_n = 0$. Prema tome, po LEIBNIZovom kriterijumu, red $(-1)^n \sum a_n$ je konvergentan.

Ako je $p < 0$, tada je niz $\{a_n\}$ monotono rastući niz, pa kako je pozitivan, on ne teži nuli i red $\sum(-1)^n a_n$ je divergentan.

948. Ispitati konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+907}$, **b)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, **c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2}}$, **d)** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\log n}$.

Rezultat. Redovi pod a) i d) konvergiraju; redovi pod b) i c) divergiraju.

5.1.4 Apsolutna konvergencija

√ *Ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan, tada je konvergentan i red $\sum a_n$. Obrnuto ne važi. (Za realne redove $|a_n|$ je apsolutna vrednost, dok je za kompleksne redove to modul kompleksnog broja.)*

Konvergentni redovi se dele na dve kategorije: apsolutno i uslovno konvergentni.

- *Za red $\sum a_n$ kažemo da je* **apsolutno konvergentan red** *ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan.*
- **Uslovno konvergentan red** *je red $\sum a_n$ koji je konvergentan, ali je red $\sum |a_n|$ divergentan.*

√ *Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan, njegova suma ostaje ista pri proizvoljnoj permutaciji članova. Preciznije, ako je $s : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ proizvoljno bijektivno preslikavanje, tada je*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{s(n)}.$$

√ *Ako je red $\sum a_n$ uslovno konvergentan, tada za svaki dati broj $B \in \mathbf{R}$ postoji jedna bijekcija $s : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ tako da je*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{s(n)} = B.$$

Ova osobina znači da ako je red konvergentan (ali ne apsolutno) i ako je njegova suma jednaka A, tada njegove članove možemo permutovati tako da i dalje ostaju svi u sumi, ali da suma bude jednaka B, za proizvoljan realan broj B. Prema tome, kod uslovno konvergentnih redova poredak igra značajnu ulogu: red se ne može shvatiti samo kao običan zbir svojih članova.

√ *Redovi se mogu množiti, po sledećem pravilu: Ako su redovi* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *konvergentni, pri čemu je bar jedan od njih apsolutno konvergentan, tada je*

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\,, \text{ gde je } c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\,.$$

949. Dokazati da je svaki apsolutno konvergentan red konvergentan.

Rešenje. Pretpostavimo da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergentan. Po definiciji, to znači da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergentan. Primenom CAUCHYjevog kriterijuma, nalazimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da za svako $n \geq n_0$ i za svako $k \in \mathbb{N}$ važi da je

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon\,.$$

Iz nejednakosti trougla tada imamo da je

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon\,,$$

odakle, ponovo primenjujući CAUCHYjev kriterijum, zaključujemo da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

950. Dokazati da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ uslovno konvergentan i da je suma ovog reda pozitivna.[1]

Rešenje. Dati red je konvergentan prema LEIBNIZovom kriterijumu, ali je red sastavljen od apsolutnih vrednosti članova datog reda divergentan (harmonijski red). Prema tome, red je uslovno konvergentan. Njegova suma S je pozitivna, jer je

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots > 0\,.$$

[1] U zadatku 1009 biće pokazano da je suma ovog reda jednaka log 2.

951. Pokazati da redovi

$$(A)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \quad \text{i} \quad (B)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{4k}\right)$$

sadrže iste sabirke, ali su im sume različite. Objasniti.

Rešenje. Svaki prirodan broj n je ili neparan ($n = 2k-1$ za neko $k \in \mathbb{N}$) ili paran i deljiv sa 4 ($n = 4k$) ili paran, ali nije deljiv sa 4 ($n = 2(2k-1)$). Odavde, uzevši u obzir i znak, zaključujemo da redovi (A) i (B) imaju iste sabirke.

Neka je suma reda (A) jednaka S. Tada je suma reda (B), ako postoji, jednaka

$$S' = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

Grupisanjem članova ove sume (uslovi iz zadatka 902 su ispunjeni), nalazimo

$$\begin{aligned} S' &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{1}{2}S. \end{aligned}$$

Dakle, iako oba reda imaju iste sabirke, njihove sume su S i $S/2$, respektivno. Ovo je moguće jer red (A) nije apsolutno konvergentan.

Primedba. Ako se u redu (B) izračuna izraz u zagradi, dobija se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k(2k-1)}$, a ovo je konvergentan red sa pozitivnim članovima.

952. Dokazati da je red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

konvergentan. Zatim permutovati članove reda tako da se dobije divergentan red.

Rešenje. Dati red konvergira po LEIBNIZovom kriterijumu.

Posmatrajmo red

$$(1)\qquad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2k}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}+\frac{1}{\sqrt{4k+1}}\right)=1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,.$$

Ovaj red sadrži sve članove datog reda, jer se svaki prirodni broj n može napisati u jednom od oblika $2k, 4k-1, 4k+1$[1].

[1] Videti zadatak 41 na strani 12.

Kako je, za svako $k \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4k}}, \quad \frac{1}{\sqrt{4k-1}} > \frac{1}{\sqrt{4k}},$$

i za dovoljno veliko k

$$\frac{1}{\sqrt{4k+1}} > \frac{1}{2\sqrt{4k}},$$

imamo da je, za dovoljno veliko k,

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} + \frac{1}{\sqrt{4k+1}} \\ &> (-\sqrt{2}+1+1/2)\frac{1}{\sqrt{4k}} = \frac{3/2-\sqrt{2}}{\sqrt{4k}} = b_k . \end{aligned} \tag{2}$$

Kako je red $\sum b_k$ divergentan (zadatak 915), i kako je $c_k > 0$, iz (2) zaključujemo da je i red (1) divergentan (poredbeni kriterijum).

953. U zavisnosti od $p \in \mathbf{R}$, ispitati uslovnu i apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}.$$

Rešenje. Ako je $p \leq 0$, red divergira jer opšti član ne teži nuli. Za $p > 0$, primenom MACLAURINove formule nalazimo da je

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} &= \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+p\frac{(-1)^{n+1}}{n}+o(1/n)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o(1/n^{p+1}), \quad (n \to +\infty). \end{aligned}$$

Za $p > 0$ red $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ konvergira prema LEIBNIZovom kriterijumu, dok red $\sum \frac{p}{n^{p+1}} + o(1/n^{p+1})$ konvergira na osnovu poredbenog kriterijuma. Prema tome, dati red konvergira za $p > 0$.

Ispitajmo apsolutnu konvergenciju datog reda. Kako je

$$\frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \sim \frac{1}{n^p}, \quad (n \to +\infty),$$

iz uporednog kriterijuma sleduje da red apsolutnih vrednosti konvergira za $p > 1$ i divergira za $p \leq 1$.

Dakle, dati red apsolutno konvergira za $p > 1$, uslovno konvergira za $0 < p \leq 1$ i divergira za $p \leq 0$.

954. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right), \quad p>0.$$

Rešenje. Primenom MACLAURINovog razvoja dobijamo

$$\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o(1/n^{2p}), \quad (n\to+\infty).$$

Red $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ konvergira za $p>0$; red $\sum \frac{1}{2n^{2p}}+o(1/n^{2p})$ konvergira za $p>1/2$ i divergira za $p\le 1/2$. Stoga dati red konvergira za $p>1/2$ i divergira za $p\le 1/2$.

Kako je

$$\left|\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right|=\frac{1}{n^p}+O(1/n^{p+1}),$$

red je apsolutno konvergentan za $p>1$. Dakle, za $1/2<p\le 1$, red je uslovno konvergentan.

955. Ispitati uslovnu i apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p.$$

Rezultat. Neka je

$$a_n=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p.$$

Razvojem po MACLAURINovoj formuli, nalazimo da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{2n}+o(1/n), \quad (n\to+\infty). \tag{1}$$

Primenom GAUSSovog kriterijuma, nalazimo da red $\sum a_n$ konvergira za $p>2$, dakle, dati red apsolutno konvergira za $p>2$.

Ako je $p\le 0$, opšti član ne teži nuli, pa red divergira.

Za $0<p\le 2$, iz (1) nalazimo, kao u zadatku 947, da je dati red uslovno konvergentan.

956. Ako red $\sum b_n$ konvergira i ako je

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=1,$$

da li i red $\sum a_n$ mora da konvergira?

Rešenje. Ne mora, ako a_n i b_n nisu pozitivni. Na primer, ako je

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

tada je red $\sum a_n$ konvergentan, red $\sum b_n$ je divergentan, ali je $\lim a_n/b_n = 1$.

957. Ispitati uslovnu i apsolutnu konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{n^2}{2^n}$,

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\log n}$, d) $\sum_{n=10}^{+\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$

Rezultat. Redovi pod a),c) i d) su uslovno konvergentni. Red pod b) je apsolutno konvergentan.

958. Ispitati uslovnu i apsolutnu konvergenciju redova ($x, p, a \in \mathbf{R}$):

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ [Uslovno konv. za $x \neq -1, -2, \ldots$]

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n-1})^p}$ [Apsolutno konv. za $p > 2$, uslovno za $1 < p \leq 2$]

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$

[Apsolutno konv. za $q > p+1$, uslovno za $p < q \leq p+1$]

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$, $(0 < x < \pi)$ [Apsolutno konv. za $p > 1$, uslovno za $0 < p \leq 1$]

e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{a}{n}$ [Apsolutno konv. za $a \geq 0$, uslovno za $-1 < a < 0$]

►► 8.4.1, ►► 8.4.2, ►► 8.4.3, ►► 8.7.3

Dokazati da je

$$\sum_{k=-123456788}^{123456789}\frac{k}{370370367} = \frac{1}{3}.$$

5.2 Funkcionalni redovi

5.2.1 Uniformna konvergencija nizova funkcija

Neka je $\{f_n\}$ *niz funkcija koje su definisane na skupu* A, *pri čemu je*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{za svako } x \in A,$$

gde je f *funkcija definisana na skupu* A.

- *Kažemo da niz funkcija* $\{f_n\}$ **uniformno konvergira** *ka funkciji* f *na skupu* A *(ili da je niz* f_n *uniformno konvergentan na skupu* A*) ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in A) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Uočiti da se ovde zahteva da n_0 *bude isto za svako* $x \in A$, *dok kod obične konvergencije* n_0 *može da zavisi od* x.

√ **Cauchyjev kriterijum uniformne konvergencije.** *Niz* $\{f_n\}$ *konvergira uniformno ka funkciji* f *na skupu* A *ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall k \in \mathbf{N})(\forall x \in A) \quad |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon .$$

Navodimo sada nekoliko osobina uniformno konvergentnih nizova funkcija.

√ *Neka je* f_n *niz funkcija koji uniformno konvergira na skupu* A. *Ako za svako* $n \in \mathbf{N}$ *postoji* $\lim_{x\to a} f_n(x)$, *gde je* a *tačka nagomilavanja skupa* A, *tada je*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x),$$

tj. granične vrednosti mogu da zamene mesta.

√ *Ako je* f_n *niz neprekidnih funkcija na skupu* A *koji uniformno konvergira na tom skupu ka funkciji* f, *tada je i* f *neprekidna funkcija.*

√ *Ako su sve funkcije* f_n *diferencijabilne na intervalu* (a, b), *ako niz funkcija* f_n' *uniformno konvergira ka nekoj funkciji na* (a, b) *i ako niz* f_n *konvergira bar u jednoj tački* $x \in (a, b)$, *tada niz* f_n *uniformno konvergira na* (a, b) *i važi*

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

√ *Ako je niz funkcija* f_n *uniformno konvergentan na* $[a, b]$ *i ako su funkcije* f_n *integrabilne na* $[a, b]$, *tada je*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x .$$

959. Dokazati da je niz funkcija definisanih sa

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

uniformno konvergentan na $[0,1]$.

Rešenje. Ako, za fiksirano x, nađemo graničnu vrednost niza $f_n(x)$, dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Prema tome, niz $f_n(x)$ konvergira ka funkciji $f(x) \equiv 0$ u svakoj tački segmenta $[0,1]$. Dokažimo da je ova konvergencija uniformna.

Iz nejednakosti

$$0 \le f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n}$$

nalazimo da za svako $n > 1/(2\varepsilon)$ važi nejednakost $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| < \varepsilon$ za svako $x \in [0,1]$ (u stvari, i za svako $x \ge 0$). Dakle, konvergencija je uniformna.

960. Ispitati da li je niz funkcija definisanih sa

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

uniformno konvergentan na $[0,1]$.

Rešenje. Kao i u prethodnom zadatku, ovde je $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ za svako $x \in [0,1]$. Pokazaćemo da dati niz funkcija ne konvergira uniformno ka funkciji $f(x) \equiv 0$. U tom cilju, primetimo da je, za svako $n \in \mathbf{N}$, $f_n(1/n) = 1/2$. Prema tome, za $\varepsilon < 1/2$ ne postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $|f_n(x)| < \varepsilon$ za svako $x \in [0,1]$. Stoga dati niz nije uniformno konvergentan.

961. Dokazati da niz funkcija $f_n(x)$ uniformno konvergira ka funkciji $f(x)$ na skupu A:

a) Ako i samo ako je

(1) $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

b) Ako i samo ako postoji nula niz $\{c_n\}$ koji ne zavisi od $x \in A$, takav da je $|f_n(x) - f(x)| \le c_n$ za svako $x \in A$ i za skoro svako $n \in \mathbf{N}$.

Rezultat. a) Neka niz funkcija $\{f_n\}$ uniformno konvergira ka funkciji f na skupu A. Tada za fiksirano $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za $n \ge n_0$ važi

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{za svako } x \in A$$

i zaključujemo da je, za $n \ge n_0$,

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$

iz čega sleduje (1). Obrnuto tvrđenje se slično dokazuje.

b) Neka postoji nula niz $\{c_n\}$ sa navedenim osobinama. Tada je, za dovoljno veliko n,

$$\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\le c_n\,,$$

pa važi (1). Na osnovu dokazanog pod a), niz $\{f_n\}$ je uniformno konvergentan na skupu A. Obrnuto, ako je niz uniformno konvergentan na skupu A, stavimo $c_n=\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|$. Ponovo na osnovu a), niz c_n je nula niz, a po definiciji supremuma imamo da je $|f_n(x)-f(x)|\le c_n$ za svako $x\in A$ i za svako $n\in\mathbf{N}$.

962. Da li je niz $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$ uniformno konvergentan na $(-\infty,+\infty)$?

Rešenje. Za svako $x\in\mathbf{R}$ imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=|x|$. Dalje je

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)}=\frac{1}{n}\,.$$

Odavde nalazimo da je

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)-|x||=0\,,$$

pa je, na osnovu zadatka 961, dati niz funkcija uniformno konvergentan na $\mathbf{R}$.

963. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{n\,dx}{x^3+n}$.

Rešenje. Imamo da je, za svako fiksirano x,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x^3+n}=1\,.$$

Ispitajmo da li je ova konvergencija uniformna na $[0,1]$. Iz

$$0\le 1-\frac{n}{x^3+n}=\frac{x^3}{x^3+n}\le\frac{1}{n}\quad(0\le x\le 1)\,,$$

zaključujemo da je niz podintegralnih funkcija uniformno konvergentan. Prema tome, integral i granična vrednost mogu da zamene mesta, iz čega sleduje da je

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{n\,dx}{x^3+n}=\int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x^3+n}\right)dx=1\,.$$

964. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_1^2 \sin\frac{1}{nx}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. Za fiksirano $x\in[1,2]$ niz $n\sin(1/nx)$ konvergira ka $1/x$. Prema tome, ako pokažemo da integral i granična vrednost mogu da zamene mesta, imaćemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^2 \sin\frac{1}{nx}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log 2. \tag{1}$$

Dokažimo da je niz funkcija $f_n(x) = n\sin(1/nx)$ uniformno konvergentan. Kako je $(t-\sin t)' = 1-\cos t > 0$, funkcija $t\mapsto t-\sin t$ je monotono neopadajuća, tj. funkcija $x\mapsto g(x) = 1/nx - \sin(1/nx)$ je monotono nerastuća po x. Odavde nalazimo da funkcija $g(x)$ dostiže svoj maksimum na $[1,2]$ u tački $x=1$, pa je, za svako n,

$$0\le \frac{1}{nx}-\sin\frac{1}{nx} \le \frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n},\quad x\in[1,2].$$

Množenjem sa n dobijamo

$$0\le \frac{1}{x}-n\sin\frac{1}{nx} \le 1-n\sin\frac{1}{n}. \tag{2}$$

Kako niz sa desne strane u (2) konvergira ka nuli i ne zavisi od $x\in[1,2]$, zaključujemo da je niz f_n uniformno konvergentan na $[0,1]$ i da važi jednakost (1).

965. Dokazati: Ako je niz funkcija f_n uniformno konvergentan na $[a,b]$, tada je ovaj niz uniformno konvergentan na svakom zatvorenom intervalu koji se sadrži u $[a,b]$.

966. Da li važi tvrđenje obrnuto tvrđenju prethodnog zadatka, tj. ako je niz funkcija f_n uniformno konvergentan na svakom zatvorenom intervalu koji se sadrži u $[a,b]$, da li se tada može zaključiti da je ovaj niz uniformno konvergentan i na $[a,b]$? Da li se može zaključiti da je niz uniformno konvergentan na (a,b)?

Rešenje. Iz uniformne konvergencije niza funkcija na svakom zatvorenom intervalu koji se sadrži u $[a,b]$ ne može se izvesti zaključak o uniformnoj konvergenciji na $[a,b]$. Posmatrajmo, na primer, niz funkcija

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

U zadatku 960 pokazano je da ovaj niz nije uniformno konvergentan na $[0,1]$. Međutim, niz jeste uniformno konvergentan (ka funkciji $f(x)\equiv 0$) na svakom intervalu $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$, jer za $x\in[\alpha,\beta]$ imamo

$$|f_n(x)-f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \le \frac{n\beta}{1+n^2\alpha^2} \le \frac{n\beta}{n^2\alpha^2} = \frac{\beta}{n\alpha^2}.$$

Isti primer pokazuje da se ne može zaključiti ni da je niz uniformno konvergentan na (a,b).

967. Ako niz funkcija uniformno konvergira ka funkciji f na (a,b) i ako je $\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$ i $\lim_{n\to+\infty} f_n(b) = f(b)$ da li se iz toga može zaključiti da je niz uniformno konvergentan i na $[a,b]$?

Rešenje. Može. Naime, iz pretpostavki sleduje da, za dato $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da za svako $n \geq n_0$ i za svako $x \in (a,b)$ važi

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon . \tag{1}$$

U tačkama a i b niz je konvergentan, dakle, postoje n_1 i n_2 tako da za $n \geq n_1$ imamo da je $|f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon$, dok za $n \geq n_2$ važi $|f_n(b) - f(b)| \leq \varepsilon$. Neka je $m = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Tada, za svako $n \geq m$ i za svako $x \in [a,b]$ važi nejednakost (1). Dakle, dati niz je uniformno konvergentan na $[a,b]$.

►► 8.4.4

5.2.2 Uniformna konvergencija redova

Red $\sum u_n(x)$, čiji su članovi funkcije, naziva se **funkcionalni red**. *Za svaku datu vrednost promenljive x, za koju su sve funkcije definisane, dobija se brojni red.*

- *Kažemo da funkcionalni red $\sum u_n(x)$* **uniformno konvergira** *na skupu A, ako njegov niz parcijalnih suma $S_n(x)$ uniformno konvergira na A ka nekoj funkciji $S(x)$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall x \in A)(\forall n \geq n_0) \quad |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon .$$

√ **Weierstrassov kriterijum uniformne konvergencije redova.** *Ako za skoro svako $n \in \mathbf{N}$ i za svako $x \in A$ važi da je $|u_n(x)| \leq c_n$, i ako je brojni red $\sum c_n$ konvergentan, tada je red $\sum u_n(x)$ uniformno konvergentan na skupu A.*

√ **Abelov kriterijum uniformne konvergencije.** *Ako su ispunjeni uslovi:*

(i) Niz $u_n(x)$ je monoton za svako $x \in A$ i **uniformno ograničen** *na A, tj. postoji $M < +\infty$ tako da je $|u_n(x)| \leq M$ za svako $x \in A, n \in \mathbf{N}$,*

(ii) Red $\sum v_n(x)$ uniformno konvergira na A,

tada red $\sum u_n(x)v_n(x)$ uniformno konvergira.

√ **Dirichletov kriterijum uniformne konvergencije.** *Ako su ispunjeni uslovi:*

(i) Za svako $x \in A$, $u_n(x)$ je monoton niz koji uniformno na A konvergira ka nuli,

(ii) Niz $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_n(x)$ je uniformno ograničen na A, tj. $|V_n(x)| \leq M$ za svako $x \in A, n \in \mathbf{N}$ i za neko $M < +\infty$,

tada je red $\sum u_n(x)v_n(x)$ uniformno konvergentan na A.

√ *Ako funkcionalni red* $\sum u_n(x)$ *uniformno konvergira na skupu* A *i ako za svako* $n \in \mathbf{N}$ *postoji konačan* $\lim\limits_{x\to a} u_n(x)$, *gde je* a *tačka nagomilavanja skupa* A *(pri čemu* a *ne mora da pripada skupu* A*), tada je*

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to a} u_n(x)$$

i red sa desne strane je konvergentan.

Ako su funkcije u_n *neprekidne u tački* $a \in A$ *za skoro svako* $n \in \mathbf{N}$, *tada je i suma reda neprekidna funkcija u tački* a.

√ *Neka je* $\sum u_n(x)$ *konvergentan red i neka funkcije* u_n *imaju neprekidne izvode* $u_n'(x)$ *za* $x \in (a,b)$. *Ako je red* $\sum u_n'(x)$ *uniformno konvergentan na* (a,b), *tada se dati red može diferencirati član po član:*

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \qquad x \in (a,b)\,.$$

√ *Uniformno konvergentan funkcionalni red može se integraliti član po član, tj. ako je red* $\sum u_n(x)$ *uniformno konvergentan na* $[a,b]$ *i ako su funkcije* u_n *integrabilne na* $[a,b]$, *tada je*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

i red sa desne strane je konvergentan.

968. Ispitati da li red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ uniformno konvergira na $[0,1]$.

Rešenje. Parcijalna suma datog reda je

$$S_n(x) = 1 - x^{n+1}\,,$$

odakle se dobija suma reda:

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \le x < 1\,, \\ 0, & \text{za } x = 1\,. \end{cases}$$

Kako je $\sup\limits_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = 1$, red ne konvergira uniformno na datom intervalu.

969. Da li je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ uniformno konvergentan na $\mathbf{R}$?

Rešenje. Za svako $x \in \mathbf{R}$ imamo da je $x^2+n^2 \geq n^2$, odakle je

$$0 < \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan. Stoga iz (1) i WEIERSTRASSovog kriterijuma sleduje da je dati red uniformno konvergentan na skupu $\mathbf{R}$.

970. Da li je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ uniformno konvergentan na $\mathbf{R}$?

Rešenje. Funkcija $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ ima ekstremume u tačkama $\pm n^{-5/2}$ i vrednost funkcije u tim tačkama je $\pm 1/(2n^{3/2})$. Prema tome,

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{3/2}}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Kako je red čiji je opšti član $c_n = 1/(2n^{3/2})$ konvergentan, dati red je uniformno konvergentan na $\mathbf{R}$, prema WEIERSTRASSovom kriterijumu.

971. Ispitati da li je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right)$ uniformno konvergentan na $(-1,1)$.

Rešenje. U zadatku 610 dokazana je nejednakost $\log(1+y) < y$, za $y > 0$. Primenom ove nejednakosti, nalazimo da je

$$0 \leq \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right) < \frac{x^2}{n\log^2 n} < \frac{1}{n\log^2 n} \quad (|x|<1).$$

Red čiji je opšti član $1/(n\log^2 n)$ konvergira (integralni kriterijum), pa dati red uniformno konvergira na $(-1,1)$ prema WEIERSTRASSovom kriterijumu.

972. Primenom WEIERSTRASSovog kriterijuma, dokazati da sledeći redovi uniformno konvergiraju:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ na $(-2,+\infty)$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ na $[0,+\infty)$,

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(x^n+x^{-n})}{\sqrt{n!}}$ na $\{x \mid 1/2 \leq |x| \leq 2\}$, d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ na $\mathbf{R}$,

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ na $[0,+\infty)$, f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}$ na $\mathbf{R}$.

973. Da li red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ uniformno konvergira na $(0,+\infty)$?

Rešenje. Niz $u_n(x) = 1/(n+x)$ konvergira ka nuli monotono i uniformno na $(0,+\infty)$, jer je za $x > 0$,

$$\frac{1}{x+n} < \frac{1}{n}.$$

Pored toga, niz

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

je uniformno ograničen, jer je $|V_n| \leq 1$ za svako n (i naravno, za svako x, jer ovaj niz i ne zavisi od x).

Kako su ispunjeni dovoljni uslovi DIRICHLETovog kriterijuma, dati red uniformno konvergira na $(0,+\infty)$.

974. Da li red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konvergira uniformno na segmentima

a) $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, b) $[0, 2\pi]$?

Rešenje. Primetimo najpre da dati red konvergira za svako $x \in [0,2\pi]$, što se može ustanoviti primenom DIRICHLETovog kriterijuma iz 5.1.3. Naime, niz $u_n = 1/n$ monotono teži nuli, dok je niz

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

ograničen za svako fiksirano $x \in (0,2\pi)$, jer je

$$|V_n(x)| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}. \tag{1}$$

Za $x = 0$ i $x = 2\pi$ se neposredno pokazuje da je red konvergentan, jer su svi članovi jednaki nuli.

a) Za primenu DIRICHLETovog kriterijuma uniformne konvergencije, potrebno je još i da niz $V_n(x)$ bude uniformno ograničen. Za $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$, tj. $\varepsilon/2 \leq x \leq \pi - \varepsilon/2$, iz (1) imamo da je

$$|V_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Prema tome, dati red je uniformno konvergentan na $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$.

b) Ako je $x \in [0, 2\pi]$, tada se u (1) ne može naći gornja granica koja ne zavisi od x. Ovo je indikacija da red ne konvergira uniformno (ali to nije dokaz, jer su uslovi DIRICHLETovog kriterijuma samo dovoljni, ali ne i potrebni za uniformnu konvergenciju). Dokazaćemo stoga da red ne konvergira uniformno primenom CAUCHYjevog kriterijuma uniformne konvergencije nizova iz 5.2.1. Neka je $S_n(x)$ parcijalna suma datog reda. Imamo da je

$$|S_{2n}(1/n) - S_n(1/n)| = \frac{\sin(1+1/n)}{n+1} + \frac{\sin(1+2/n)}{n+2} + \cdots + \frac{\sin(1+n/n)}{2n}$$
$$\geq (\sin 1) \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \geq (\sin 1) \cdot \frac{n}{2n} = \frac{\sin 1}{2}.$$

Dakle, niz $S_n(x)$ nije uniformno konvergentan na $[0, 2\pi]$.

975. Dokazati da su sledeći redovi uniformno konvergentni:

a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$ na $[0, 2\pi]$, **b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}$ na $[-10, 10]$,

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n\pi/3}{\sqrt{n^2 + x^2}}$ na $\mathbf{R}$.

976. Dokazati: Ako red $\sum u_n(x)$ uniformno konvergira ka funkciji $S(x)$ za $x \in (a, b)$, i ako su funkcije $x \mapsto u_n(x)$ neprekidne na (a, b), tada je i funkcija S neprekidna na (a, b).

Rešenje. Neka je $x_0 \in (a, b)$ i neka je $S_n(x)$ parcijalna suma datog reda. Dokazaćemo da je funkcija S neprekidna u x_0.

Za svako $x \in [a, b]$ i za svako $n \in \mathbf{N}$, primenom nejednakosti trougla dobijamo

$$|S(x_0) - S(x)| = |S(x_0) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x)|$$
$$\leq |S(x_0) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x)|. \tag{1}$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Iz uniformne konvergencije reda na (a, b) sledi da se n može izabrati tako da je

$$|S(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Kako su funkcije u_n neprekidne, parcijalne sume S_n su takođe neprekidne, kao zbir konačno mnogo neprekidnih funkcija. Za n takvo da važi (2), iz neprekidnosti funkcije S_n u tački x_0 proizilazi da postoji neko $\delta > 0$ tako da za $0 < |x_0 - x| < \delta$ važi

$$|S_n(x_0) - S(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Konačno, iz (1), (2) i (3) zaključujemo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako x za koje je $|x_0 - x| < \delta$ važi $|S(x_0) - S(x)| < \varepsilon$, tj. funkcija S je neprekidna u tački x_0, što je i trebalo dokazati.

977. Ako funkcionalni red čiji su članovi neprekidne funkcije na $[a, b]$ ima za sumu funkciju koja ima prekid na $[a, b]$, dokazati da red ne konvergira uniformno na $[a, b]$.

978. Dokazati da je funkcija

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

definisana i neprekidna za svako $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ i periodična sa periodom 1.

Rešenje. Funkcije $u_n(x) = 1/(n-x)^2$ su neprekidne u svakoj tački skupa $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Neka je x_0 proizvoljan broj iz $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Tada postoji neko $\varepsilon > 0$ tako da interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ takođe pripada skupu $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Kako je, za $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$,

$$0 \le u_n(x) \le \frac{1}{(n-(x_0+\varepsilon))^2} \qquad (n \ge x_0 + \varepsilon),$$

dati red uniformno konvergira na $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ prema WEIERSTRASSovom kriterijumu, i njegova suma je neprekidna funkcija u tački x_0 koja pripada tom intervalu. Kako je x_0 proizvoljna tačka skupa $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, zaključujemo da je funkcija f neprekidna na pomenutom skupu.

Periodičnost sleduje iz

$$f(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-(x+1))^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)-x)^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m-x)^2} = f(x).$$

979. Odrediti oblast definisanosti funkcije f i ispitati njenu neprekidnost, ako je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Rešenje. Red kojim je definisana funkcija f konvergira (na osnovu CAUCHYjevog kriterijuma) ako je

$$\lim_{n \to +\infty} \left|x + \frac{1}{n}\right| < 1.$$

Prema tome, red konvergira za $|x| < 1$. Ako je $|x| > 1$, red divergira. Za $|x| = 1$, opšti član reda ne teži nuli. Dakle, oblast definisanosti date funkcije je $|x| < 1$.

Ispitajmo sada uniformnu konvergenciju reda kojim je definisana funkcija f. Prema WEIERSTRASSovom kriterijumu, red uniformno konvergira na svakom intervalu $[-r, r]$, gde je $0 < r < 1$, jer je, za $x \in [-r, r]$,

$$\left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^n\right| \le \left(r + \frac{1}{n}\right)^n \sim e^{1/r} r^n$$

i red $\sum r^n$ konvergira za $0 < r < 1$.

Kako svaka tačka intervala $(0,1)$ pripada nekom intervalu $[-r,r]$ za $0 < r < 1$, zaključujemo da je data funkcija neprekidna na svom domenu $(-1,1)$.

980. Odrediti oblast definisanosti funkcije f i ispitati njenu neprekidnost, ako je

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2}$ [Definisana i neprekidna na $\mathbf{R}$, ABELov krit.]

b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ [Definisana na $\mathbf{R}$, neprekidna za $x \neq 0$]

981. Odrediti oblast definisanosti i ispitati diferencijabilnost funkcije definisane sa

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$, b) $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$.

Rešenje. a) Svi članovi datog reda su definisani za $x \neq -n, n \in \mathbf{N}$. Za takvo fiksirano x, red konvergira na osnovu LEIBNIZovog kriterijuma. Prema tome, funkcija f je definisana za svako $x \neq -1, -2, \ldots$

Posmatrajmo izvodni red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}.$$

Ovaj red je uniformno konvergentan (DIRICHLETov kriterijum), a funkcije $x \mapsto (-1)^n n/(n+x)^2$ su neprekidne na domenu funkcije f. Prema tome,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$$

i zaključujemo da je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački svog domena.

b) Neka je $|x| \leq K$. Tada je

$$\frac{|x|}{n^2+x^2} \leq \frac{K}{n^2},$$

i, prema WEIERSTRASSovom kriterijumu, red uniformno konvergira na svakom skupu $\{x \mid |x| \leq K\}$. Kako svako $x \in \mathbf{R}$ pripada skupu ovakvog oblika, red konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$ i funkcija g je definisana za svako realno x.

Za $x > 0$ izvodni red je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

i nije teško zaključiti, primenom WEIERSTRASSovog kriterijuma, da izvodni red uniformno konvergira na svakom intervalu $(0,K)$, pa kako su članovi izvodnog

reda neprekidne funkcije, diferenciranje član po član je dozvoljeno i funkcija g je diferencijabilna u svakoj tački $x > 0$. Na isti način se pokazuje da postoji $g'(x)$ za $x < 0$.

U tački $x = 0$, članovi reda kojim je definisana funkcija g nemaju izvod, tako da diferenciranje član po član nema smisla, ali to još ne znači da funkcija g nema izvod u nuli. Potražimo izvod po definiciji:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+h^2}\right) \tag{1}$$

Kako poslednji red uniformno konvergira za $h \in \mathbf{R}$, imamo da je

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+h^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty\,.$$

Prema tome, granična vrednost u (1) ne postoji, i funkcija g nema izvod u nuli.

982. Naći $\lim\limits_{x\to 0_+}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

Rešenje. Dati red uniformno konvergira na $[0,+\infty)$, prema WEIERSTRASSovom kriterijumu, jer je $1/(2^n n^x) < 1/2^n$ i red $\sum 1/2^n$ konvergira. Prema tome,

$$\lim_{x\to 0_+}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1\,.$$

983. Da li važi jednakost

$$\lim_{x\to 1_-}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to 1_-}u_n(x)\,,$$

gde je $u_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $n=1,2,\ldots$?

Rešenje. U zadatku 968 našli smo da sumu reda sa opštim članom $u_n(x)$:

$$S(x)=\begin{cases}1, & \text{za } 0\le x<1,\\ 0, & \text{za } x=1.\end{cases}$$

Odavde je

$$\lim_{x\to 1_-}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\lim_{x\to 1_-}S(x)=1,\quad \text{dok je}\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to 1_-}u_n(x)=0,$$

pa jednakost ne važi.

984. Ispitati da li se red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \qquad (x \geq 0) \tag{1}$$

može integraliti član po član **a)** kao određeni integral **b)** kao neodređeni integral. Kako se nalazi primitivna funkcija za sumu reda (1) ?

Rešenje. U oblasti $x \geq 0$ imamo da je

$$\frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

pa kako red $\sum 1/n^2$ konvergira, zaključujemo da red (1) uniformno konvergira u naznačenoj oblasti, i funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$$

je definisana i neprekidna za svako $x \geq 0$. Prema tome, za svako $a, b \geq 0$ važi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{b+n} \right). \tag{2}$$

Međutim, jednakost (2) ne važi u istom obliku za neodređeni integral. Naime, kako je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+n)^2} = \frac{1}{x+n} + C,$$

formalnom primenom jednakosti (2) sa neodređenim integralom i sa $C = 0$ dobili bismo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x+n},$$

što nije tačno jer red sa desne strane divergira. Ipak, funkcija f, budući da je neprekidna, ima primitivnu funkciju. Do nje se dolazi, na primer, na sledeći način: Neka je F jedna primitivna funkcija za f. Tada je

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + C &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+n)^2} + C \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) + C \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+n)} + C. \end{aligned}$$

985. Dokazati: Ako red $\sum |u_n(x)|$ uniformno konvergira na $[a,b]$, tada i red $\sum u_n(x)$ uniformno konvergira na $[a,b]$.

986. Ako red $\sum u_n(x)$ konvergira apsolutno i uniformno na $[a,b]$, da li red $\sum |u_n(x)|$ uniformno konvergira na $[a,b]$?

Rešenje. Iz apsolutne i uniformne konvergencije reda $\sum u_n(x)$ ne može se izvesti zaključak o uniformnoj konvergenciji reda $\sum |u_n(x)|$. Na primer, ako je $u_n(x) = (-1)^n(1-x)x^n$, tada red $\sum |u_n(x)|$ konvergira, ali ne konvergira uniformno na $[0,1]$ (zadatak 968), dok red $\sum u_n(x)$ konvergira uniformno na $[0,1]$ na osnovu DIRICHLETovog kriterijuma (dokazati!)

►► 8.4.5

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857)

Ovog francuskog matematičara mnogi nazivaju ocem matematičke analize. U mnogim oblastima matematike ostavio je svoj dubok trag. Pored poznatih teorema koje danas nose CAUCHYjevo ime, on je autor brojnih rezultata na kojima počivaju čitave oblasti matematike. CAUCHY je našao da je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ i prvi je ponudio odgovore na ZENONove paradokse. Danas uobičajena $\varepsilon - \delta$ definicija graničnih vrednosti, data je 1821. godine u jednom CAUCHYjevom radu; od tada počinje rigorozno izučavanje graničnih procesa i analize uopšte.
CAUCHYjeva produktivnost bila je toliko velika da je Pariska akademija nauka morala da ograniči obim radova koji se objavljuju u njenom časopisu *Comptes Rendus*, kako bi se stalo na put ogromnom CAUCHYjevom proizvodu. Ovo ograničenje (na četiri strane) važi i danas.

5.2.3 Stepeni redovi

- *Funkcionalni red oblika*

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad a_n \in \mathbf{R}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

naziva se **stepenim redom** *ili* **potencijalnim redom.**

√ *Za svaki stepeni red postoji realan broj R* **(poluprečnik konvergencije stepenog reda)** *takav da red apsolutno konvergira za $|x| < R$ i divergira za $|x| > R$. Interval $(-R, R)$ je* **interval konvergencije stepenog reda.**

U tačkama $x = \pm R$, stepeni red može da konvergira (uslovno ili apsolutno) ili da divergira.

Ako stepeni red (1) konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$, tada kažemo da je $R = +\infty$. Ako red (1) konvergira samo za $x = 0$, tada je $R = 0$.

√ *Poluprečnik konvergencije stepenog reda (1) nalazi se po formuli*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}},$$

ili po formuli

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

ako poslednja granična vrednost postoji.

√ *Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda, tada on uniformno konvergira na svakom zatvorenom intervalu koji je sadržan u $[-R, R]$. Ako je*

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

tada je f neprekidna funkcija na $(-R, R)$.

√ *Stepeni red se može diferencirati član po član proizvoljan broj puta u svakoj tački $x \in (-R, R)$ i može se integraliti član po član na svakom intervalu (a, b), gde je $-R < a < b < R$.*

√ *Ako je R poluprečnik konvergencije reda (1), tada i izvodni red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

ima poluprečnik konvergencije R. Iz ovoga proizilazi (indukcijom) da funkcija f definisana sa (2) ima na $(-R, R)$ neprekidne izvode proizvoljnog reda.

√ **Abelova teorema.** *Ako red (1), sa poluprečnikom konvergencije R, konvergira za $x = R$ (uslovno ili apsolutno), tada je ovaj red uniformno konvergentan na svakom zatvorenom intervalu $[a, R]$, gde je $-R < a < R$ i suma reda je neprekidna (sleva) funkcija u tački $x = R$. U ovom slučaju, red se može diferencirati član po član i u tački $x = R$ i integraliti član po član na intervalu (a, R), gde je $-R < a < R$.*

Analogna tvrđenja važe i za slučaj kada red konvergira u tački $x = -R$.

987. Ispitati konvergenciju stepenog reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{2} x^n .$$

Rešenje. Koeficijent uz x^n u datom redu je

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 2k+1 \\ 2, & \text{za } n = 2k \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Kako je

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1 ,$$

zaključujemo da je poluprečnik konvergencije datog stepenog reda $R = 1$. Prema tome, red apsolutno konvergira za svako $x \in (-1, 1)$ i uniformno konvergira na svakom zatvorenom intervalu koji se sadrži u $(-1, 1)$.

U tački $x = 1$ dobija se brojni red $\sum(3+(-1)^n)/2$, koji je divergentan, jer opšti član ne teži nuli. Iz istog razloga red divergira i u tački $x = -1$.

Primedba. Poluprečnik konvergencije se računa po formuli

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| ,$$

ako postoji granična vrednost sa desne strane, ali ako ta granična vrednost ne postoji, lim ne može da se zameni sa $\underline{\lim}$. Na primer, u ovom zadatku bismo imali

$$\underline{\lim} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{2} \neq R .$$

Videti i zadatak 268.

988. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Rešenje. Neka je a_n koeficijent uz x^n. Kako je $a_n > 0$ i

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 ,$$

poluprečnik konvergencije datog reda je $R = 4$. Prema tome, red apsolutno konvergira za svako $x \in (-4, 4)$ i uniformno konvergira na svakom zatvorenom intervalu $[a, b] \subset (-4, 4)$.

Za $x = 4$, dobijamo brojni red $\sum b_n$, gde je $b_n = \dfrac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Iz jednakosti

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)} \tag{1}$$

zaključujemo da niz b_n ne teži nuli jer je monotono rastući, pa je red divergentan. Za $x = -4$ dobija se red $\sum(-1)^n b_n$, koji je iz istog razloga divergentan.

989. Ispitati konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1)$.

Rešenje. Kako je

$$\lim \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

red apsolutno konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$ i uniformno konvergira na svakom zatvorenom intervalu $[a, b]$, $a < b$.

990. Ispitati konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0)$.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a^{1/\sqrt{n}}} = 1,$$

red apsolutno konvergira za $|x| < 1$.

U tački $x = 1$ dobija se pozitivan red $\sum a_n$, gde je $a_n = a^{-\sqrt{n}}$. Za $a = 1$ ovaj red očigledno divergira. Ako je $a \neq 1$, konvergenciju možemo ispitati analizom količnika a_n / a_{n+1}:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}} = \exp((\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \log a) = \exp\left(\frac{\log a}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)$$
$$= 1 + \frac{\log a}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + O(1/n) \quad (n \to +\infty).$$

Zbog kvadratnih korena u imeniocu, poslednji izraz se ne može transformisati u oblik koji je potreban za primenu GAUSSovog kriterijuma, ali se može primeniti RAABEov kriterijum. Naime, imamo da je

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n \log a}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + nO(1/n)\right)$$
$$= \operatorname{sgn}(\log a) \cdot \infty.$$

Prema tome, ako je $\log a > 0$, tj $a > 1$, red je konvergentan, dok je za $0 < a \leq 1$ divergentan u tački $x = 1$.

Ispitajmo sada konvergenciju reda u tački $x = -1$. Za ovu vrednost promenljive, dobija se alternativni red $\sum(-1)^n a_n$. Ako je $0 < a \leq 1$, tada a_n nije nula niz, pa je red divergentan. Ako je $a > 1$, tada iz analize slučaja $x = 1$ sleduje da je red apsolutno konvergentan.

991. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n .$$

Rešenje. Kako je (zadatak 919)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1) \qquad (n \to +\infty),$$

gde je γ EULEROva konstanta, imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log n + \gamma + o(1)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log n} = 1 .$$

Prema tome, red apsolutno konvergira za $|x| < 1$. U tačkama $x = \pm 1$, red divergira jer opšti član ne teži nuli.

992. U zavisnosti od $p \in \mathbf{R}$, ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n .$$

Rešenje. Ako stavimo $(x-1)/2 = y$, dobijamo stepeni red $\sum a_n y^n$, gde a_n ima očigledno značenje. Kako je

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 ,$$

poluprečnik konvergencije stepenog reda je $R = 1$. Dakle, red je apsolutno konvergentan za $|y| < 1$, tj. za $-1 < x < 3$ i divergentan za $|y| > 1$, tj. za $x < -1$ i za $x > 3$.

Ispitajmo konvergenciju reda u tačkama -1 i 3.

Za $x = -1$ dobijamo alternativni red $\sum(-1)^n a_n$. Iz razvoja

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + O(1/(2n+1)^2)$$

$$= 1 + \frac{p}{2n} + O(1/n^2) \qquad (n \to +\infty) \tag{1}$$

zaključujemo da je dati red u tački $x = -1$ apsolutno konvergentan za $p > 2$ (GAUSSov kriterijum). Na osnovu zadatka 947, red je konvergentan za svako $p > 0$. Ako je $p < 0$, iz (1) zaključujemo da je a_n rastući niz, pa je red divergentan (opšti član ne teži nuli). Ako je $p = 0$, tada je $a_n = 1$, pa je red takođe divergentan. Dakle, za $x = -1$, red je apsolutno konvergentan ako je $p > 2$, uslovno konvergentan ako je $0 < p \leq 2$ i divergentan ako je $p \leq 0$.

Za $x = 3$ dobija se pozitivan red $\sum a_n$, pa iz (1) nalazimo da je red (apsolutno) konvergentan za $p > 2$ i divergentan za $p \leq 2$.

993. Ispitati konvergenciju stepenih redova $\sum a_n x^n$, gde je a_n dato sa:

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ [$R = e^{-1}$, divergira u $\pm e^{-1}$.]

b) $\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ [$R = 1$, $x = 1$ konvergira, $x = -1$ uslovno.]

c) $\frac{(3 + (-1)^n)^n}{n}$ [$R = 1/4$, $x = \pm 1/4$ divergira]

d) $(-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p$

[$R = 2^p$, $x = 2^p$: apsol. za $p > 2$, usl. za $0 < p \leq 2$; $x = -2^p$: apsol. za $p > 2$, diverg. za $p \leq 2$]

994. Dokazati: Ako stepeni red $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x_0 \neq 0$, tada on apsolutno konvergira za svako x za koje je $|x| < |x_0|$ i uniformno konvergira na svakom skupu $\{x \mid |x| \leq r\}$, gde je $r < |x_0|$.

Rešenje. Ako red $\sum a_n x_0^n$ konvergira, tada je $\lim_{n \to +\infty} a_n x_0^n = 0$, odakle sledi da je niz $\{a_n x_0^n\}$ ograničen, tj. da postoji $M > 0$ tako da je $|a_n x_0^n| < M$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Tada je, za $|x| < |x_0|$,

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Kako red $\sum |x/x_0|^n$ konvergira (geometrijska progresija), na osnovu poredbenog kriterijuma zaključujemo da red $\sum |a_n x^n|$ konverira, tj. da red $\sum a_n x^n$ apsolutno konvergira, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada da dati red uniformno konvergira na svakom skupu $A_r = \{x \mid |x| \leq r\}$ za $r < |x_0|$. Iz prethodnog dokaza sledi da red apsolutno konvergira za $x = r$, tj. da red $\sum |a_n| \cdot r^n$ konvergira. Za $x \in A_r$, imamo da je $|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n \leq |a_n| \cdot r^n$, pa na osnovu WEIERSTRASSovog kriterijuma red uniformno konvergira na A_r.

995. Ako red $\sum a_n x^n$ divergira u tački x_0, dokazati da dati red divergira za svako x za koje je $|x| > |x_0|$.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj da je red konvergentan u tački x. Primenom zadatka 994 dobijamo da je red konvergentan i u tački x_0, što je kontradikcija sa pretpostavkom u postavci zadatka.

996. Neka redovi $\sum a_n x^n$ i $\sum b_n x^n$ imaju poluprečnike konvergencije R_1 i R_2 respektivno. Dokazati da poluprečnik konvergencije reda $\sum(a_n + b_n)x^n$ nije manji od $R = \min(R_1, R_2)$.

Rešenje. Neka je $x < R$. Po pretpostavkama zadatka, oba reda su konvergentna u tački x, pa je i njihov zbir, $\sum(a_n + b_n)x^n$ konvergentan red. Dakle, svaka tačka $x < R$ pripada intervalu konvergencije reda $\sum(a_n+b_n)x^n$, odakle izlazi da je njegov poluprečnik konvergencije jednak R ili veći.

997. Naći dva stepena reda čiji su poluprečnici konvergencije jednaki 1, a čiji zbir ima poluprečnik konvergencije jednak 2. Da li je moguć i obrnut primer: redovi sa poluprečnikom 2, a zbir ima poluprečnik 1? Obrazložiti.

Rešenje. Neka je

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n, \quad S_2(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) x^n, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}.$$

Tada važi $S_1(x) + S_2(x) = S(x)$; redovi S_1 i S_2 imaju poluprečnik konvergencije 1, dok je poluprečnik konvergencije reda S jednak 2.

Obrnut primer nije moguć, na osnovu zadatka 996.

998. Dokazati: Ako stepeni red sa poluprečnikom konvergencije R uniformno konvergira na $[0, R)$, tada on konvergira u tački $x = R$.

Rešenje. Kako je $x = R$ tačka nagomilavanja intervala $[0, R)$ na kome red $S(x) = \sum a_n x^n$ uniformno konvergira, imamo da je

$$\lim_{x \to R_-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to R_-} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,$$

pri čemu poslednji red konvergira (videti 5.2.2).

Prema tome, red konvergira za $x = R$.

999. Da li stepeni red sa poluprečnikom konvergencije R mora da bude uniformno konvergentan na $[0, R)$?

Rezultat. Ne mora. Naime, ako je red divergentan u $x = R$, on nije uniformno konvergentan na $[0, R)$, prema zadatku 998.

1000. Ako stepeni red sa poluprečnikom konvergencije R uniformno konvergira na $[0, R)$, tada on uniformno konvergira i na $[0, R]$. Dokazati.

Rešenje. Na osnovu zadatka 998, ako stepeni red uniformno konvergira na $[0, R)$, tada on konvergira u tački $x = R$. Iz toga zaključujemo, primenom ABELove teoreme, da je red uniformno konvergentan na $[0, R]$.

1001. Ako je dat stepeni red $\sum a_n x^n$, čiji je poluprečnik konvergencije R, dokazati da redovi koji se dobijaju kada se dati red diferencira ili integrali član po član, imaju poluprečnik konvergencije R.

1002. Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ i $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, pri čemu navedeni stepeni redovi imaju pozitivne poluprečnike konvergencije. Ako u nekoj okolini nule važi jednakost $f(x) = g(x)$, dokazati da je tada $a_n = b_n$ za svako $n = 0, 1, 2, \ldots$

Rešenje. Ako u jednakosti

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

stavimo $x = 0$ dobijamo $a_0 = b_0$. Dalje, deljenjem sa $x \neq 0$, dobijamo

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots$$

Ako u ovoj jednakosti pustimo da $x \to 0$ (zašto to možemo da uradimo?), dobijamo $a_1 = b_1$.

Produžavanjem ovog postupka, možemo dokazati da je $a_n = b_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

5.2.4 Maclaurinov red

- *Neka je funkcija f definisana na nekom intervalu koji sadrži nulu, i neka postoje svi izvodi funkcije f u nuli. Red*

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

naziva se **Maclaurinovim redom** *funkcije f.*

√ MACLAURINov *red funkcije f u datoj tački x može da bude konvergentan ili divergentan, a ako je konvergentan onda može (ali ne mora) da konvergira ka $f(x)$. Dovoljan uslov da red (1) konvergira ka funkciji f na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži nulu je da na tom intervalu postoje svi izvodi funkcije f i da su uniformno ograničeni, tj. da postoji konstanta $M > 0$ tako da važi*

$$(\forall x \in [a, b])(\forall n \in \mathbf{N}) \quad |f^{(n)}(x)| \leq M .$$

Funkcija	MACLAURINov red	R
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
$\sin x$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$+\infty$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	1
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1
$\log(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1

Tablica osnovnih MACLAURINovih *redova.*

√ **Teorema o jedinstvenosti stepenog reda.** *Svaki stepeni red sa poluprečnikom konvergencije $R > 0$ je* MACLAURINov *red funkcije koja je definisana sumom tog reda na $(-R, R)$. Prema tome, ako je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n ,$$

tada je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .$$

√ **Definisanje elementarnih funkcija pomoću redova.** *Jedan od načina zasnivanja teorije elementarnih funkcija je definisanje osnovnih elementarnih funkcija pomoću redova. Eksponencijalna, stepena i logaritamska funkcija, kao i trigonometrijske funkcije definišu se kao sume stepenih redova. Ovakva definicija elementarnih funkcija istovremeno daje mogućnost za njihovo izračunavanje.*

1003. Naći MACLAURINov red funkcije $f(x) = (1+x)^\alpha$ i ispitati njegovu konvergenciju.

Rešenje. Nalaženjem izvoda, ili iz MACLAURINove formule (videti 3.4.1) dobijamo da je traženi MACLAURINov red dat sa

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Ako je α prirodan broj ili nula, tada se red (1) svodi na konačnu sumu, jer je samo konačno mnogo prvih koeficijenata a_n različito od nule. Dakle, u ovom slučaju red apsolutno konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$.

Pretpostavimo sada da je $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$

Kako je

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{n+1}{n-\alpha} = 1 + \frac{1+\alpha}{n-\alpha} = 1 + \frac{1+\alpha}{n(1-\alpha/n)} \\ &= 1 + \frac{1+\alpha}{n}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + o(1/n)\right) \\ (2) \qquad &= 1 + \frac{1+\alpha}{n} + O(1/n^2) \qquad (n \to +\infty), \end{aligned}$$

zaključujemo da je, za svako $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$, poluprečnik konvergencije reda (1) dat sa

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1.$$

Ispitajmo sada konvergenciju reda (1) u tačkama ± 1. Primetimo najpre da koeficijenti a_n definisani u (1), menjaju naizmenično znak počevši od $n = 0$ ako je $\alpha < 0$ i počevši od $n = [\alpha] + 1$ ako je $\alpha > 0$. Prema tome, u tački $x = 1$ dati red je ekvikonvergentan sa redom

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n |a_n|,$$

dok je u tački $x = -1$, red ekvikonvergentan sa redom

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Primenom GAUSSovog kriterijuma, iz (2) nalazimo da red (4) konvergira za $\alpha > 0$ i divergira za $\alpha \leq 0$.

Iz zadatka 947 i iz (2) zaključujemo da red (3) konvergira za $\alpha > -1$ i divergira za $\alpha < -1$. Ako je $\alpha = -1$, tada je $a_n = \binom{\alpha}{n} = (-1)^n$, pa je red divergentan.

Na osnovu izvedenog, zaključujemo da je za $\alpha > 0$ dati red apsolutno konvergentan u tačkama ± 1; za $-1 < \alpha < 0$ red uslovno konvergira u $x = 1$ i divergira u $x = -1$, dok je za $\alpha \leq -1$ red divergentan u obema tačkama.

Primedba. Red (1) naziva se **binomni red**, jer predstavlja generalizaciju binomne formule (videti i zadatak 1010).

1004. Neka funkcija f ima izvode proizvoljnog reda na nekom segmentu $[-a, a]$, $a > 0$, i neka postoji konstanta $M > 0$ tako da za svako $x \in [-a, a]$ i za svako $n = 0, 1, 2, \ldots$ važi nejednakost

$$|f^{(n)}(x)| \leq M .$$

Dokazati da MACLAURINov red funkcije f konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-a, a]$.

Rešenje. Primenom MACLAURINove formule nalazimo da je, za $x \in [-a, a]$

$$f(x) = S_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad -1 \leq \theta \leq 1 ,$$

gde je $S_n(x)$ n-ta parcijalna suma MACLAURINovog reda funkcije f. Odavde je, za $x \in [-a, a]$,

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} a^{n+1} \leq M \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to +\infty) ,$$

čime je dokazano da MACLAURINov red date funkcije f konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-a, a]$. (Za nalaženje poslednje granične vrednosti videti zadatak 217.)

1005. Za koje $x \in \mathbf{R}$ važi jednakost

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \; ? \tag{1}$$

Rešenje. Red sa desne strane u (1) je MACLAURINov red funkcije $x \mapsto e^x$. Kako je

$$(e^x)^{(n)} = e^x \leq e^a \qquad (-a \leq x \leq a) ,$$

zaključujemo da red konvergira ka e^x za svako $x \in [-a, a]$; kako je a proizvoljno, razvoj (1) važi za svako $x \in \mathbf{R}$.

1006. Dokazati da za svako $x \in \mathbf{R}$ važe razvoji

$$\sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} , \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} .$$

1007. Navesti primer funkcije f čiji MACLAURINov red ima poluprečnik konvergencije $R > 0$ ali ni za jedno $x \neq 0$ ne konvergira ka $f(x)$.

Rešenje. Neka je f_1 funkcija čiji MACLAURINov red konvergira ka f_1, na primer,

$$f_1(x) = e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Neka je f_2 funkcija definisana sa

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

U zadatku 539 pokazano je da su svi izvodi funkcije f_2 u nuli jednaki nuli. Prema tome, MACLAURINov red funkcije $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ je jednak MACLAURINovom redu funkcije f_1 i u svakoj tački $x \neq 0$ konvergira ka $f_1(x) \neq f(x)$.

1008. Neka je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad (-R < x < R), \tag{1}$$

gde je R poluprečnik konvergencije reda u (1). Ako je funkcija f neprekidna (sleva) u $x = R$ i ako red (1) konvergira u $x = R$ (apsolutno ili samo uslovno), dokazati da razvoj (1) važi i za $x = R$.

Rešenje. Ako red (1) konvergira u $x = R$, tada je ovaj red uniformno konvergentan na svakom intervalu $[a, R]$, gde je $-R < a < R$ (ABELova teorema).

Koristeći neprekidnost funkcije f u tački $x = R$ i uniformnu konvergenciju reda, dobijamo

$$f(R) = \lim_{x \to R_-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to R_-} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,$$

čime je dokazano da (1) važi i za $x = R$.

1009. Za koje $x \in \mathbf{R}$ važi jednakost

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \; ? \tag{1}$$

Rešenje. Izvodi funkcije $f(x) = \log(1+x)$ nisu uniformno ograničeni, pa konvergenciju MACLAURINovog reda ka funkciji f treba ispitati direktno.

Ako je $R_n(x)$ LAGRANGEov oblik ostatka u MACLAURINovoj formuli u fiksiranoj tački $x \in (-1, 1)$, tada važi

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{n+1} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Prema tome, jednakost (1) važi za svako $x \in (-1,1)$. Kako je red sa desne strane u (1) uslovno konvergentan za $x = 1$ i kako je funkcija f neprekidna u $x = 1$, jednakost (1) važi i za $x = 1$ (zadatak 1008).

Primedba. Jednakost (1) za $x = 1$ svodi se na

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2.$$

1010. Za koje $x \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ važi jednakost

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \; ? \tag{1}$$

Rešenje. Za analizu ostatka u MACLAURINovoj formuli u ovom slučaju treba uzeti CAUCHYjev oblik ostatka (videti 3.4.1), jer LAGRANGEov oblik nije pogodan. Imamo da je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{n!} (1-\theta_n)^n x^{n+1},$$

gde je $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ i $0 < \theta_n < 1$ (Ovde smo uveli oznaku θ_n umesto uobičajene θ, da bismo istakli zavisnost od n). Nalaženjem izvoda funkcije f i jednostavnim transformacijama, dobijamo da je

$$R_n(x) = \alpha \binom{\alpha-1}{n} x^n x (1+\theta_n x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x} \right)^n. \tag{2}$$

Fiksirajmo sada $x \in (-1,1)$. U zadatku 1003 dokazali smo da binomni red konvergira za svako $x \in (-1,1)$ i za svako $\alpha \in \mathbf{R}$. Prema tome, njegov opšti član teži nuli; zamenom α sa $\alpha - 1$ dobijamo da je

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n = 0. \tag{3}$$

Dalje imamo da je

$$|x|(1-|x|)^{\alpha-1} \leq \left| x(1+\theta_n x)^{\alpha-1} \right| \leq |x|(1+|x|)^{\alpha-1}. \tag{4}$$

Kako je

$$|1+\theta_n x| \geq |1-\theta_n |x|| > |1-\theta_n|,$$

nalazimo da je

(5) $$\left|\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right|^n < 1 .$$

Iz (3), (4) i (5) zaključujemo da je

$$\lim R_n(x) = 0 \qquad \text{za svako } x \in (-1,1) \text{ i za svako } \alpha \in \mathbf{R} .$$

Dakle, razvoj (1) važi za svako $x \in (-1,1)$ i za svako $\alpha \in \mathbf{R}$. Za $|x| > 1$, jednakost (1) ne važi, jer binomni red divergira. Ako binomni red uslovno ili apsolutno konvergira u tačkama ± 1, tada (1) važi i u tim tačkama, jer je funkcija f neprekidna u ± 1. Ovi slučajevi su analizirani u zadatku 1003. Dakle, možemo da zaključimo sledeće:

Ako je α nenegativan ceo broj, data jednakost važi za svako $x \in \mathbf{R}$. Ako je $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$, tada jednakost važi za svako $x \in (-1,1)$ i, pored toga, za $x = 1$, $\alpha > -1$ i $x = -1, \alpha > 0$.

1011. Razviti u stepeni red funkcije:

a) $\sqrt{1+x}$ $$\left[\, 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} x^n \,\right]$$

b) $\sqrt[3]{1+x}$ $$\left[\, 1 + \frac{x}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n n!} x^n \,\right]$$

c) $(1+x)^{2/3}$ $$\left[\, 1 + \frac{2}{3}x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-5)}{3^n n!} x^n \,\right]$$

1012. Ispitati da li je ispravan sledeći postupak:

Ako u formuli

(1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

zamenimo $x \neq 0$ sa $1/x$, dobijamo

(2) $$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots$$

Sabiranjem (1) i (2) imamo da je

$$1 + x + x^2 + \cdots + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots = 0 .$$

1013. Razviti u stepeni red funkciju f datu sa

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

i ispitati za koje $x \in \mathbf{R}$ konvergira tako dobijeni red.

Rešenje. Razlaganjem date funkcije na parcijalne razlomke dobijamo

$$f(x) = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}. \tag{1}$$

Kako je

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n,$$

smenom u (1) i sređivanjem, dobijamo razvoj

$$f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2n+1+(-1)^{n+1}\right)x^n. \tag{2}$$

Razvoji koje smo koristili važe za $|x| < 1$, pa je i jednakost (2) tačna za $|x| < 1$. Ovde nema smisla ispitivati tačke ± 1, jer u njima funkcija f nije definisana.

1014. Razviti u potencijalni red funkciju

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3},$$

a zatim odrediti $f^{(100)}(0)$.

Rešenje. Iz jednakosti

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1-x}{2(1+x^2)}$$

i primenom osnovnih razvoja, dobijamo da je, za $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \tag{1}$$

gde je

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right), & n = 2k \\ -\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right) & n = 2k+1 \end{cases}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Kako je (1) MACLAURINov razvoj funkcije f, imamo da je

$$c_{100} = \frac{f^{(100)}(0)}{100!},$$

odakle je

$$f^{(100)}(0) = c_{100} \cdot 100! = 100!.$$

1015. Funkciju f datu sa

$$f(x) = \log \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$$

razviti u potencijalni red po stepenima x i ispitati konvergenciju dobijenog reda.

Rešenje. Primetimo da je data funkcija definisana samo u oblasti u kojoj je $(1+2x)/(1-x) > 0$, odakle se dobija $x \in (-1/2, 1)$. Znajući razvoj funkcije $t \to \log(1+t)$ u stepeni red, imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \log \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \frac{1}{3}\log(1+2x) - \frac{1}{3}\log(1-x) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n-(-1)^n}{n}x^n . \end{aligned}$$

Poluprečnik konvergencije poslednjeg reda je

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{(2^n+1)/n}} = \frac{1}{2} .$$

Za $x = 1/2$, red konvergira (kao zbir dva konvergentna reda), dok za $x = -1/2$ red divergira (kao zbir jednog konvergentnog i jednog divergentnog reda). Prema tome, oblast konvergencije dobijenog stepenog reda je $(-1/2, 1/2]$.

1016. Funkciju $f(x) = \arcsin x$ razviti u stepeni red i ispitati konvergenciju tako dobijenog reda.

Rešenje. Imamo da je

$$f'(x) = (1-x^2)^{-1/2} . \tag{1}$$

Funkciju datu sa (1) možemo razviti u stepeni red koristeći se binomnim razvojem

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-1/2-n+1)}{n!}(-1)^n x^{2n} \tag{2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}.$$

Red (2) konvergira za $|x^2|<1$, tj. za $|x|<1$. Unutar intervala konvergencije red (2) možemo da integralimo član po član, pa je

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt=x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\,dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}. \tag{3}$$

Primetimo da smo u (3) za donju granicu uzeli $t=0$ jer je $f(0)=0$. Red koji se dobija integracijom ima isti poluprečnik konvergencije kao i početni red; prema tome, red (3) ima poluprečnik konvergencije $R=1$. Potrebno je još ispitati ponašanje u tačkama $x=\pm 1$. U tački $x=1$ dobija se pozitivan red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}.$$

Primenićemo RAABEov kriterijum. Sa $a_n=(2n-1)!!/((2n+1)(2n)!!)$ imamo:

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)=\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}\sim 3/2>1\quad(n\to\infty),$$

pa zaključujemo da red konvergira. Za $x=-1$, iz (5) sledi da odgovarajući red apsolutno konvergira. Prema tome, razvoj (3) važi za svako $x\in[-1,1]$.

Primedba. Iako red koji se dobija integracijom (ili diferenciranjem) ima isti poluprečnik konvergencije kao i polazni red, njihovo ponašanje na krajevima intervala konvergencije ne mora da bude isto. Na primer, red (2) divergira u tačkama $x=\pm 1$, dok red (3) kao što smo videli, u tim tačkama konvergira.

1017. Funkciju

$$f(x)=x\operatorname{arctg}x-\log\sqrt{1+x^2}$$

razviti u stepeni red po x i odrediti za koje x važi tako dobijeni razvoj. Na osnovu dobijenog stepenog reda, izračunati zbir reda

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} . \tag{1}$$

Rešenje. Primetimo najpre da je $f'(x) = \operatorname{arctg} x$. Koristeći se ovom činjenicom, razvićemo funkciju f' u stepeni red, pa ćemo tako dobijeni red integraliti. Naravno, zadatak bi mogao da se reši i direktnim razvojem funkcije f u stepeni red, ali ova ideja dovodi do jednostavnijeg postupka.

Da bismo našli razvoj funkcije $f'(x)$, diferencirajmo još jedanput:

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} . \tag{2}$$

Red u (2) ima poluprečnik konvergencije $R = 1$, pa razvoj (2) važi za $x \in (-1, 1)$, i na ovom intervalu možemo da integralimo član po član. Kako je $f'(0) = 0$, imaćemo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} . \tag{3}$$

Red u (3) ima poluprečnik konvergencije $R = 1$, kao i red u (2). Ako integralimo još jedan put, znajući da je $f(0) = 0$, dobijamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} . \tag{4}$$

Ostaje još da se ispita ponašanje ovog razvoja na krajevima oblasti konvergencije, tj. u $x = \pm 1$. U oba slučaja dobija se numerički red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} , \tag{5}$$

čiji se opšti član ponaša kao const $\cdot\, n^{-2}$, pa je ovaj red apsolutno konvergentan. Prema tome, razvoj (4) važi za svako $x \in [-1, 1]$. Ako se u (5) uvede smena indeksa $n \to n-1$, dobija se

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2} S ,$$

odakle je $S = 2f(1) = \pi/2 - \log 2$.

1018. Funkciju $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ razviti u red po stepenima promenljive $1/x$ i ispitati za koje $x \in \mathbf{R}$ tako dobijeni red konvergira.

Rešenje. Imamo da je

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{t}{1-t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \qquad (t = 1/x) \tag{1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}.$$

Kako stepeni red po t u (1) konvergira za $t \in [-1, 1)$, zaključujemo da dobijeni razvoj važi za $x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

1019. Da li se funkcija $x \mapsto \log x$ može razviti u red po **a)** stepenima x, **b)** stepenima promenljive $t = \dfrac{x-1}{x+1}$? U slučaju kada razvoj postoji, odrediti ga i ispitati konvergenciju.

Rešenje. **a)** Kako funkcija $f(x) = \log x$ nije definisana u nuli, ona se ne može razviti u stepeni red po x. Naime, ako bi postojao razvoj oblika $f(x) = \sum a_n x^n$, tada bi, po teoremi o jedinstvenosti stepenog reda, koeficijenti a_n bili određeni sa $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, što je nemoguće, jer izvodi u nuli ne postoje.

b) Ako stavimo $t = \dfrac{x-1}{x+1}$, tada je $x = \dfrac{1+t}{1-t}$, odakle nalazimo da je

$$f(x) = \log x = \log \frac{1+t}{1-t} = \log(1+t) - \log(1-t), \quad (-1 < t < 1).$$

Koristeći se razvojima funkcija $t \mapsto \log(1 \pm t)$ u stepeni red, dobijamo da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}.$$

Dobijeni razvoj važi za $|t| < 1$, tj. za $x > 0$.

1020. Funkciju $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ razviti u red po stepenima promenljive $\dfrac{x}{1+x}$.

Rezultat. $f(x) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{n+1}, \quad t = \dfrac{x}{1+x}, \quad x > -1/2.$

1021. Razviti u stepeni red po promenljivoj x sledeće funkcije:

a) $\operatorname{sh} x$ $\qquad \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R}\right]$

b) $\operatorname{ch} x$ $\quad\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbf{R}\right]$

c) $\sin^2 x$ $\quad\left[\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbf{R}.\ \text{Uputstvo: } \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right]$

d) $\sin^3 x$ $\quad\left[\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in\mathbf{R}\right]$

e) a^x $\quad\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n,\ x\in\mathbf{R}\right]$

f) e^{-x^2} $\quad\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},\ x\in\mathbf{R}\right]$

1022. Razviti u stepeni red sledeće funkcije:

a) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$ $\quad\left[\sum_{n=10}^{+\infty}x^n,\ -1\le x<1\right]$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$ $\quad\left[x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},\ -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right]$

c) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\quad\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1\right]$

d) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ $\quad\left[\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-(-2)^n)\,x^n,\ |x|<1/2\right]$

e) $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$ $\quad\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n,\ |x|<1\right]$

f) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ $\quad\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n,\ |x|<1\right]$

1023. Date funkcije razviti u stepeni red i ispitati za koje vrednosti promenljive važi dobijeni razvoj:

a) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1]\right]$

b) $x\operatorname{arctg} x-\log(1+x^2)$ $\quad\left[\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n(2n-1)}x^{2n},\ x\in[-1,1]\right]$

c) $x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$

$$\left[-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]\right]$$

d) $\arccos(1-2x^2)$

$$\left[2|x|\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right),\quad |x|\le 1\right]$$

e) $\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$

$$\left[\operatorname{arctg}2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad -\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}\right]$$

1024. Ispitati konvergenciju stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n a^n}{(a+1)\cdots(a+n)}\qquad (a>0)\,.$$

Odrediti sumu reda za $a=2$.

Rešenje. Kako je

$$\lim\frac{a^n(a+1)\cdots(a+n+1)}{a^{n+1}(a+1)\cdots(a+n)}=\lim\frac{a+n+1}{a}=+\infty\,,$$

poluprečnik konvergencije datog reda je beskonačan i red konvergira za svako $x\in\mathbf{R}$. Neka je $f(x)$ suma datog reda za $a=2$. Tada je

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n2^n}{3\cdot4\cdots(n+2)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n2^{n+1}}{(n+2)!}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}\,2^{n+1}}{(n+2)!}\qquad(x\neq0)\\&=\frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{n+2}}{(n+2)!}=\frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\\&=\frac{1}{2x^2}\left(e^{2x}-1-2x-2x^2\right).\end{aligned}$$

Izvedena jednakost važi za $x\neq0$. Za $x=0$, direktnom zamenom u dati red, dobijamo da je $f(0)=0$.

1025. Ispitati konvergenciju i naći sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n\,.$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije datog reda je beskonačan, tako da je njegovom sumom definisana funkcija f za svaku realnu vrednost argumenta x.

Smenom $t = x/3$ i jednostavnim transformacijama dobijamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} t^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n}_{e^t}$$

$$= t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} t^{n-1} + e^t = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} t^{n-1} + e^t$$

$$= t \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} t^{n-1} + t \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}}_{e^t} + e^t$$

$$= t^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}}_{e^t} + te^t + e^t = t^2 e^t + te^t + e^t$$

$$= e^{x/3} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} + 1 \right) .$$

1026. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n}$$

i naći njegovu sumu.

Rešenje. Poluprečnik konvergencije reda je $R = \lim |(n+1)/n| = 1$. Za $x = 1$ imamo red $\sum (-1)^{n-1}/n$, koji je uslovno konvergentan. Za $x = -1$, dobija se divergentan red $\sum 1/n$. Sumu reda nalazimo iz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x} \log(1+x) . \tag{1}$$

Primetimo da suma stepenog reda treba da bude neprekidna funkcija na intervalu konvergencije. Međutim, funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x} \log(1+x) \tag{2}$$

nije definisana za $x = 0$. Ipak, imamo da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1 .$$

S druge strane, ako u

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots$$

stavimo $x = 0$, dobija se $f(0) = 1$. Prividna nesaglasnost između (2) i (3) se lako otklanja: Naime, formula (1) je izvedena pod pretpostavkom da je $x \neq 0$ (jer smo delili sa x). Ispravno je napisati da je suma datog reda data sa

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x)/x & \text{ako } x \in (-1,0) \cup (0,1] \\ 1 & \text{ako } x = 0 \end{cases}$$

Primetimo da je funkcija data sa (2) definisana i van intervala konvergencije datog reda, ali se, naravno, tamo ne može razviti u stepeni red po x.

1027. Dat je stepeni red

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} .$$

Ispitati konvergenciju ovog reda i naći njegovu sumu u konačnom obliku.

Rešenje. Kako je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1 ,$$

red konvergira za svako $x \in (-1,1)$.

Za $x = 1$, opšti član reda je

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} ,$$

pa, na osnovu poredbenog kriterijuma, zaključujemo da red konvergira.

Za $x = -1$, opšti član reda ima istu apsolutnu vrednost kao za $x = 1$, tako da red u ovom slučaju takođe konvergira (i to apsolutno).

Iz izloženog sleduje (primenom ABELove teoreme) da dati red uniformno konvergira za $x \in [-1,1]$. Neka je $f(x)$ suma reda za dato $x \in [-1,1]$. Diferenciranjem član po član nalazimo

$$(2) \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} ,$$

$$(3) \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 \leq x < 1) .$$

Iz (2) sleduje da je $f'(0) = 0$; integracijom iz (3) dobijamo

$$f'(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\log(1-x) \tag{4}$$

Dalje, iz (1) imamo da je $f(0) = 0$, pa integracijom iz (4) sleduje

$$f(x) = -\int_0^x \log(1-x)\ \mathrm{d}x = (1-x)\log(1-x) + x\ . \tag{5}$$

Formula (5) važi za $-1 \leq x < 1$, jer i (3) važi u toj oblasti. Kako je suma reda neprekidna funkcija u $[-1, 1]$, zaključujemo da je

$$f(1) = \lim_{x \to 1_-} (1-x)\log(1-x) + x = 1\ . \tag{6}$$

Primedba. Iz (2) se može neposredno zaključiti da je $f'(x) = -\log(1-x)$.

1028. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

i naći njegovu sumu.

Rešenje. Poluprečnik konvergencije datog reda je $R = 1$. U tačkama $x = \pm 1$ red divergira, jer opšti član ne teži nuli.

Neka je $f(x)$ suma datog reda za $|x| < 1$. Tada je

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \int_0^x t^n\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x^2 F(x),$$

gde je sa F označena suma poslednjeg reda.

Integracijom jednakosti

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$$

dobijamo

$$\int_0^x F(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}\ . \tag{1}$$

Iz (1) dobijamo, diferenciranjem

$$F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x F(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}\ .$$

Dalje je

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = x^2 F(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}\,,$$

odakle nalazimo

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right) = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (0 < x < 1)\,.$$

1029. Dat je red

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{k(2k-1)}\,.$$

a) Ispitati konvergenciju reda i naći njegovu sumu,
b) Koristeći dobijeni rezultat, sumirati numerički red

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(4k^2-1)}\,.$$

Rezultat. **a)** Suma reda je $f(x) = 2x\operatorname{arctg} x - \log(1+x^2)$, $x \in [-1,1]$.
b) Suma numeričkog reda je $1 - \log 2$.

1030. Dat je stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n-1}x^{n-1}\,.$$

Ispitati konvergenciju ovog reda i odrediti njegovu sumu $f(x)$.

Rešenje. Poluprečnik konvergencije datog reda je 1. U tačkama $x = \pm 1$ red divergira, jer opšti član ne teži nuli.

Odredimo sada funkciju f koja je suma ovog reda na intervalu $(-1,1)$. Jednostavnim transformacijama dobijamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1+2}{2n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1-x} + 2S(x)\,,$$

gde je

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n-1}\,.$$

Za određivanje $S(x)$ pogodna je smena $x = \pm t^2$, zavisno od znaka argumenta x. Stoga ćemo razlikovati sledeća tri slučaja:

1° Ako je $x > 0$, uvedimo smenu $x = t^2$ i neka je $g(t) = S(t^2) = S(x)$. Tada je

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-2}}{2n-1} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1},$$

odakle je

$$(t\,g(t))' = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (t^2)^{n-1} = \frac{1}{1-t^2}.$$

Kako je $t\,g(t) = 0$ za $t = 0$, integracijom dobijamo

$$t\,g(t) = \int_0^t \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}.$$

Prema tome,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + 2g(\sqrt{x}) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

2° Za $x < 0$, uvođenjem smene $x = -t^2$ i ponavljanjem postupka opisanog u prvom slučaju, dobija se

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-x}.$$

3° Izvedene formule ne važe za $x = 0$. Za ovu vrednost argumenta dobijamo, direktnom zamenom u dati red, da je $f(0) = 3$.

Primedba. Iz nađenog oblika funkcije f dobija se jedan, naizgled neobičan i iznenađujući rezultat. Naime, kako je svaki stepeni red MACLAURINOV red svoje sume, zaključujemo da funkcija

$$2S(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} \log \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

ima neprekidne sve izvode u nuli. Ovo ukazuje na dublju vezu između funkcija $t \mapsto \operatorname{arctg} t$ i $t \mapsto \log \frac{1+t}{1-t}$, koja se, u stvari, otkriva tek u kompleksnom domenu. Videti zadatak 166.

1031. Razvijanjem podintegralne funkcije u stepeni red dokazati da je

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{x^2} \log(1-x) - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

i na osnovu toga izračunati vrednost integrala u konačnom obliku.

Rešenje. Razvojem podintegralne funkcije u stepeni red po x dobijamo:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}\log(1-x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n} - \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}. \tag{1}$$

Poslednji red u (1) ima poluprečnik konvergencije 1, a za $x = 1$ divergira. Kako funkcija f nije definisana u nuli, razvoj (1) je zapravo MACLAURINov razvoj za funkciju f^*, definisanu sa $f^*(0) = 1/2$, $f^*(x) = f(x)$ za $x \neq 0$. Međutim, integrali funkcija f i f^* su jednaki, jer se ove dve funkcije razlikuju samo u jednoj tački. Red (1) uniformno konvergira na svakom intervalu $[0, y]$, $y < 1$, pa je

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f^*(x)\,dx$$

$$= \lim_{y\to 1-}\int_0^y f^*(x)\,dx \quad \text{(po definiciji nesvojstvenog integrala)}$$

$$= \lim_{y\to 1-}\int_0^y \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$$

$$= \lim_{y\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(n+1)} \quad \text{(integracija član po član)} \tag{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \tag{3}$$

U (2) je dozvoljeno uzeti granične vrednosti član po član jer red $\sum y^n/(n(n+1))$ konvergira u $x = 1$, pa je ovaj red uniformno konvergentan na $[0, 1]$.

Prema zadatku 889 suma reda (3) je 1 i to je vrednost integrala.

1032. Sumirati redove:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$ $\quad [\,((x^2+1)\operatorname{arctg} x - x)/2,\ |x| \le 1\,]$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(n+1)(n+3)(n+4)}$ $\quad [\,\frac{48-30x-11x^2}{36x^3} + \frac{8-9x+x^3}{6x^4}\log(1-x)\,]$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{(n-1)(n+2)}$

$[\,f(x) = \frac{4-x^3}{3x^3}\log(1-x) + \frac{12-6x-2x^2+5x^3}{9x(1-x)},\ 0 < |x| < 1,\quad f(0) = 0\,]$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ $\quad [\,\operatorname{ch} x + \frac{5}{4}x\operatorname{sh} x + \frac{1}{4}x^2\operatorname{ch} x\,]$

1033. Objasniti kako se pomoću stepenih redova definiše funkcija $x \mapsto \log x$.

Rešenje. Ako je $0 < x \leq 2$, definišemo

$$\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Slučaj kada je $2 < x \leq 4$ može se svesti na prethodni ako se pođe od

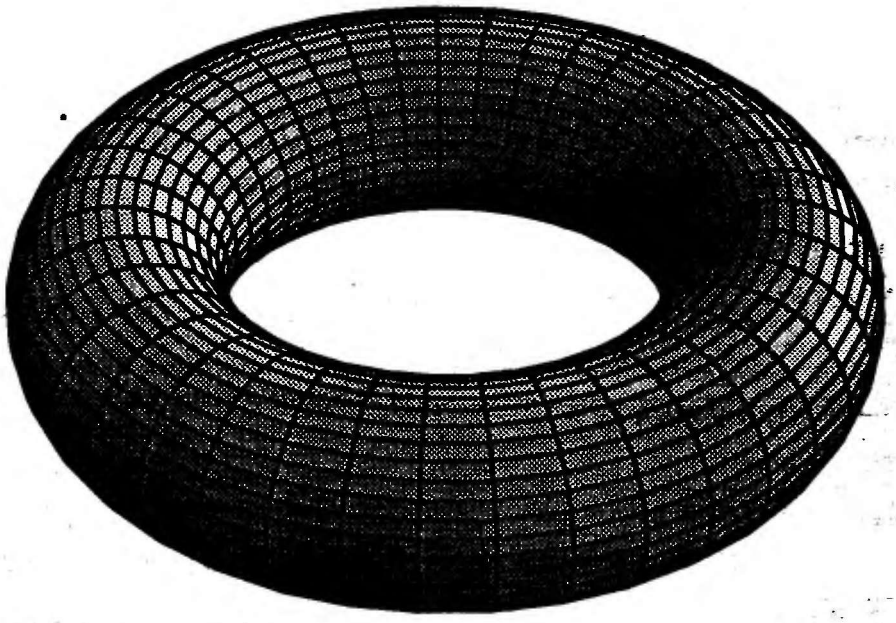
$$\log x = \log 2 \cdot \frac{x}{2} = \log 2 + \log \frac{x}{2}, \tag{1}$$

jer brojevi 2 i $x/2$ pripadaju intervalu $(0, 2]$.

Ako je funkcija $x \mapsto \log x$ definisana za $x \in (0, 2^n]$, tada se može definisati i za $x \in (2^n, 2^{n+1}]$ pomoću jednakosti (1). Na ovaj način, funkcija je definisana za svako pozitivno x.

1034. Objasniti kako se pomoću stepenih redova definišu funkcije
a) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, b) $x \mapsto 1/x$, c) $x \mapsto 2^x$.

►► 8.4.5, ►► 8.4.6, ►► 8.7.3



Prostor koji ničim ne podseća na sebe
pticama pomeran, vetrovima sličan,
sam u sebi, sam za sebe, ničemu vičan,
večiti početak užasan, bez potrebe.

Branko Miljković

Glava 6

Metrički prostori i funkcije više promenljivih

Početkom dvadesetog veka, u okviru procesa koji su doveli do velikih i značajnih otkrića u matematici i prirodnim naukama, uveden je u matematiku pojam metričkog prostora. Ovaj koncept se pokazao korisnim za izgradnju jedinstvene teorije matematičke analize na apstraktnim skupovima.

U prvom delu ove glave dajemo uvod u metričke prostore, bez pretenzija na potpunost. Ovaj materijal se zatim koristi u drugom delu, gde se obrađuju granične vrednosti i diferencijabilnost funkcija više promenljivih.

6.1 Metrički prostori

6.1.1 Definicija metričkog prostora

- *Neka je dat neprazan skup X i funkcija $d : X \times X \mapsto \mathbf{R}$, tako da za svako $x, y, z \in X$ važi*

$$1^\circ\ d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \iff x = y,$$
$$2^\circ\ d(x,y) = d(y,x),$$
$$3^\circ\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Tada kažemo da je d **metrika**[1] *na skupu X, a uređeni par (X, d) se naziva* **metričkim prostorom.**

Prema tome, metrički prostor je zadat ako je dat skup i metrika na tom skupu.

Nejednakost 3° je **nejednakost trougla u metričkim prostorima.**

Pojam metrike je generalizacija pojma rastojanja između dve tačke. Naime, rastojanje između dve tačke je definisano kao dužina duži koja spaja te dve tačke:

$$d_1(x, y) = |x - y| \qquad \text{(na pravoj)},$$

$$d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \text{(u ravni)},$$

$$d_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad \text{(u prostoru)}.$$

Ovako definisane metrike su **Euklidske metrike** *ili* **uobičajene metrike** *na skupovima $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$, respektivno.*

Nejednakost trougla za Euklidske metrike u $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$ ima geometrijsku interpretaciju: dužina svake stranice trougla nije veća od zbira dužina ostale dve stranice.

I u skup $\mathbf{R}^n$ $(n > 3)$ može da se uvede Euklidska metrika pomoću

$$d_n\big((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\big) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}\,.$$

1035. Odrediti sve brojeve a i b za koje je

$$d(x, y) = |ax + by| \qquad (x, y, \in \mathbf{R})$$

metrika na skupu realnih brojeva.

Rešenje. Uslove $d(x, y) \geq 0$ je ispunjen za svako $a, b \in \mathbf{R}$. Sledeći uslov koji metrika treba da zadovoljava je $d(x, x) = 0$, tj. $(a+b)x = 0$ za svako $x \in \mathbf{R}$, odakle je $b = -a$. Stoga je

$$d(x, y) = |a| \cdot |x - y|\,. \tag{1}$$

Ako je $x \neq y$, tada $d(x, y)$ treba da bude različito od nule, što je ispunjeno samo za $a \neq 0$. Lako se proverava da su ostali uslovi iz definicije metrike zadovoljeni sa $d(x, y)$ kao u (1). Prema tome, d je metrika ako i samo ako je $b = -a$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

1036. Za koje realne vrednosti p je $|x - y|^p$ metrika u skupu realnih brojeva?

Rezultat. Samo za $p = 1$.

[1] Funkcija d može da uzima samo konačne vrednosti, tj. mora da bude definisana i konačna za svaki par $(x, y) \in X \times X$.

1037. Neka je X proizvoljan neprazan skup i neka je d funkcija definisana na $X \times X$ sa

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x = y, \\ 1 & \text{ako je } x \neq y. \end{cases}$$

Dokazati da je (X,d) metrički prostor.

Primedba. Ovako definisana metrika naziva se **diskretnom metrikom**.

1038. Neka je d proizvoljna funkcija na skupu $X \times X$ za koju važi nejednakost trougla. Dokazati da je $d(x,y) \geq 0$ za svako $x, y \in X$.

Primedba. Iz ovog rezultata sleduje da je prvi deo tačke 1° u definiciji metrike suvišan, jer je posledica tačke 3°. Zato u narednim zadacima nećemo ispitivati da li je $d(x,y) \geq 0$ ako su zadovoljeni ostali uslovi.

Rešenje. Ako primenimo nejednakost trougla na tačke $x, y, z \in X$, pri čemu je $y = z$, dobijamo

$$d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,x)\,,$$

odakle je $d(y,x) \geq 0$ za svako $x, y \in X$.

1039. Neka je $\mathbf{C}[a,b]$ skup svih funkcija neprekidnih na $[a,b]$ (zdesna u a i sleva u b), gde je $a < b$. Ako je, za $x, y \in \mathbf{C}[a,b]$,

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\ \mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

ispitati da li je $(\mathbf{C}[a,b], d)$ metrički prostor.

Rešenje. Skup $\mathbf{C}[a,b]$ je neprazan skup. "Tačke" ovog skupa su funkcije: na primer, jedna "tačka" je funkcija $x \mapsto \sin x$, koja je neprekidna na bilo kom segmentu $[a,b]$. Potrebno je ispitati da li funkcija definisana u (1) zadovoljava aksiome metrike.

Prva aksioma je $d(x,y) = 0 \iff x = y$. Deo "$\Leftarrow$" je trivijalno dokazati : Ako je $x = y$, tada je $x(t) = y(t)$ za svako $t \in [a,b]$, pa je $d(x,y) = 0$. Umesto da dokazujemo "$\Rightarrow$", dokazaćemo da važi ekvivalentno tvrđenje: $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$. Pretpostavimo da je $x \neq y$, i neka je $f(t) = |x(t) - y(t)|$. Tada je f nenegativna funkcija, i postoji $t_0 \in [a,b]$ tako da $f(t_0) > 0$. Kako je f neprekidna funkcija, postoji neki interval $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$, $\alpha < \beta$, oko tačke t_0 u kome je $f(t) > 0$ (Ako je t_0 jedna od tačaka a, b, tada ćemo imati $\alpha = a$ ili $\beta = b$). Odavde je

$$d(x,y) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\beta^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0\,,$$

jer su svi sabirci nenegativni, a drugi je pozitivan.

Druga aksioma (simetrija) je očigledno zadovoljena .

Treća aksioma (nejednakost trougla) dokazuje se polazeći od nejednakosti trougla za realne brojeve. Naime, za svako fiksirano $t \in [a,b]$ važi

$$(2)\quad |x(t)-z(t)| = |(x(t)-y(t))+(y(t)-z(t))| \le |x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)| .$$

Integracijom u (2) u granicama od a do b dobija se

$$d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z) ,$$

što je i trebalo dokazati.

Primedba. Najteži deo u gornjem dokazu je dokaz da $d(x,y)=0$ implicira $x=y$ (odnosno da iz $x \neq y$ sledi $d(x,y)>0$). Ključnu ulogu u tom dokazu ima neprekidnost funkcije $f(t)=|x(t)-y(t)|$, odnosno neprekidnost funkcija x i y. I zaista, metrika d je definisana i konačna i na skupu svih integrabilnih funkcija na $[a,b]$, ali $d(x,y)=0$ ne implicira $x=y$. Na primer, ako je $x(t)=y(t)$ za svako $t \neq t_0 \in [a,b]$ i $x(t_0)=y(t_0)+1$, tada je $d(x,y)=0$, ali $x \neq y$.

1040. Neka je $\mathbf{C}(A)$ skup svih neprekidnih realnih funkcija definisanih na skupu $A \subset \mathbf{R}$. Neka je, za $x,y \in \mathbf{C}(A)$,

$$d(x,y) = \sup_{t\in A} |x(t)-y(t)| .$$

a) Ako je $A=[a,b]$, pokazati da je $(\mathbf{C}(A),d)$ metrički prostor.

b) Pokazati da za $A=\mathbf{R}$, funkcija d nije metrika na $\mathbf{C}(\mathbf{R})$, ali jeste na jednom podskupu skupa $\mathbf{C}(\mathbf{R})$.

Rešenje. Očigledno je da je $d(x,y)=0$ ako i samo ako $x=y$, tj. $x(t)=y(t)$ za svako $t \in A$.[1] Pored toga, ova funkcija je i simetrična, $d(x,y)=d(y,x)$. Nejednakost trougla sledi iz (videti zadatak 408 na strani 147):

$$\begin{aligned}\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)| &= \sup_{t\in A}\big|\big(x(t)-z(t)\big)+\big(z(t)-y(t)\big)\big| \\ &\le \sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)| .\end{aligned}$$

Međutim, sve što je rečeno važi samo pod uslovom da je supremum u definiciji funkcije $d(x,y)$ konačan. Dakle, d će biti metrika na $\mathbf{C}(A)$ ako i samo ako za svaku neprekidnu funkciju f definisanu na A, važi

$$(1)\qquad \sup_{t\in A}|f(t)| < +\infty .$$

Naime, u tom slučaju ćemo za svake dve funkcije $x,y \in \mathbf{C}(A)$ imati $d(x,y) = \sup_{t\in A}|f(t)| < +\infty$, gde je $f=x-y$.

[1] Ovde se podrazumeva da je skup A domen svih funkcija koje posmatramo, tako da su dve funkcije jednake ako su jednake na A, bez obzira na ponašanje van skupa A.

Kako svaka neprekidna funkcija na $A = [a, b]$ dostiže svoj (konačan) maksimum, uslov (1) je ispunjen u slučaju a).

Ako je $A = \mathbf{R}$, uslov (1) nije ispunjen za sve neprekidne funkcije (na primer, nije ispunjen za funkciju $f(t) = t$).

Obeležimo sa S skup svih funkcija definisanih i neprekidnih na $\mathbf{R}$, koje su jednake nuli van nekog zatvorenog intervala (koji može da bude različit za različite funkcije). Zbir dve funkcije iz S takođe pripada skupu S, što nije teško videti.

Neka je $f \in S$, i neka je $f(t) = 0$ za $t \notin [a, b]$. Tada je

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| < +\infty ,$$

iz istog razloga kao u slučaju a). Prema tome, d je metrika na skupu S.

1041. Neka su f i g neprekidne funkcije na skupu realnih brojeva. Neka je

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\max\limits_{|t| \le n} |f(t) - g(t)|}{1 + \max\limits_{|t| \le n} |f(t) - g(t)|} .$$

Dokazati da je d metrika.

1042. Neka je S skup svih realnih nizova. Za nizove $x = \{x_n\}$ i $y = \{y_n\}$ definišimo $d(x, y) = 0$ ako je $x_n = y_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$, odnosno $d(x, y) = 1/k$, gde je k najmanji prirodan broj n za koji je $x_n \neq y_n$.

Dokazati da je (S, d) metrički prostor.

6.1.2 Otvoreni i zatvoreni skupovi

U metričkom prostoru (X, d) definišemo sledeće pojmove:

- **Kugla** *sa centrom u tački a i poluprečnikom $r > 0$ je skup*

$$K_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} .$$

Ovako definisana kugla se naziva i **otvorenom kuglom**. *Skup svih tačaka $x \in X$ za koje je $d(x, a) \le r$ $(r \ge 0)$ je* **zatvorena kugla**.

- **ε–okolina tačke** *x je otvorena kugla sa centrom u tački x i poluprečnikom $\varepsilon > 0$.* **Okolina** *tačke x je svaka ε–okolina za neko (dato ili neodređeno) $\varepsilon > 0$, tj. svaka otvorena kugla sa centrom u x.*

- *Za skup $A \subset X$ kažemo da je* **otvoren skup** *ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu.*

- **Zatvoren skup** *je svaki skup čiji je komplement (u odnosu na X) otvoren.*

- *Za metrike d_1 i d_2 definisane na istom skupu X kažemo da su* **ekvivalentne metrike** *ako svaka okolina proizvoljne tačke $x \in X$ u metrici d_1 sadrži neku okolinu tačke x u metrici d_2 i obrnuto.*

✓ *Ako su metrike d_1 i d_2 na skupu X ekvivalentne, tada je svaki otvoren skup u (X, d_1) otvoren i u (X, d_2) i obrnuto.*

- **Rastojanje tačke a od skupa A** *definiše se sa*

$$d(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x).$$

- **Dijametar skupa A** *definiše se sa*

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

- *Za skup A kažemo da je* **ograničen skup** *ako je njegov dijametar konačan.*

1043. Šta su kugle u Euklidskim metrikama na $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$?

Rešenje. Euklidska kugla sa centrom u tački a i poluprečnikom r na skupu $\mathbf{R}$ je skup tačaka $x \in \mathbf{R}$ takvih da je

$$|x - a| < r,$$

a to je interval $(a - r, a + r)$.

U ravni, kugla sa centrom u (a, b) i poluprečnikom r je skup tačaka (x, y) za koje važi nejednakost

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r,$$

tj. krug sa centrom u (a, b) i poluprečnikom r.

U prostoru, kugla sa centrom u (a, b, c) i poluprečnikom r je skup tačaka (x, y, z) za koje je

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r.$$

Ovo je unutrašnjost kugle poluprečnika r sa centrom u tački (a, b, c). Naziv "kugla" je i preuzet iz $\mathbf{R}^3$.

1044. Dat je skup $X = [a, b]$ sa Euklidskom metrikom d. Šta je kugla sa centrom u $x_0 \in [a, b]$ i poluprečnikom ε u metričkom prostoru (X, d)? Šta je kugla sa centrom u a i poluprečnikom ε ?

Rešenje. Kugla sa centrom u x_0 i poluprečnikom $\varepsilon > 0$ u (X, d) je skup onih tačaka iz X koje pripadaju intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, dakle, to je skup

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [a, b].$$

Ako je $\varepsilon \leq b - a$, tada je kugla sa centrom u a i poluprečnikom ε skup $[a, a + \varepsilon)$; ako je $\varepsilon > b - a$, tada je to skup $[a, b]$, tj. ceo prostor.

1045. Ako je (X, d) metrički prostor, definišimo $D(x, y) = f(d(x, y))$, gde je $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}$ neopadajuća funkcija, takva da je

$$1^\circ\ f(t) = 0 \iff t = 0, \qquad 2^\circ\ f(u + v) \leq f(u) + f(v) \quad \text{za svako } u, v \geq 0.$$

a) Dokazati da je (X, D) metrički prostor. **b)** Dokazati da su metrike d i D ekvivalentne.

Rešenje. **a)** Dokazaćemo da je D metrika na skupu X, ako je d metrika na istom skupu.

(*i*) Iz 1° sledi da je $D(x, y) = f(d(x, y)) = 0$ ako i samo ako je $d(x, y) = 0$, a kako je d metrika, ovo je ekvivalentno sa $x = y$.

(*ii*) Funkcija D je simetrična jer je i d simetrična:

$$D(x, y) = f(d(x, y)) = f(d(y, x)) = D(y, x).$$

(*iii*) Pođimo od

$$D(x, y) + D(y, z) = f(d(x, y)) + f(d(y, z)) \geq f(d(x, y) + d(y, z)),$$

gde poslednja nejednakost važi zbog 2°. Dalje, iz nejednakosti trougla za d imamo da je $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, pa iz osobine monotonosti funkcije f dobijamo

$$f(d(x, y)) + f(d(y, z)) \geq f(d(x, z)) = D(x, z).$$

Ovim je dokazana i nejednakost trougla za D.

b) Kako je funkcija f neopadajuća, za svako $r > 0$ postoji $\rho \leq +\infty$, takvo da je nejednakost $D(x, a) < r$ ekvivalentna sa $d(x, a) < \rho$. Prema tome, svaka kugla u metrici D je istovremeno i kugla u metrici d i obrnuto, pa su metrike d i D ekvivalentne.

1046. Neka je X metrički prostor sa metrikom d.

a) Pokazati da je

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

takođe jedna metrika na skupu X.

b) Dokazati da su d i d_1 ekvivalentne metrike.

c) Ako je d Euklidska metrika na $\mathbf{R}^2$, naći dijametar skupa $\mathbf{R}^2$ u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^2, d_1)$.

Rešenje. Neka je $f(t) = \dfrac{t}{1 + t}$. Dokazaćemo da funkcija f ispunjava uslove iz zadatka 1045. Očigledno je $f(t) = 0$ ako i samo ako je $t = 0$. Izvod funkcije f je nenegativan, pa je ona neopadajuća. Za nenegativne u, v imamo da je

$$\frac{u}{1 + u + v} \leq \frac{u}{1 + u} = f(u), \quad \frac{v}{1 + u + v} \leq \frac{v}{1 + v} = f(v),$$

odakle, sabiranjem, nalazimo da je $f(u+v) \leq f(u)+f(v)$, pa je i uslov 2° ispunjen. Kako je $d_1(x,y) = f(d(x,y))$, na osnovu zadatka 1045 zaključujemo da je d_1 metrika na X i da su metrike d i d_1 ekvivalentne.

Kako je, za svako $t \geq 0$,

$$\frac{t}{1+t} < 1 \quad \text{i} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{1+t} = 1,$$

supremum rastojanja između dve tačke u ravni u metrici d_1 jednak je 1, i to je dijametar skupa $\mathbf{R}^2$ u ovoj metrici.

1047. Neka je, za $a = (x_1, y_1)$ i $b = (x_2, y_2)$, funkcija d_m definisana na $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ sa

$$d_m(a,b) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Dokazati da je d_m metrika i da je ekvivalentna Euklidskoj metrici. Šta je kugla u ovoj metrici?

Rešenje. Očigledno je $d_m(a,b) = d_m(b,a)$, kao i $d_m(a,b) > 0$ $(a \neq b)$, $d_m(a,a) = 0$. Neka su a, b, c tačke iz $\mathbf{R}^2$ i neka je $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, $c = (x_3, y_3)$. Tada je

$$|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|, \quad |y_1 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|,$$

odakle zaključujemo da je (videti i zadatak 22)

$$\begin{aligned} d_m(a,c) &= \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|, |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\} \\ &= d_m(a,b) + d_m(b,c). \end{aligned}$$

Kugla poluprečnika r opisana oko tačke (x,y) je kvadrat stranice $2r$ čije se dijagonale seku u tački (x,y), a stranice su mu paralelne koordinatnim osama. Svaki takav kvadrat sadrži jedan krug sa centrom u (x,y) i obrnuto, svaki krug sa centrom u (x,y) sadrži jedan kvadrat sa centrom u (x,y) i stranicama koje su paralelne osama. Prema tome, data metrika je ekvivalentna Euklidskoj metrici.

1048. Neka je

$$d(a,b) = \max\{\alpha|x_1 - x_2|, \beta|y_1 - y_2|\},$$

gde su α, β pozitivni brojevi i $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$. Dokazati da je d metrika na $\mathbf{R}^2$. Šta je kugla u ovoj metrici?

Rezultat. Kugla poluprečnika r u ovoj metrici je pravougaonik sa stranicama dužine r/α i r/β koje su paralelne koordinatnim osama. Ova metrika je ekvivalentna Euklidskoj metrici.

1049. Neka su $a = (x_1, y_1)$ i $b = (x_2, y_2)$ tačke iz $\mathbf{R}^2$ i neka je

$$d_s(a, b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Dokazati da je $(\mathbf{R}^2, d_s)$ metrički prostor. Šta je kugla u ovoj metrici? Da li je ova metrika ekvivalentna Euklidskoj?

Rezultat. Kugla sa centrom u (x, y) je kvadrat sa centrom u (x, y) čije su dijagonale paralelne koordinatnim osama. Ova metrika je ekvivalentna Euklidskoj metrici.

1050. Neka je d diskretna metrika kao u zadatku 1037, tj. $d(x, y) = 1$ ako je $x \neq y$ i $d(x, x) = 0$. Ako uvedemo ovu metriku u skup $\mathbf{R}^2$, šta je kugla poluprečnika r? Da li je ova metrika ekvivalentna Euklidskoj metrici na $\mathbf{R}^2$?

Rešenje. Kugla poluprečnika r sa centrom u tački a je skup onih tačaka z iz $\mathbf{R}^2$ za koje važi $d(a, z) < r$. Na osnovu definicije metrike d zaključujemo da za $r > 1$ sve tačke $z \in \mathbf{R}^2$ zadovoljavaju ovaj uslov, pa je kugla ceo skup $\mathbf{R}^2$. U slučaju da je $r \leq 1$, samo tačka a pripada kugli.

Ova metrika nije ekvivalentna Euklidskoj. Na primer, unutar kugle poluprečnika 1 u metrici d ne nalazi se ni jedna Euklidska kugla (tj. krug) pozitivnog poluprečnika.

1051. Neka je $\mathbf{C}[0, 1]$ skup neprekidnih funkcija na $[0, 1]$ sa metrikom definisanom pomoću supremuma, kao u zadatku 1040. Šta je kugla u ovoj metrici?

Ako je $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, da li se g nalazi unutar kugle poluprečnika 1 opisane oko f?

Rešenje. Kugla poluprečnika r opisana oko $f \in \mathbf{C}[0, 1]$ je skup svih funkcija $g \in \mathbf{C}[0, 1]$ takvih da je

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)| < r.$$

Kako neprekidna funkcija $f - g$ dostiže maksimum na zatvorenom intervalu $[0, 1]$, supremum može da se zameni maksimumom, pa kugla poluprečnika r opisana oko f sadrži sve one funkcije g za koje je $|f(x) - g(x)| < r$ za svako $x \in [0, 1]$.

Ako je $f(x) = e^x$ i $g(x) = x$, tada je, na primer, $|f(1) - g(1)| = e - 1 > 1$, pa se g ne nalazi u kugli poluprečnika 1 opisanoj oko f.

1052. Da li su metrike definisane na skupu $\mathbf{C}[a, b]$ u zadacima 1039 i 1040 ekvivalentne?

Rezultat. Nisu.

1053. Dokazati da u skupu realnih brojeva sa Euklidskom metrikom važi:

a) Svaki otvoreni interval (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$ je otvoren skup.

b) Svaki zatvoreni interval $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ je zatvoren skup.

c) Skupovi $[a,b)$ i $(a,b]$ nisu ni otvoreni ni zatvoreni.

Rešenje. Podsetimo se da je u Euklidskoj metrici okolina tačke $x_0 \in \mathbf{R}$ interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ za neko $\varepsilon > 0$.

a) Neka je $x_0 \in (a,b)$. Neka je $\varepsilon = \min\{x_0-a, b-x_0\}$. Tada interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ pripada skupu (a,b). Prema tome, za svaku tačku $x_0 \in (a,b)$ postoji okolina koja se sadrži u (a,b), pa je skup (a,b) otvoren.

b) Dokazaćemo da je komplement skupa $[a,b]$ otvoren, odakle (po definiciji) sledi da je $[a,b]$ zatvoren. Neka je $x_0 \in (-\infty, a)$. Tada interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ pripada skupu $(-\infty, a)$ za $\varepsilon = a-x_0$. Ako $x_0 \in (b,+\infty)$, tada interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ pripada skupu $(b,+\infty)$ za $\varepsilon = x_0 - b$. Iz ovoga zaključujemo da je skup $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ otvoren.

c) Skup $[a,b)$ nije otvoren, jer ne postoji ni jedan interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sa $\varepsilon > 0$ koji se sadrži u $[a,b)$. Ovaj skup nije ni zatvoren, jer njegov komplement nije otvoren. Naime, za tačku b ne postoji okolina $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ koja se sadrži u komplementu skupa $[a,b)$.

1054. Neka je (X,d) metrički prostor. Dokazati:

a) Skupovi $\emptyset$ i X su otvoreni i zatvoreni.

b) Svaka otvorena kugla je otvoren skup.

c) Svaka zatvorena kugla je zatvoren skup.

d) Skup $\{a\}$ je zatvoren skup za svako $a \in X$.

Rešenje. a) Kako skup X sadrži svaku okolinu svake svoje tačke, iz definicije otvorenog skupa neposredno izlazi da je X otvoren skup. Prazan skup je zatvoren jer je njegov komplement X otvoren.

Prazan skup je i otvoren skup jer ne sadrži nijednu tačku, pa je uslov definicije otvorenog skupa formalno ispunjen. Skup X je tada zatvoren skup jer je njegov komplement otvoren.

b) Neka je $K_r(a)$ otvorena kugla sa centrom u $a \in X$ i poluprečnikom $r > 0$. Neka je $b \in K_r(a)$, pri čemu je $d(a,b) = \rho$, $0 \le \rho < r$. Ako je $\varepsilon < \dfrac{r-\rho}{2}$, tada imamo

$$d(x,b) < \varepsilon \Rightarrow d(x,a) \le d(x,b) + d(b,a) < \frac{r-\rho}{2} + \rho < r,$$

pa kugla $K_\varepsilon(b)$ pripada kugli $K_r(a)$. Prema tome, otvorena kugla $K_r(a)$ je otvoren skup.

c) Neka je $\bar{K}_r(a)$ zatvorena kugla sa centrom u a i poluprečnikom $r \ge 0$. Ako van ove kugle nema tačaka iz X, tada je $\bar{K}_r(a) = X$ a to je zatvoren skup na osnovu a). U suprotnom slučaju, neka je b proizvoljna tačka skupa X koja ne pripada posmatranoj kugli, tj. za koju je $d(a,b) = \rho > r$. Ako je $\varepsilon < \dfrac{\rho-r}{2}$ i ako je

$d(x,b) < \varepsilon$, tada iz $d(b,a) \leq d(b,x) + d(x,a)$ imamo da je

$$d(x,a) \geq d(b,a) - d(b,x) > \rho - \frac{\rho - r}{2} > r,$$

pa se kugla $K_\varepsilon(b)$ nalazi van zatvorene kugle $\bar{K}_r(a)$. Dakle, skup $\bar{K}_r^c(a)$ je otvoren, a $\bar{K}_r(a)$ je zatvoren skup.

d) Kako se zatvorena kugla $\bar{K}_r(a)$ za $r = 0$ svodi na skup $\{a\}$, iz dokazanog pod c) zaključujemo da je i skup $\{a\}$ zatvoren.

1055. Dokazati da u svakom metričkom prostoru važi:

a) Proizvoljna unija otvorenih skupova je otvoren skup.

b) Konačan presek otvorenih skupova je otvoren skup.

c) Konačna unija zatvorenih skupova je zatvoren skup.

d) Proizvoljan presek zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Rešenje. a) Neka su $\{A_i\}_{i\in I}$ dati otvoreni skupovi, gde je I skup indeksa koji može da ima proizvoljan kardinalni broj. Neka je $A = \cup_{i\in I} A_i$ i neka je x proizvoljna tačka skupa A. Tada postoji neko $i \in I$ tako da $x \in A_i$; kako je A_i otvoren skup, postoji neka okolina U tačke x tako da $U \subset A_i$, pa je takođe $U \subset A$. Prema tome, za svaku tačku x skupa A postoji okolina $U \subset A$, što znači da je A otvoren skup.

b) Neka su $A_1, \ldots, A_n$ otvoreni skupovi i neka je $A = \cap_{i=1}^n A_i$. Za proizvoljno $x \in A$ i za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, postoji kugla $K_{\varepsilon_i}(x) \subset A_i$. Neka je $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ (primetimo da je $\varepsilon_0 > 0$). Tada se $K_{\varepsilon_0}(x)$ sadrži u svakoj kugli $K_{\varepsilon_i}(x)$, pa se sadrži i u skupu A, što znači da je A otvoren skup.

c) Neka su $A_1, \ldots, A_n$ zatvoreni skupovi i neka je A njihova unija. Tada su skupovi $A_1^c, \ldots, A_n^c$ otvoreni, i prema dokazanom pod b), njihov presek je otvoren skup. Kako je

$$A^c = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c,$$

imamo da je A^c otvoren skup, pa je A zatvoren.

d) Neka su $\{A_i\}_{i\in I}$ zatvoreni skupovi i neka je A njihov presek. Kako je

$$A^c = \cup_{i\in I} A_i^c,$$

iz dokazanog pod a) sledi da je A^c otvoren skup, tj. da je A zatvoren.

1056. Navesti primer metričkog prostora i

a) niza otvorenih skupova čiji presek nije otvoren skup,

b) niza zatvorenih skupova čija unija nije zatvoren skup.

Rešenje. U skupu $\mathbf{R}$ sa uobičajenom metrikom, posmatrajmo otvorene intervale $A_n = (-1/n, 1/n), n \in \mathbf{N}$. Presek ovih skupova je zatvoren skup $\{0\}$. Neka je $B_n = [0, 1-1/n], n \in \mathbf{N}$. Tada je unija ovih skupova skup $[0, 1)$, koji nije zatvoren.

1057. Ako su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na skupu X i ako je $A \subset X$ otvoren (zatvoren) skup u (X, d_1), dokazati da je A otvoren (zatvoren) skup i u (X, d_2).

Rešenje. Ako je A otvoren skup u (X, d_1), tada za svako $x \in A$ postoji okolina $U \subset A$. Kako su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike, skup U sadrži jednu okolinu V u metrici d_2 i važi da je $V \subset U \subset A$. Dakle, skup A zajedno sa svakom svojom tačkom x sadrži i jednu njenu okolinu u metrici d_2, pa je A otvoren skup u (X, d_2).

1058. Neka je (x, d) metrički prostor u kome je dijametar skupa X konačan. Za $A, B \subset X$ definišimo

$$\rho(A, B) = \max\left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\right).$$

Ispitati da li je je ρ metrika na skupu svih zatvorenih podskupova skupa X.

6.1.3 Konvergencija u metričkom prostoru

- *Neka je x_n niz tačaka metričkog prostora (X, d). Ako za neko $a \in X$ važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad d(x_n, a) < \varepsilon\,,$$

  tada kažemo da niz x_n konvergira ka a i pišemo $\lim x_n = a$.

- *Ako postoji neko $a \in \mathbf{R}$ tako da je $\lim x_n = a$, tada kažemo da je niz x_n konvergentan; u suprotnom slučaju je divergentan.*[1]

Konvergencija nizova u metričkom prostoru se svodi na konvergenciju realnih nizova, jer je

$$\lim x_n = a \iff \lim d(x_n, a) = 0\,.$$

U terminima okoline (videti 6.1.2) i "skoro svi", $\lim x_n = a$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza x_n.

Dajemo sada neke osobine skupova koje su u vezi sa konvergencijom.

- *Tačka a je* **tačka nagomilavanja** *skupa A ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka skupa A, različita od a.*

- *Za skup A kažemo da je* **kompaktan** *ako svaki niz $x_n \in A$ ima bar jedan konvergentan podniz čija granična vrednost pripada skupu A.*

- *Familiju skupova $\{B_i\}_{i \in I}$ nazivamo* **pokrivačem** *skupa A ako je $\cup_{i \in I} B_i \supset A$. Pokrivač je otvoren ako ga čine otvoreni skupovi.*

[1] Definicija konvergencije realnog niza se svodi na ovu definiciju, sa $d(x, y) = |x - y|$, u svim slučajevima, osim u slučaju kada $\lim x_n = \pm\infty$, što je specifičnost skupa $\mathbf{R}$. Pojam *određeno divergentan niz* ne definiše se u metričkim prostorima.

- *Ako je $\{B_i\}_{i\in I}$ pokrivač skupa A, svaki podskup skupa $\{B_i\}_{i\in I}$ koji je takođe pokrivač skupa A naziva se* **podpokrivačem** *skupa A.*

√ *Skup A u metričkom prostoru (X,d) je kompaktan ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač skupa A sadrži jedan konačan podpokrivač.*

Neka je $\{x_n\}$ niz u metričkom prostoru (X,d).

- *Kažemo da je $\{x_n\}$* CAUCHY**jev niz** *ako*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbf{N})(\forall m,n\geq n_0)\quad d(x_m,x_n)<\varepsilon\,.$$

Svaki konvergentan niz je CAUCHY*jev niz, dok obrnuto ne mora da važi u opštem slučaju.*

- *Metrički prostor (X,d) je* **kompletan metrički prostor** *ako je svaki* CAUCHY*jev niz u X konvergentan.*
- *Analogno, skup A u metričkom prostoru (X,d) je kompletan, ako svaki* CAUCHY*jev niz $x_n\in A$ ima graničnu vrednost u A. Dakle, skup A je kompletan ako je metrički prostor (A,d) kompletan.*

√ *Metrički prostor $\mathbf{R}^n$ sa Euklidskom metrikom (ili sa metrikom koja je ekvivalentna Euklidskoj) je kompletan metrički prostor, za svako $n=1,2,\ldots$*

√ *Ako je $A\subset X$ zatvoren skup, i ako je (X,d) kompletan metrički prostor, tada je A kompletan skup.*[1]

1059. Dokazati: Ako je A zatvoren skup i ako za skoro sve članove konvergentnog niza $\{x_n\}$ važi $x_n\in A$, tada i $\lim x_n\in A$.

Rešenje. Neka je $x_n\in A$ za skoro svako n, gde je A zatvoren skup. Pretpostavimo da postoji $\lim x_n=x$. Treba dokazati da $x\in A$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $x\in A^c$. Kako je A^c otvoren skup, postoji neka okolina U tačke x takva da $U\subset A^c$. Kako je $\lim x_n=x$, u okolini U nalaze se skoro svi članovi niza, što znači da se skoro svi članovi niza nalaze u skupu A^c. Ovo je, međutim, u suprotnosti sa pretpostavkom da skoro svi članovi niza pripadaju skupu A.

1060. Neka je A zatvoren skup u metričkom prostoru (X,d) i neka je $x\in X$. Dokazati da $x\in A$ ako i samo ako $d(x,A)=0$.

[1] Osobina kompletnosti je, na izvestan način, proširenje osobine zatvorenosti. Naime, može se pokazati da ako CAUCHYjev niz ne konvergira u X, tada on konvergira u nekom prostoru X' sa istom metrikom, gde je $X'\supset X$. Za svaki nekompletan skup X sa metrikom d postoji skup $X'\supset X$ koji je kompletan sa istom metrikom.

Rešenje. Ako je $x \in A$, tada je očigledno $d(x, A) = d(x, x) = 0$. Dokažimo drugi deo tvrđenja.

Neka je $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} = 0$. Prema definiciji infimuma imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A) \quad d(x, y) - \varepsilon < 0 .$$

Dakle, za svako $\varepsilon = 1/n$ postoji $y_n \in A$ tako da je $d(x, y_n) - 1/n < 0$. Kako je uvek $d(x, y_n) \geq 0$, za sve članove niza y_n važi

$$0 \leq d(x, y_n) < \frac{1}{n} ,$$

pa je $\lim d(x, y_n) = 0$, tj. $\lim y_n = x$. Kako je A zatvoren skup i $y_n \in A$, zaključujemo da i $x \in A$, što je i trebalo dokazati.

1061. Konstruisati primer skupa A i tačke x u nekom metričkom prostoru, tako da $d(x, A) = 0$, ali $x \notin A$.

Rešenje. Na primer, na skupu $\mathbf{R}$ sa uobičajenom metrikom: $A = (0, 1)$, $x = 0$.

1062. Dokazati: U metričkom prostoru (X, d), tačka a je tačka nagomilavanja skupa A ako i samo ako postoji niz različitih tačaka $x_n \in A$ koji konvergira ka a.

Rešenje. Neka je dat skup A i tačka a. Ako postoji niz $x_n \in A$ čiji svi članovi nisu međusobno jednaki, tako da je $\lim x_n = a$, tada se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza $\{x_n\}$, pa je a tačka nagomilavanja skupa A.

Obrnuto, neka je a tačka nagomilavanja skupa A. Tada svaka kugla opisana oko a sadrži bar jednu tačku iz A, različitu od a. Neka je $x_1 \neq a$ tačka koja pripada skupu A i koja se nalazi u kugli poluprečnika 1 opisanoj oko a. Neka je $d(a, x_1) = \varepsilon_1 < 1$. Izaberimo $x_2 \in A$ u kugli poluprečnika $\varepsilon_1/2$ opisanoj oko a. Neka je $\varepsilon_2 = d(a, x_2) < 1/2$. Izaberimo $x_3 \in A$ u kugli poluprečnika $\varepsilon_2/2$ opisanoj oko a. Produženjem ovog postupka dobijamo niz različitih tačaka $x_n \in A$ koji konvergira ka a.

1063. Dokazati da je skup A u proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) zatvoren ako i samo ako svaka tačka nagomilavanja skupa A pripada skupu A.

Rešenje. Pretpostavimo da je skup A zatvoren, i neka je a tačka nagomilavanja skupa A. Treba dokazati da $a \in A$. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \in A^c$. Kako svaka okolina tačke a sadrži elemente iz A, to znači da nijedna okolina tačke a ne pripada skupu A^c, pa skup A^c nije otvoren, odakle sledi da A nije zatvoren, što je protivno pretpostavci.

Obrnuto, neka skup A sadrži svaku svoju tačku nagomilavanja. Neka je $x \in A^c$ proizvoljno. Kako x nije tačka nagomilavanja skupa A (jer se sve takve tačke nalaze u A), postoji jedna okolina tačke x koja ne sadrži elemente iz A, pa se, prema tome,

ta okolina sadrži u A^c. Kako je x proizvoljna tačka iz A^c, skup A^c je otvoren, pa je A zatvoren.

Primedba. Iz dokazanog tvrđenja može se zaključiti da je svaki skup koji nema tačaka nagomilavanja zatvoren skup.

1064. Neka su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na nepraznom skupu X i neka je $\{x_n\}$ niz elemenata skupa X. Ako je $\lim x_n = x \in X$ u metrici d_1, dokazati da je $\lim x_n = x$ i u metrici d_2.

Rešenje. Neka je $\lim x_n = x$ u metrici d_1. Neka je V proizvoljna okolina tačke x u metrici d_2. Kako su metrike d_1 i d_2 ekvivalentne, postoji okolina U tačke x u metrici d_1, takva da je $U \subset V$. Po pretpostavci, skoro svi članovi niza pripadaju okolini U, pa stoga pripadaju i okolini V. Na osnovu toga zaključujemo da je $\lim x_n = x$ u metrici d_2.

1065. Dokazati da je u svakom metričkom prostoru (X, d) svaki kompaktan skup zatvoren.

Rešenje. Neka je A kompaktan skup. Ako on nema tačaka nagomilavanja, tada je to zatvoren skup (videti primedbu iza zadatka 1063). U suprotnom slučaju, neka je a tačka nagomilavanja skupa A. Tada postoji niz $\{x_n\}$ tačaka iz A koji konvergira ka a. Prema definiciji kompaktnog skupa, bar jedan podniz ovog niza ima graničnu vrednost u A. Ali, kako je niz $\{x_n\}$ konvergentan, svaki njegov podniz ima istu graničnu vrednost a; dakle $a \in A$. Prema tome, svaka tačka nagomilavanja skupa A pripada tom skupu, pa je on zatvoren na osnovu zadatka 1063.

1066. U metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$, gde je d Euklidska metrika, skup je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen. Dokazati.

Rešenje. Neka je A ograničen skup i neka je $\{x_n\}$ dati niz sa elementima koji pripadaju skupu A. Prema BOLZANO–WEIERSTRASSovom stavu, postoji jedan konvergentan podniz niza $\{x_n\}$. Ako je A zatvoren skup, granična vrednost ovog podniza pripada skupu A, pa je A kompaktan skup.

Pretpostavimo sada da je A kompaktan skup. Na osnovu zadatka 1065, skup A je zatvoren. Ako A ne bi bio ograničen skup, postao bi niz $\{x_n\}$ tačaka iz A koji ima graničnu vrednost $+\infty$ ili $-\infty$. Nijedan njegov podniz ne može da ima konačnu graničnu vrednost, pa skup A ne bi bio kompaktan. Dakle, A je ograničen skup.

1067. Dokazati da zatvorena kugla u metričkom prostoru $\mathbf{C}[0, 1]$ sa integralnom metrikom kao u zadatku 1039 nije kompaktan skup.

Rešenje. Dovoljno je da dokažemo da zatvorena kugla K sa centrom u 0 i poluprečnikom 1 nije kompaktan skup (objasnite zašto je to dovoljno). To ćemo dokazati tako što ćemo konstruisati niz funkcija $t \mapsto x_n(t)$ za koji je $d(x_n, 0) = 1$ a ni jedan podniz niza x_n nije konvergentan.

Neka je

$$x_n(t) = \begin{cases} n\pi \sin 2n\pi t\,, & \text{za } t \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{u ostalim tačkama intervala } (0,1)\,. \end{cases}$$

Sve funkcije x_n pripadaju kugli K, jer je

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) &= \int_0^1 |x(t)|\ \mathrm{d}t \\ &= n\pi \int_{1/2n}^{1/n} |\sin 2n\pi t|\ \mathrm{d}t = 1\,. \end{aligned}$$

S druge strane, za $m > 2n$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{1/2m}^{1/m} |x_m(t)|\ \mathrm{d}t + \int_{1/2n}^{1/n} |x_n(t)|\ \mathrm{d}t = 2\,. \end{aligned}$$

Odavde sleduje da ni jedan podniz niza x_n nije CAUCHYjev, prema tome nije ni konvergentan (videti i zadatak 1069). Kako niz $x_n \in K$ nema ni jedan konvergentan podniz, zaključujemo da skup K nije kompaktan.

Primedba. Za razliku od konačno dimenzionalnih prostora $\mathbf{R}^n$ u kojima je svaki ograničen i zatvoren skup kompaktan, to ne važi u opštem slučaju, kao što se vidi iz ovog zadatka.

1068. Dokazati da je u svakom metričkom prostoru svaki konvergentan niz CAUCHYjev.

Rešenje. Neka je $\lim x_n = a$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da za svako $n > n_0$ važi da je $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Za $m, n > n_0$ imamo da je

$$|x_m - x_n| \le |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

što znači da je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz.

1069. Ako za svako $n \in \mathbf{N}$ postoji m_0 tako da za svako $m > m_0$ važi $d(x_m, x_n) > \varepsilon > 0$, dokazati da nijedan podniz niza $\{x_n\}$ nije konvergentan.

1070. Neka je f_n niz funkcija neprekidnih na $[a, b]$. Dokazati da f_n uniformno konvergira ka funkciji f ako i samo ako je

$$\lim_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0\,,$$

gde je

(1) $$d(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| .$$

Zatim pokazati da je f takođe neprekidna funkcija.

Primedba. Na osnovu ovog rezultata, metrika d definisana sa (1) naziva se **metrikom uniformne konvergencije**.

Uputstvo. Videti 5.2.1 na strani 430.

1071. Dokazati da je skup neprekidnih funkcija na $[a,b]$, sa metrikom uniformne konvergencije kompletan metrički prostor.

Rešenje. Neka je f_n CAUCHYjev niz u $\mathbf{C}[a,b]$. Tada važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m,n \geq n_0) \quad \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

Odavde zaključujemo da je, za svako fiksirano $t \in [a,b]$, niz realnih brojeva $f_n(t)$ CAUCHYjev. Zbog kompletnosti skupa realnih brojeva postoji konačan $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$, nazovimo ga $f(t)$. Ovim, međutim, još nismo pokazali da je niz f_n konvergentan u metrici d, jer, da bi to bilo tako, funkcija f treba da pripada skupu $\mathbf{C}[a,b]$, tj. da bude neprekidna. Neprekidnost ove funkcije sleduje iz zadatka 1070.

1072. Da li je skup $\mathbf{C}[a,b]$ sa integralnom metrikom kompletan metrički prostor?

Rezultat. Nije.

1073. Banachov stav o nepokretnoj tački u metričkim prostorima. Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i neka je f preslikavanje $X \mapsto X$. Ako postoji realan broj q, $0 < q < 1$, tako da važi

$$(\forall x,y \in X) \quad d(f(x),f(y)) \leq q \cdot d(x,y),$$

tada je f **kontrakcija** na metričkom prostoru (X,d) (uporediti sa definicijom u 2.4.3 na strani 105).

Dokazati: Ako je f kontrakcija na (X,d), tada jednačina

$$x = f(x)$$

ima na skupu X jedno i samo jedno rešenje $x \in X$ (nepokretna tačka preslikavanja f).

Rešenje. Neka su ispunjeni uslovi zadatka i neka je x_0 proizvoljna tačka iz skupa X. Definišimo niz $\{x_n\}$ pomoću

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad n = 1,2,\ldots$$

Dokazaćemo da je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz. Polazimo od nejednakosti

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &= d(f(x_0),f(x_1)) \le qd(x_0,x_1) \\ d(x_2,x_3) &= d(f(x_1),f(x_2)) \le qd(x_1,x_2) \le q^2 d(x_0,x_1) \\ &\cdots \quad \cdots\cdots \\ d(x_{n-1},x_n) &= d(f(x_{n-2},f(x_{n-1})) \le qd(x_{n-2},x_{n-1}) \le q^{n-1}d(x_0,x_1)\,. \end{aligned}$$

Odavde imamo da je, za svako $n,p \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\ &\le (q^n + q^{n-1} + \cdots + q^{n+p-1})d(x_0,x_1) \\ &= q^n \frac{1-q^p}{1-q} d(x_0,x_1) < \frac{q^n}{1-q} \to 0\,, \end{aligned}$$

pa je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz. Kako je (X,d) kompletan prostor, postoji granična vrednost $x = \lim x_n$. Ovako određeno x je nepokretna tačka preslikavanja f, jer je

$$\begin{aligned} d(x,f(x)) &\le d(x,x_n) + d(x_n,f(x)) = d(x,x_n) + d(f(x_{n-1}),f(x)) \\ &\le d(x,x_n) + d(x_{n-1},x) \to 0 \qquad (n \to +\infty)\,, \end{aligned}$$

odakle je $d(x,f(x)) = 0$, tj. $x = f(x)$.

Dokažimo da je x jedina nepokretna tačka. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji još jedna nepokretna tačka y preslikavanja f. Tada bismo imali da je

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) \le qd(x,y)\,,$$

odakle se, za $d(x,y) > 0$ dobija $q \ge 1$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $q < 1$. Prema tome, $d(x,y) = 0$, odnosno $x = y$.

6.1.4 Preslikavanja metričkih prostora

Neka su (X,d) i (Y,ρ) metrički prostori.

- *Svako preslikavanje $f : (X,d) \mapsto (Y,\rho)$ nazivamo* **operatorom.**
- *Neka je $f : (X,d) \mapsto (Y,\rho)$ dati operator; neka je $a \in X$ tačka nagomilavanja skupa X i neka je $y \in Y$. Kažemo da je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = y$$

ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \quad 0 < d(x,a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x),y) < \varepsilon\,.$$

- *Kažemo da je operator f neprekidan u tački a ako je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

1074. Neka je f operator koji preslikava (X, d) u (Y, ρ) i neka je a tačka nagomilavanja skupa X. Dokazati da je $\lim_{x \to a} f(x) = y \in Y$ ako i samo ako za svaku okolinu W tačke y postoji okolina U tačke a takva da je $f(U \setminus \{a\}) \subset W$.

1075. Neka su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na skupu X. Neka je f operator koji preslikava metrički prostor (X, d_1) u metrički prostor (Y, ρ) i neka je $\lim_{x \to a} f(x) = y$. Dokazati da je $\lim_{x \to a} f(x) = y$ i u metrici d_2 na skupu X.

Rešenje. Neka je $\lim_{x \to a} f(x) = y$ u metrici d_1 na X. Za proizvoljnu okolinu W tačke $y \in Y$ postoji, prema zadatku 1074, okolina U tačke a u metrici d_1, takva da je $f(U \setminus \{a\}) \subset W$. Kako su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike, skup U sadrži neku okolinu V u metrici d_2, pa je i $V \setminus \{a\} \subset U \setminus \{a\}$, odnosno

$$f(V \setminus \{a\}) \subset f(U \setminus \{a\}) \subset W,$$

što znači da je $\lim_{x \to a} f(x) = y$ u metrici d_2 na skupu X.

1076. Neka je (X, d) proizvoljan metrički prostor i neka je x_0 data tačka. Dokazati da je operator $f : X \mapsto \mathbf{R}$ definisan pomoću $f(x) = d(x, x_0)$ neprekidan u svakoj tački $x \in X$.

Rešenje. Iz nejednakosti trougla u metričkom prostoru imamo, za dve proizvoljne tačke $x, y \in X$:

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) \tag{1}$$
$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0)\ . \tag{2}$$

Nejednakosti (1) i (2) možemo napisati u obliku

$$d(x, x_0) - d(y, x_0) \leq d(x, y)\ , \tag{3}$$
$$d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(y, x)\ . \tag{4}$$

Kako je $d(x, y) = d(y, x)$, iz (3) i (4) imamo da je

$$-d(x, y) \leq d(x, x_0) - d(y, x_0) \leq d(x, y)\ ,$$

odnosno,

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)\ . \tag{5}$$

Ako je $f(x) = d(x, x_0)$ za fiksno x_0, tada iz (5) sledi

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad d(x, y) \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\ ,$$

pa je f neprekidan operator (po definiciji, sa $\delta = \varepsilon$).

1077. Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $a \in X$, $b \in X$, $a \neq b$. Pokazati da je sa

$$f(x) = \frac{d(x,a)}{d(x,a)+d(x,b)} \qquad (x \in X)$$

definisano neprekidno preslikavanje X u $\mathbf{R}$, za koje važi

$$f(a) = 0\,, \quad f(b) = 1\,, \qquad 0 < f(x) < 1 \quad (x \neq a, b)\,.$$

Ako je $X = \mathbf{R}^2$, rešiti jednačinu $f(x) = 1/3$ u slučajevima kada je $d = d_e$ (Euklidska metrika), $d = d_m$ (metrika iz zadatka 1047), $d = d_s$ (metrika iz zadatka 1049).

1078. Neka je $\mathbf{C}[0,1]$ metrički prostor funkcija neprekidnih na $[0,1]$, sa metrikom definisanom pomoću supremuma (zadatak 1040). Neka je preslikavanje $\varphi : \mathbf{C}[0,1] \mapsto \mathbf{C}[0,1]$ definisano sa $\varphi(f) = F$, gde je

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Ispitati da li je φ neprekidan operator.

Rešenje. Primetimo najpre da je, na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti,

$$|F(x)| \leq x \cdot \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,,$$

odakle je, za $x \in [0,1]$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |F(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

Ako f zamenimo sa $f - g$ i uvedemo oznaku $\varphi(g) = G$, dobijamo da je

$$\sup_{x\in[0,1]} |F(x) - G(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,,$$

odnosno,

$$d(\varphi(f), \varphi(g)) \leq d(f,g)\,.$$

Za fiksirano $\varepsilon > 0$ ako uzmemo $\delta = \varepsilon$, imamo

$$d(f,g) < \delta \Rightarrow d(\varphi(f), \varphi(g)) < \varepsilon\,,$$

što znači da je φ neprekidan operator.

1079. Neka je F operator koji svaku funkciju f iz $\mathbf{C}[0,1]$ sa integralnom metrikom (zadatak 1039) preslikava u realan broj $f(1/2)$, tj. $F(f) = f(1/2)$. Da li je F neprekidan operator?

Rezultat. Nije.

6.1.5 Normirani prostor

- *Neka je X vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{C}$ i neka je na skupu X definisana nenegativna funkcija $x \mapsto \|x\|$ takva da je*

$$1^\circ\ \|0\| = 0\,, \quad \|x\| > 0 \text{ za } x \neq 0,$$
$$2^\circ\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\,,$$
$$3^\circ\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \textit{(nejednakost trougla)}.$$

Tada se funkcija $\|x\|$ naziva **normom** *elementa x, a uređen par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normiranim prostorom.*

✓ *Ako je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor, tada se može uvesti metrika pomoću*

$$d(x, y) = \|x - y\|\,.$$

U skupovima $\mathbf{R}^n$, posebnu ulogu ima **Euklidska norma** *definisana sa*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Ako je (X, d) proizvoljan metrički prostor, on ne mora da bude i normiran. Uočiti da kod metričkog prostora X može da bude proizvoljan neprazan skup, dok kod normiranog prostora to mora da bude vektorski prostor.

Definicije i teoreme u vezi sa otvorenim i zatvorenim skupovima i konvergencijom u normiranim prostorima dobijaju se iz odgovarajućih definicija i teorema u metričkim prostorima ako se $d(x, y)$ zameni sa $\|x - y\|$. Na primer, kugla u normiranom prostoru sa centrom u tački a i poluprečnikom r je skup tačaka $x \in X$ za koje važi $\|x - a\| < r$.

1080. Dokazati da su na skupu $\mathbf{R}^2$ sledeće funkcije norme:

$$\|a\|_1 = \max\{|x|, |y|\}\,, \quad \|a\|_2 = |x| + |y|\,, \quad \|a\|_3 = 2|x| + 3|y|\,,$$

gde je $a = (x, y)$.

1081. Ako je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor i ako je $d(x, y) = \|x - y\|$ za $x, y \in X$, dokazati da je (X, d) metrički prostor.

1082. Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Dokazati da je

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \qquad (p \geq 1)$$

norma na $\mathbf{R}^k$.

Rešenje. Za svako $p > 0$ imamo da je $\|x\| > 0$ za $x \neq 0$ i da je $\|0\| = 0$, kao i $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Nejednakost trougla dobija se iz MINKOWSKIjeve nejednakosti (zadatak 1452).

1083. Grafički predstaviti kugle poluprečnika 1 sa centrom u $(0,0)$ u normiranom prostoru $\mathbf{R}^2$, sa normom kao u zadatku 1082, za $p = 1, 2, 3, 4$.

1084. Označimo sa l_p skup svih nizova $\{x_n\}$, takvih da red $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p$ konvergira, gde je $p \geq 1$.

a) Dokazati da je l_p vektorski prostor.

b) Ako je $x = \{x_n\} \in l_p$ i ako je

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p},$$

dokazati da je $\|\cdot\|$ norma na l_p.

c) Šta je kugla poluprečnika r u ovoj normi ?

Rešenje. a) Na osnovu MINKOWSKIjeve nejednakosti za nizove (zadatak 1454), imamo da je

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Ako nizovi $x = \{x_n\}$ i $y = \{y_n\}$ pripadaju skupu l_p, tada redovi sa desne strane u (1) konvergiraju, pa konvergira i red sa leve strane. Prema tome, ako $x, y \in l_p$, tada i $x + y \in l_p$. Ostale osobine vektorskog prostora se lako dokazuju.

b) Iz (1) imamo nejednakost trougla: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ostale osobine norme su očigledno zadovoljene.

c) Neka je $x \in l_p$. Kugla poluprečnika r opisana oko x je skup svih onih $y \in l_p$ za koje važi da je

$$\|x - y\|^p = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p < r^p.$$

1085. Neka je $\mathbf{C}_1[a,b]$ skup funkcija koje su definisane i neprekidne na $[a,b]$ i koje na $[a,b]$ imaju neprekidan prvi izvod. Ispitati da li je

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

norma na $\mathbf{C}_1[a,b]$.

6.2 Funkcije više promenljivih

6.2.1 Granične vrednosti funkcija više promenljivih

- **Funkcija n promenljivih** *je svako preslikavanje f skupa $\mathbf{R}^n$ u skup $\mathbf{R}$. Ako se funkcijom f tačka $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ preslikava u realan broj u, pišemo da je*

$$u = f(x_1, \ldots, x_n).$$

- *U ovom odeljku sa d, odnosno $\|\cdot\|$ označavamo bilo koju od sledećih ekvivalentnih metrika, odnosno normi na $\mathbf{R}^n$:*

$$d_e(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \qquad \|a\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$d_s(a,b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \qquad \|a\|_s = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$d_m(a,b) = \max_{1\le i\le n} |a_i - b_i| \qquad \|a\|_m = \max_{1\le i\le n} |a_i|,$$

gde je $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n)$.

U svim teoremama, definicijama i zadacima može se koristiti bilo koja od navedenih metrika ili normi (videti zadatke 1064 i 1075).

- *Neka je funkcija f definisana na nekom skupu $D \subset \mathbf{R}^n$ i neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ tačka nagomilavanja skupa D. Kažemo da je granična vrednost funkcije f kada $x \to a$ jednaka $A \in \mathbf{R}$ i pišemo*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R}^n) \quad 0 < d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

Ako je funkcija f definisana na $\mathbf{R}^2$, umesto oznake $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ često se koristi oznaka $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y)$.

√ *Kod funkcija dve ili više promenljivih mogu se posmatrati i granične vrednosti oblika*

$$L_{12} = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y), \quad L_{21} = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y).$$

Ako postoji $L = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y)$, tada je $L_{12} = L_{21} = L$. Obrnuto ne mora da važi, odnosno jednakost $L_{12} = L_{21}$ ne implicira postojanje granične vrednosti L.

- *Ako neka od promenljivih teži ka $\pm\infty$, odgovarajuća granična vrednost se definiše analogno slučaju jedne promenljive. Na primer, imamo da je*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to a}} f(x,y) = A$$

ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\exists K > 0) \quad (x > K \wedge 0 < |y-a| < \delta) \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon .$$

Definicije neprekidnosti i ostalih pojmova u vezi sa konvergencijom date su u odeljku 6.1 za proizvoljne metričke prostore i ovde ih nećemo ponavljati.

1086. Neka postoji

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = L , \tag{1}$$

i neka je g neprekidna funkcija jedna promenljive, takva da je $g(a) = b$. Tada granična vrednost

$$\lim_{x \to a} f(x, g(x))$$

postoji i jednaka je L.

Rešenje. Koristićemo metriku d_m. ε-okolina tačke (a,b) u ovoj metrici je kvadrat sa centrom u (a,b) i stranicama dužine 2ε koje su paralelne koordinatnim osama. Neka važi (1). Fiksirajmo $\varepsilon > 0$, i nađimo $\delta_1 > 0$ tako da je $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ za sve tačke (x,y) koje pripadaju δ_1-okolini tačke (a,b). Kako je g neprekidna funkcija, za nađeno δ_1 postoji $\delta_2 > 0$ tako da za svako x za koje je $|x-a| < \delta_2$ važi $|g(x) - g(a)| = |g(x) - b| < \delta_1$. Neka je $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Iz opisane konstrukcije proizilazi da za svako x za koje je $|x-a| < \delta$, tačka $(x, g(x))$ pripada δ_1-okolini tačke (a,b), pa je $|f(x,g(x)) - L| < \varepsilon$. Odavde zaključujemo da je $\lim_{x \to a} f(x, g(x)) = L$.

Primedba. Ako postoji granična vrednost (1) i ako se tačka (x,y) kreće prema tački (a,b) po bilo kojoj neprekidnoj krivoj $y = g(x)$, tada se, na osnovu ovog rezultata, dobija uvek ista granična vrednost. Ovo je analogno situaciji u slučaju jedne promenljive kada posmatramo levu i desnu graničnu vrednost, samo što u slučaju dve promenljive imamo beskonačno mnogo mogućnosti. Naravno, sličan rezultat važi i u slučaju funkcije više od dve promenljive.

1087. Da li postoji $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$?

Rešenje. Iz zadatka 1086 sledi da, ako postoji granična vrednost, ona je ista bez obzira na koji način (x,y) konvergira ka $(0,0)$. Ako se na dva razna načina dobijaju različite granične vrednosti, to znači da granična vrednost ne postoji.

Neka je $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$. Ako se tačka (x,y) približava koordinatnom početku po pravoj $y = x$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

a ako se tačka kreće po pravoj $y = 2x$ imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}.$$

Odavde zaključujemo da granična vrednost u ovom slučaju ne postoji.

1088. Ispitati da li postoji $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Rešenje. Po pravoj $y = x$ dobija se granična vrednost 0; po pravoj $y = 0$ dobija se 1, dok se po pravoj $x = 0$ dobija -1; dakle, granična vrednost ne postoji.

1089. Ispitati da li postoji $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Rešenje. Ako stavimo $y = x$ dobijamo graničnu vrednost 0; uopšte, za proizvoljno k, ako stavimo $y = kx$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{(k^2+1)x^2} = 0.$$

Ovo je samo indikacija da je tražena granična vrednost jednaka nuli, ali nije i dokaz, jer tačka (x,y) može na beskonačno mnogo raznih načina da se kreće prema $(0,0)$ (ne samo duž pravih $y = kx$). Dokaz da je granična vrednost funkcije $f(x,y)$ jednaka A uglavnom se izvodi tako što se posmatra razlika $|f(x,y) - A|$ i pokaže se da je manja od neke veličine koja teži nuli. U ovom slučaju imamo da je

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|}{2}\cdot\frac{2|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|}{2},$$

gde smo koristili nejednakost $x^2+y^2 \ge 2|x|\cdot|y|$. Kako $|x|/2 \to 0$ kad $(x,y)\to(0,0)$, tražena granična vrednost je nula.

1090. Naći $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Rešenje. Nije teško videti da je granična vrednost duž svake prave $y = kx$ jednaka nuli kad $x \to 0$. Pokažimo da je i granična vrednost po dve promenljive

jednaka nuli. Imamo da je

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2}$$
$$\le \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2}$$
$$= |x| + |y| \to 0 \quad \text{kad } (x,y) \to (0,0).$$

1091. Data je funkcija $f(x,y) = x^2 e^{y-x^2}$.

a) Odrediti graničnu vrednost ove funkcije kad $x \to +\infty$, $y \to +\infty$ po pravoj $y = kx$, $k \in \mathbf{R}$.

b) Da li postoji $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x,y)$?

Rezultat. **a)** Za svako $k \in \mathbf{R}$ dobija se granična vrednost 0. **b)** Ne postoji, jer, ako stavimo, na primer, $y = x^2$, tada $f(x,y) \to +\infty$.

1092. Odrediti

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}.$$

Rešenje. Iz jednakosti

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)} = \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x/(x+y)}$$

kad $x \to +\infty$, $y \to a$, imamo

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e, \quad \frac{x}{x+y} \to 1,$$

pa je tražena granična vrednost jednaka e.

1093. Dokazati da je funkcija

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x^2+y^2 \neq 0) \qquad f(0,0) = 0$$

neprekidna u $(0,0)$ po x i po y, ali nije neprekidna kao funkcija dve promenljive.

Rešenje. Kako je, za svako fiksirano y, odnosno x,

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = 0 = f(0,y), \quad \lim_{y \to 0} f(x,y) = 0 = f(x,0),$$

zaključujemo da je funkcija f neprekidna po svakoj promenljivoj posebno. Nije teško ustanoviti da $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ ne postoji, pa funkcija nije neprekidna u $(0,0)$ kao funkcija dve promenljive.

1094. Neka je

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0),\qquad f(0,0)=0.$$

Dokazati da funkcija f nije neprekidna u tački $(0,0)$, ali da je neprekidna duž svake prave koja prolazi kroz tu tačku.

1095. Neka je $f(x,y)$ data funkcija, i neka je

$$L_{12}=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y),\quad L_{21}=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y),\quad L=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y).$$

Da li je moguće da

a) postoje L_{12} i L_{21}, $L_{12}\neq L_{21}$, dok L ne postoji,

b) postoje L_{12} i L_{21}, $L_{12}=L_{21}$ ali L ne postoji,

c) ne postoje ni L_{12} ni L_{21}, a L postoji ?

Rešenje. a) Moguće je. Na primer, neka je $a=b=0$ i neka je

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}.$$

Tada je

$$L_{12}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

$$L_{21}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,$$

ali L ne postoji (na primer, duž prave $y=x$ imamo $L=0$, dok je $L=-1/3$ za $y=2x$).

b) Primer za ovaj slučaj je funkcija

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Ako je $a=b=0$, tada je $L_{12}=L_{21}=0$, ali L ne postoji.

c) Neka je $a=b=0$ i neka je

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Tada ne postoje L_{12}, L_{21}, dok je $L=0$.

1096. Naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ [0]

b) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ [0]

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [$\log 2$]

1097. Naći L_{12} i L_{21} definisane kao u zadatku 1095, ako je

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, a=b=+\infty$ [$L_{12}=0, L_{21}=1$]

b) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}, a=+\infty, b=0$ [$L_{12}=1/2, L_{21}=0$]

c) $f(x,y)=\log_x(x+y), a=1, b=0$ [$L_{12}=1$, L_{21} ne postoji]

1098. Dokazati da je niz $\{x_n\}, x_n\in\mathbf{R}$ CAUCHYjev niz ako i samo ako

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |x_m-x_n|=0\,. \tag{1}$$

Rešenje. Granična vrednost niza sa dva indeksa može se definisati analogno slučaju granične vrednosti funkcije dve promenljive kada te promenljive konvergiraju ka $+\infty$:

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} y_{m,n}=a \iff$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists K\in\mathbf{R})(\forall(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N})\ \|(m,n)\|\geq K\Rightarrow|y_{m,n}-a|<\varepsilon\,. \tag{2}$$

Za normu u ovoj definiciji može se uzeti bilo koja od normi koje su ekvivalentne Euklidskoj; uzećemo $\|\cdot\|_m$.

Po definiciji, niz $\{x_n\}$ je CAUCHYjev niz ako i samo ako važi

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbf{N})(\forall m,n\geq n_0)\quad |x_m-x_n|<\varepsilon\,. \tag{3}$$

Za $y_{m,n}=|x_m-x_n|$, iz (2) dobijamo

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |x_m-x_n|=0 \iff$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists K\in\mathbf{R})(\forall(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}:\max\{|m|,|n|\}\geq K)\ |x_m-x_n|<\varepsilon\,, \tag{4}$$

što je ekvivalentno sa (3).

6.2.2 Parcijalni izvodi i diferencijabilnost

Neka je $f(x_1,\dots,x_n)$ data funkcija n nezavisnih promenljivih.

- **Parcijalni izvod** *funkcije f po promenljivoj x_i, u datoj tački $(x_1,\dots,x_n)$, u oznaci $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ definiše se sa*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{h},$$

ako ova granična vrednost postoji. Tehnika nalaženja parcijalnog izvoda je ista kao i kod običnog izvoda, ako sve promenljive osim x_i smatramo konstantama. Ponekad ćemo parcijalne izvode označavati i sa $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ itd.

- **Diferencijal** *funkcije f u datoj tački $(x_1,\dots,x_n)$ definišemo pomoću*

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n,$$

gde su $\mathrm{d}x_1,\dots,\mathrm{d}x_n$ dati priraštaji nezavisnih promenljivih $x_1,\dots,x_n$.

- *Kažemo da je funkcija f* **diferencijabilna** *u tački $x=(x_1,\dots,x_n)$ ako je, kad $\|\Delta x\|\to 0$,*

$$\Delta f=f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)=\mathrm{d}f(x_1,\dots,x_n)+o(\|\Delta x\|),$$

gde je $\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ vektor priraštaja nezavisnih promenljivih.
Ova definicija se, za $n=1$, svodi na definiciju datu u 3.1.5 (videti zadatak 471).

√ *Funkcija f je diferencijabilna u datoj tački ako i samo ako u toj tački postoje* **neprekidni** *parcijalni izvodi.*

√ *Ako je funkcija diferencijabilna u nekoj tački, ona je tački i neprekidna kao funkcija više promenljivih. Funkcija koja samo ima parcijalne izvode ne mora biti neprekidna.*

- *Parcijalni izvodi drugog reda definišu se pomoću*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Parcijalni izvodi višeg reda definišu se induktivno. Parcijalni izvodi za $i\neq j$ nazivaju se **mešovitim parcijalnim izvodima.**

√ *Neka je $f(x,y)$ funkcija dve promenljive, definisana na otvorenom skupu D. Ako parcijalni izvodi*

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

postoje i neprekidni su u svakoj tački skupa D, tada je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Pod analognim uslovima važi jednakost između mešovitih parcijalnih izvoda funkcije više od dve promenljive, bez obzira na redosled nalaženja izvoda. Na primer, ako je $f(x,y,z)$ funkcija tri promenljive, tada je (pod uslovima neprekidnosti svih parcijalnih izvoda do reda 3),

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x}, \quad \text{itd.}$$

Ukoliko nije drugačije rečeno, u zadacima ćemo pretpostavljati da su uslovi za jednakost mešovitih parcijalnih izvoda ispunjeni.

- **Diferencijal višeg reda** *definiše se na isti način kao u slučaju funkcija jedne promenljive:*

$$\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f), \quad \mathrm{d}^k f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1} f),$$

pri čemu su priraštaji nezavisnih promenljivih konstantni.

√ *Za diferencijal reda k važi simbolička formula*

$$\mathrm{d}^k f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \right)^k f.$$

Na primer, treći diferencijal funkcije dve nezavisne promenljive (pod uslovima jednakosti mešovitih parcijalnih izvoda) je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3 f(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{d}y \right)^3 f(x,y) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \mathrm{d}x^2\, \mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \mathrm{d}y^3. \end{aligned}$$

Ova formula važi samo ako su x i y nezavisne promenljive i pri tome je

$$\mathrm{d}x^2 \equiv (\mathrm{d}x)^2, \quad \mathrm{d}y^3 \equiv (\mathrm{d}y)^3,$$

itd. gde su $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ fiksirani priraštaji nezavisnih promenljivih.

1099. Funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y)$ definisana je na $\mathbf{R}^2$ pomoću

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ako } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{ako } x = y = 0. \end{cases}$$

a) Da li je f neprekidna u $(0,0)$?

b) Da li postoje parcijalni izvodi u $(0,0)$?

c) Ispitati diferencijabilnost funkcije f u $(0,0)$.

Rešenje. a) Funkcija je neprekidna u $(0,0)$, jer je

$$|f(x,y)| \le (|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{kad } (x,y) \to (0,0)\,.$$

b) Parcijalne izvode možemo odrediti polazeći od definicije:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3/2}\sin\frac{1}{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{1/2}\sin\frac{1}{|x|} = 0.$$

Zbog simetrije je i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ u tački $(0,0)$.

c) Funkcija f će biti diferencijabilna u $(0,0)$ ako važi jednakost

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,, \tag{1}$$

jer ćemo tada imati da je $f(x,y)-f(0,0) = f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$. Nije teško videti da (1) zaista važi, pa je f diferencijabilna u tački $(0,0)$.

1100. Neka je

$$f(x,y) = |x|+|y|-\big||x|-|y|\big|\,.$$

Pokazati da postoje $f'_x(0,0)$ i $f'_y(0,0)$, a da funkcija f nije diferencijabilna u $(0,0)$.

Rešenje. Parcijalni izvod $f'_x(0,0)$ dobija se iz

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0\,,$$

jer je $f(x,0)=0$ za svako x. Na isti način je $f'_y(0,0)=0$.

Uzimajući normu $\|\cdot\|_s$ u definiciji diferencijabilnosti, imamo da je f diferencijabilna u $(0,0)$ ako i samo ako važi

$$f(x,y)-f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o(|x|+|y|) \quad (|x|+|y|\to 0)\,,$$

što se u našem slučaju svodi na

$$f(x,y) = o(|x|+|y|) \qquad (|x|+|y|\to 0)\,,$$

odnosno

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 0\,.$$

Poslednja jednakost nije tačna, jer količnik

$$\frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 1 - \left|\frac{|x|-|y|}{|x|+|y|}\right|$$

nema graničnu vrednost kad $(x,y) \to (0,0)$. Prema tome, funkcija nije diferencijabilna u $(0,0)$.

1101. Neka je

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x^2+y^2 \neq 0), f(0,0) = 0.$$

Dokazati da data funkcija ima parcijalne izvode u $(0,0)$, ali da u toj tački nije neprekidna.

Rešenje. Parcijalni izvod po x je

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,$$

i zbog simetrije, $f'_y(0,0) = 0$.

Funkcija nije neprekidna u $(0,0)$, jer granična vrednost $f(x,y)$ ne postoji kad $(x,y) \to (0,0)$.

1102. Ispitati da li su sledeće funkcije diferencijabilne u $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, [Nije]

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, [Nije]

c) $f(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$, $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0) = 0$, [Jeste]

d) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0) = 0$, [Nije]

e) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0) = 0$. [Jeste]

1103. Funkcije r i φ (polarne koordinate) definisane su pomoću

$$x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,, \qquad r \in (0,+\infty),\quad \varphi \in (-\pi,\pi].$$

Ispitati da li su $r = r(x,y)$ i $\varphi = \varphi(x,y)$ diferencijabilne funkcije promenljivih x i y.

Rešenje. Kako je

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

parcijalni izvodi su neprekidni u svakoj tački sem u $(0,0)$, pa je $r(x,y)$ diferencijabilna u svakoj takvoj tački. U $(0,0)$ imamo

$$\frac{\partial r}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x, 0) - r(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

pa $\dfrac{\partial r}{\partial x}(0,0)$ ne postoji, kao ni $\dfrac{\partial r}{\partial y}(0,0)$.

Kao u zadatku 127 na strani 45 može se pokazati da je funkcija $\varphi(x,y)$ definisana sa

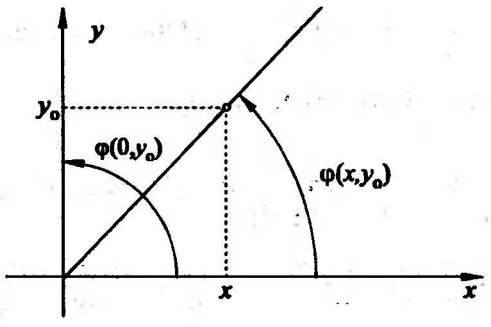
$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x\,, & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} y/x\,, & x < 0\,,\ y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} y/x\,, & x < 0\,,\ y < 0 \\ \pi\,, & x < 0, y = 0 \\ \frac{\pi}{2}\,, & x = 0\,,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}\,, & x = 0\,,\ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ova funkcija ima prekid na negativnom delu x-ose, tj. za $y = 0, x < 0$, a nije definisana za $x = y = 0$. U ostalim tačkama u kojima je $x \neq 0$, imamo da je

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{3}$$

Kako su parcijalni izvodi neprekidne funkcije dve promenljive, funkcija φ je diferencijabilna u svakoj tački (x,y) svog domena u kojoj je $x \neq 0$. Neka je sada $x = 0$, i neka je $y = y_0 \neq 0$. Umesto da posmatramo razne slučajeve po formuli (1), jednostavnije je da primetimo da je (videti sliku):



Slika 44. *Uz zadatak 1103.*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x,y_0) - \varphi(0,y_0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{arctg} x/y_0}{x} = \lim_{\theta \to 0} \frac{-\theta}{y_0 \operatorname{tg}\theta} = -\frac{1}{y_0},$$

gde smo uveli smenu $\theta = \operatorname{arctg} x/y_0$.

Kako je, na osnovu (2),

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{y_0},$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ je neprekidna funkcija u tački $(0,y_0)$ za svako $y_0 \neq 0$.
Dalje je, za $y_0 \neq 0$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\varphi(0,y_0+\Delta y)-\varphi(0,y_0)}{\Delta y} = 0,$$

jer je $\varphi(0,y_0+\Delta y) = \varphi(0,y_0)$ $(= \pi/2$ ili $-\pi/2)$. Iz (3) se dobija

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{x}{x^2+y^2} = 0,$$

pa je i $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ neprekidna funkcija u $(0,y_0)$.
Prema tome, funkcija φ je diferencijabilna u svakoj tački svog domena, osim u tačkama (x,y) za koje je $y=0, x\leq 0$.

1104. Ako je $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, dokazati da je $\mathrm{d}^2w \geq 0$.

Rešenje. Neka je $u=x^2+y^2+z^2$. Tada iz $w=\sqrt{u}$ diferenciranjem nalazimo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2w &= \frac{1}{4}u^{-3/2}\left(2u\mathrm{d}^2u-(\mathrm{d}u)^2\right)\\ &= u^{-3/2}\left((x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)-(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)^2\right)\geq 0,\end{aligned}$$

na osnovu CAUCHYjeve nejednakosti (zadatak 1446) ili direktnim izračunavanjem.

6.2.3 Diferenciranje složenih funkcija

√ *Neka je $w=f(x,y,z)$, pri čemu su x,y,z funkcije dve promenljive, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$. Tada je*

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{i} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

√ **Implicitna funkcija.** *Neka je data jednačina*

$$F(x,y,z)=0.$$

Ovom jednačinom je definisana jednoznačna i neprekidna funkcija $z=z(x,y)$ u nekoj okolini date tačke $M(x_0,y_0,z_0)$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$F(x,y,z)$ i $F'_z(x,y,z)$ su definisane i neprekidne funkcije u nekoj okolini tačke M.

$F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$;

Ako je funkcija F diferencijabilna u nekoj okolini tačke M, njeni parcijalni izvodi mogu se naći diferenciranjem jednakosti $F(x,y,z)=0$, što dovodi do formula

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

√ **Diferencijali.** *Ako je $w = f(x,y,z)$ i ako su x,y,z funkcije jedne ili više nezavisnih promenljivih, tada je*

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

gde su $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ diferencijali odgovarajućih funkcija. Formula za prvi diferencijal se, dakle, ne razlikuje od slučaja kada su x,y,z nezavisne promenljive. Ovo je osobina **invarijantnosti prvog diferencijala** *i ona ne važi za diferencijale višeg reda.*

1105. Neka jednakost $F(x,y,z)=0$ određuje funkcije $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$. Dokazati da je

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1. \tag{1}$$

Rešenje. Prema pravilu o diferenciranju implicitno zadate funkcije, imamo da je

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Množenjem ovih jednakosti dobija se (1).

Primedba. Za razliku od oznake za izvod $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, oznaka za parcijalni izvod $\frac{\partial y}{\partial x}$ se ne može shvatiti kao razlomak, tako da "skraćivanje" u (1) nije dozvoljeno.

1106. Neka je $z = z(x,y)$ funkcija koja zadovoljava jednakost

$$z^3 - xz + y = 0, \quad z(3,-2) = 2,$$

gde su x i y nezavisne promenljive.

Odrediti $\mathrm{d}z$, d^2z i d^3z u tački $(3,-2)$.

Rešenje. Uzastopnim diferenciranjem date jednakosti, vodeći računa o tome da je $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}^2y = \mathrm{d}^3x = \mathrm{d}^3y = 0$, nalazimo:

$$3z^2\,\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0\,, \tag{1}$$

$$6z(\mathrm{d}z)^2 + (3z^2 - x)\,\mathrm{d}^2z - 2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{2}$$

$$6(\mathrm{d}z)^3 + (6z\,\mathrm{d}z - 3\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}^2z + (3z^2 - x)\,\mathrm{d}^3z = 0\,. \tag{3}$$

Stavimo $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$. Rešavanjem (1) po $\mathrm{d}z$, dobijamo

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{9}(2\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)\,. \tag{4}$$

Zamenom (4) u (2) i (3), a zatim rešavanjem (2) po d^2z, imamo

$$\mathrm{d}^2z = \frac{1}{243}(-4\,\mathrm{d}x^2 + 10\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 4\,\mathrm{d}y^2)\,.$$

Zamenom ovog izraza u (3) i rešavanjem po d^3z, nalazimo

$$\mathrm{d}^3z = \frac{2}{2187}(2\,\mathrm{d}x^3 - 21\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y + 24\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 - 7\,\mathrm{d}y^3)\,.$$

1107. Funkcija $z = z(x,y)$ zadata je implicitno pomoću jednakosti

$$z^3 + 3zx + y = 0$$

i poznato je da je diferencijabilna u $(-1,2)$. Izračunati $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ u tački $(-1,2)$.

Rezultat. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{(x - z^2)}{3(x + z^2)^3}$; za $x = -1, y = 2$ brojna vrednost ovog izraza je $-5/81$.

1108. Odrediti $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ i $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ ako je

$$x + y + z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1\,.$$

Rešenje. Dati sistem određuje x i y kao funkcije promenljive z. Diferenciranjem po z dobija se

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -1\,, \qquad 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -2z\,,$$

odakle je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{y - z}{x - y}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{z - x}{x - y}\,.$$

1109. Ako je $z = f(u(t), v(t))$, proveriti da li je

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\mathrm{d}u)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\mathrm{d}v)^2$$

$$\text{(2)} \qquad = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u'(t))^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}u'(t)v'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v'(t))^2\right)\mathrm{d}t^2$$

U kojim slučajevima $\mathrm{d}^2 z$ može da se određuje po formuli (2)?

Rešenje. Date jednakosti ne važe u opštem slučaju. Naime, jednakost (1) važi ako su u i v **nezavisne promenljive**, što nije ispunjeno u ovom slučaju. Za razliku od prvog diferencijala koji poseduje osobinu invarijantnosti, diferencijali višeg reda nemaju ovu osobinu.

Ispravan način traženja drugog diferencijala u ovom slučaju bi bio sledeći:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 z &= \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial u}u'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial v}v'(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
\text{(3)} \qquad &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)u'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}(u'(t))\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial u}u'(t)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}t) \\
&\quad + \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)v'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}(v'(t))\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial v}v'(t)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}t)\,.
\end{aligned}$$

Nađimo sada diferencijale koji se pojavljuju u (3):

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\mathrm{d}u + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\mathrm{d}v = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}v'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\mathrm{d}u + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\mathrm{d}v = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}u'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}v'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\mathrm{d}(u'(t)) = u''(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}t) = 0 \quad \text{(jer je } t \text{ nezavisna promenljiva)}.$$

Zamenom ovih izraza u (3) dobijamo, posle sređivanja:

$$\begin{aligned}
\text{(4)} \qquad \mathrm{d}^2 z = &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u'(t))^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}u'(t)v'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v'(t))^2\right. \\
&\left. + \frac{\partial f}{\partial u}u''(t) + \frac{\partial f}{\partial v}v''(t)\right)\mathrm{d}t^2\,.
\end{aligned}$$

Poređenjem izraza (2) i (4), vidimo da je jednakost (2) tačna ako su drugi izvodi funkcija u i v jednaki nuli. U tom slučaju su u i v linearne funkcije:

$$u(x) = ax + b, \quad v(x) = cx + d \qquad (a, b, c, d = \text{const.})$$

1110. Ako je $z = f(u, v)$, $u = x + y$, $v = x - y$, odrediti $\mathrm{d}^2 z$.

Uputstvo. Kako su u i v linearne funkcije nezavisnih promenljivih x i y, važi jednakost (1) iz zadatka 1109.

1111. Naći $\mathrm{d}^2 w$ ako je

a) $w = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ $\quad \left[f'' \frac{(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)^2}{x^2+y^2} + f' \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right]$

b) $w = f(u, v)$, $u = xy$, $v = x/y$

$$\left[f''_{uu}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)^2 + 2f''_{uv} \frac{y^2\,\mathrm{d}x^2 - x^2\,\mathrm{d}y^2}{y^2} + f''_{vv} \left(\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y}\right)^2 + 2f'_u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2f'_v \frac{(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y}{y^3} \right]$$

c) $w = f(x, y, z)$, $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$

$$\left[(f''_{xx} + 4t^2 f''_{yy} + 9t^4 f''_{zz} + 4t f''_{xy} + 6t^2 f''_{xz} + 12t^3 f''_{yz} + 2f'_y + 6t f'_z)\,\mathrm{d}t^2 \right]$$

1112. Neka je $z = F(u, v)$, $u = f(x, y)$, $v = g(y^2)$, $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$. Odrediti $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}t^2$.

Rezultat.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y}\beta'\right) + 2\frac{\partial F}{\partial v} y g'(y^2)\beta' .$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = {} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y}\beta'\right)^2 + 4yg'(y^2)\beta' \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y}\beta'\right) \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(2yg'(y^2)\beta')^2 \\ & + \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha'\beta' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\beta'^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\alpha'' + \frac{\partial f}{\partial y}\beta''\right) \\ & + \frac{\partial F}{\partial v}\left(2\beta'^2 g'(y^2) + 4y^2 g''(y^2)\beta'^2 + 2yg'(y^2)\beta''\right)\end{aligned}$$

1113. Ako je

$$z = z(x, y), \quad x = x(u, v), y = y(u, v), \quad u = u(t), v = v(t),$$

pokazati da se pod određenim uslovima, koje treba formulisati, može smatrati da z zavisi samo od x. Izraziti $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ pomoću izvoda funkcija u i v i parcijalnih izvoda funkcija x i y.

Ako je

$$z = \sin(y\cos x)\,, \quad x = v\sin u, y = u\cos v\,, \quad u = 1+t, v = \sin t\,,$$

naći $\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}x$ u tački $x = 0$ koja odgovara vrednosti $t = 0$.

Rezultat. $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x\,=\,0} = 0.6421.$

1114. Dokazati da funkcija $z = z(x, y)$, definisana sa

$$x + y + z = f(x^2 + y^2 + z^2)\,,$$

gde je f diferencijabilna funkcija jedne promenljive, zadovoljava jednačinu

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y\,.$$

Rešenje. Nalaženjem diferencijala leve i desne strane datog izraza, dobijamo

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = f'(u)(2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z)\,,$$

gde je $u = x^2 + y^2 + z^2$. Rešavanjem po $\mathrm{d}z$ nalazimo

$$\mathrm{d}z = \frac{2xf'(u) - 1}{1 - 2zf'(u)}\,\mathrm{d}x + \frac{2yf'(u) - 1}{1 - 2zf'(u)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Odavde je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xf'(u) - 1}{1 - 2zf'(u)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2yf'(u) - 1}{1 - 2zf'(u)}\,.$$

Zamenom ovih izraza u levoj strani date jednačine, dobijamo izraz na desnoj strani.

1115. Dokazati da funkcija z data sa $z = xy + xg(y/x)$, gde je $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija, zadovoljava jednačinu

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z\,.$$

1116. Ako funkcija $u = u(x, y)$ zadovoljava LAPLACEovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

tada i funkcija $v = u\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$ takođe zadovoljava istu jednačinu. Dokazati.

1117. Funkcija $z = z(x, y)$ definisana je implicitno pomoću jednakosti

$$F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0 ,$$

gde je F data diferencijabilna funkcija. Dokazati da je

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy .$$

Rešenje. Funkcija F je funkcija dve promenljive, $F = F(u, v)$, gde je $u = x + z/y$, $v = y + z/x$. Na osnovu pravila o diferenciranju implicitne funkcije, imamo da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{z}{x^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{1}{y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{1}{x}} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{z}{y^2} + \dfrac{\partial F}{\partial v}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{1}{y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{1}{x}} .$$

Odavde je

$$\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{z}{x} - \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{z}{y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}y}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{1}{y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{1}{x}} \\ &= -\frac{xy\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{1}{y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{1}{x}\right) - z\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{1}{y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{1}{y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{1}{x}} \\ &= z - xy , \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

1118. Naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ako je

$$x = u + \log v,\ y = v - \log u,\ z = 2u + v.$$

Rešenje. Iz sistema jednačina

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \frac{1}{v}\mathrm{d}v , \quad \mathrm{d}y = -\frac{1}{u}\mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

dobijamo da je

$$du = \frac{uv\,dx - u\,dy}{uv+1}, \quad dv = \frac{v\,dx + uv\,dy}{uv+1}.$$

Dalje je

(1) $$dz = 2du + dv = \frac{2uv+v}{uv+1}\,dx + \frac{uv-2u}{uv+1}\,dy.$$

S druge strane je

(2) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Upoređivanjem (1) i (2) dobija se

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2uv+v}{uv+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{uv-2u}{uv+1}.$$

1119. Odrediti brojeve a, b, c, d u transformacijama

(1) $$x = au + bv\ , y = cu + dv \qquad (ad - bc \neq 0),$$

tako da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Rešenje. Iz (1) dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}a + \frac{\partial z}{\partial y}c,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}a^2 + 2ac\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}c^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}b + \frac{\partial z}{\partial y}d$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}b^2 + 2bd\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}d^2.$$

Iz uslova zadatka imamo da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (a^2 - b^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2(ac - bd)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (c^2 - d^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Ova jednakost će biti zadovoljena ako je

(2) $$a^2 - b^2 = 0\ ,\ ac - bd = \frac{1}{2}\ ,\ c^2 - d^2 = 0.$$

Uz uslov $ad - bc \neq 0$, sistem (2) ima dve grupe rešenja: $a = b$, $c = 1/4b$, $d = -1/4b$, $b \neq 0$ i $a = -b$, $c = -1/4b$, $d = -1/4b$, $b \neq 0$, gde je u oba slučaja b proizvoljan broj različit od nule.

1120. Ako je $u = u(x, y)$, transformisati izraz

$$w = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\,, \tag{1}$$

uvođenjem novih promenljivih r i φ pomoću

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,.$$

Rešenje. Kako je

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

imamo da je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)\mathrm{d}r + \left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi \qquad (2)\end{aligned}$$

Kako (2) treba da važi za svako $\mathrm{d}r$ i $\mathrm{d}\varphi$, mora biti

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi &= \frac{\partial u}{\partial r}\\ -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi &= \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Rešavanjem sistema (3), dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Smenom (4) u (1), imamo

$$w = r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y} = r\frac{\partial u}{\partial r}\,.$$

Primedba. Isti rezultat se može dobiti ako se pođe od $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x) + C$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i direktno se izračuna

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

i slično za $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

1121. Uvođenjem polarnih koordinata r i φ pomoću $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, transformisati izraze

a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2\right]$

b) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right]$

c) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ $\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right]$

1122. Transformisati izraz $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}$, stavljajući

$$u = \log\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ .$$

Rezultat. $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

1123. Ako je $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$ i $f(x,y,z) = F(u,v,w)$, dokazati da je

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v} + w\frac{\partial F}{\partial w}\ .$$

Rešenje. Odredimo parcijalne izvode funkcije F:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}\frac{w}{2\sqrt{uw}} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{v}{2\sqrt{uv}} \\
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{w}{2\sqrt{vw}} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{u}{2\sqrt{uv}} \\
\frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{v}{2\sqrt{vw}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{u}{2\sqrt{uw}}
\end{aligned}$$

Odavde je

$$u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{uv}+\frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{uw}+\frac{\partial f}{\partial z}\sqrt{uv}$$
$$=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

što je i trebalo dokazati.

1124. Koji oblik dobija diferencijalni izraz

$$D=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2y(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z^2 \quad (y\neq 0)\,,$$

ako se stavi $x=uv$, $y=1/v$, a umesto parcijalnih izvoda z po x,y uvedu izvodi po u,v ?

Rešenje. Uvođenjem naznačenih smena i sređivanjem dobija se

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{v}\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{1}{v^2}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}uv-\frac{\partial z}{\partial v}v^2\,.$$

Zamenom u datom izrazu dobijamo

$$D=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2u\frac{\partial z}{\partial u}-2v\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{2}{v}\frac{\partial z}{\partial v}+u^2z^2\,.$$

Zašto je u zadatku dat uslov $y\neq 0$?

1125. Transformisati izraz

$$W=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

uođenjem novih promenljivih u i v sa $u=x^2/y$, $v=y^2/x$.

Rešenje. Kako je $z=z(x,y)=z(x(u,v),y(u,v))$, imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{2x}{y}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{y^2}{x^2}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y}{x}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{4x^2}{y^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{y}{x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{y^4}{x^4}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{2}{y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y^2}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{x^4}{y^4}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{x}{y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{4y^2}{x^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{2x^2}{y^3}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2}{x}\,.$$

Zamenom u datom izrazu, dobija se

$$W=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{x^4}{y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{y^4}{x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u^2-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v^2\,.$$

1126. Transformisati jednačinu

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\qquad (a\neq 0)\,,$$

uvođenjem novih nezavisnih promenljivih u i v pomoću $u=x-ay$, $v=x+ay$. Zatim odrediti sve funkcije $z=z(x,y)$ koje zadovoljavaju datu jednačinu.

Rešenje. Uvođenjem smene $u=x-ay$, $v=x+ay$, dobijamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-a\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\,.$$

Zamenom u datu jednačinu dobijamo ekvivalentan oblik

$$4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0\,. \tag{1}$$

Svaka funkcija z koja zadovoljava datu jednačinu, zadovoljava i jednačinu (1) i obratno. Do rešenja jednačine (1) je lako doći pomoću dve integracije. Integracijom po v dobijamo

$$\int\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\,dv=\frac{\partial z}{\partial u}+\varphi(u)=0\,,$$

gde je $\varphi(u)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija promenljive u. Ova funkcija ima ulogu integracione konstante, jer se integracija sprovodi samo po v.

Integraleći još jedan put, nalazimo da je

$$\int\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\varphi(u)\right)\,du=z+\psi(v)+\int\varphi(u)\,du=0\,, \tag{2}$$

gde je $\psi(v)$ proizvoljna dva puta diferencijabilna funkcija promenljive v. Ako uvedemo oznake

$$f(u)=-\int\varphi(u)\,du\,,\quad g(v)=-\psi(v)\,,$$

iz (2) dobijamo da je

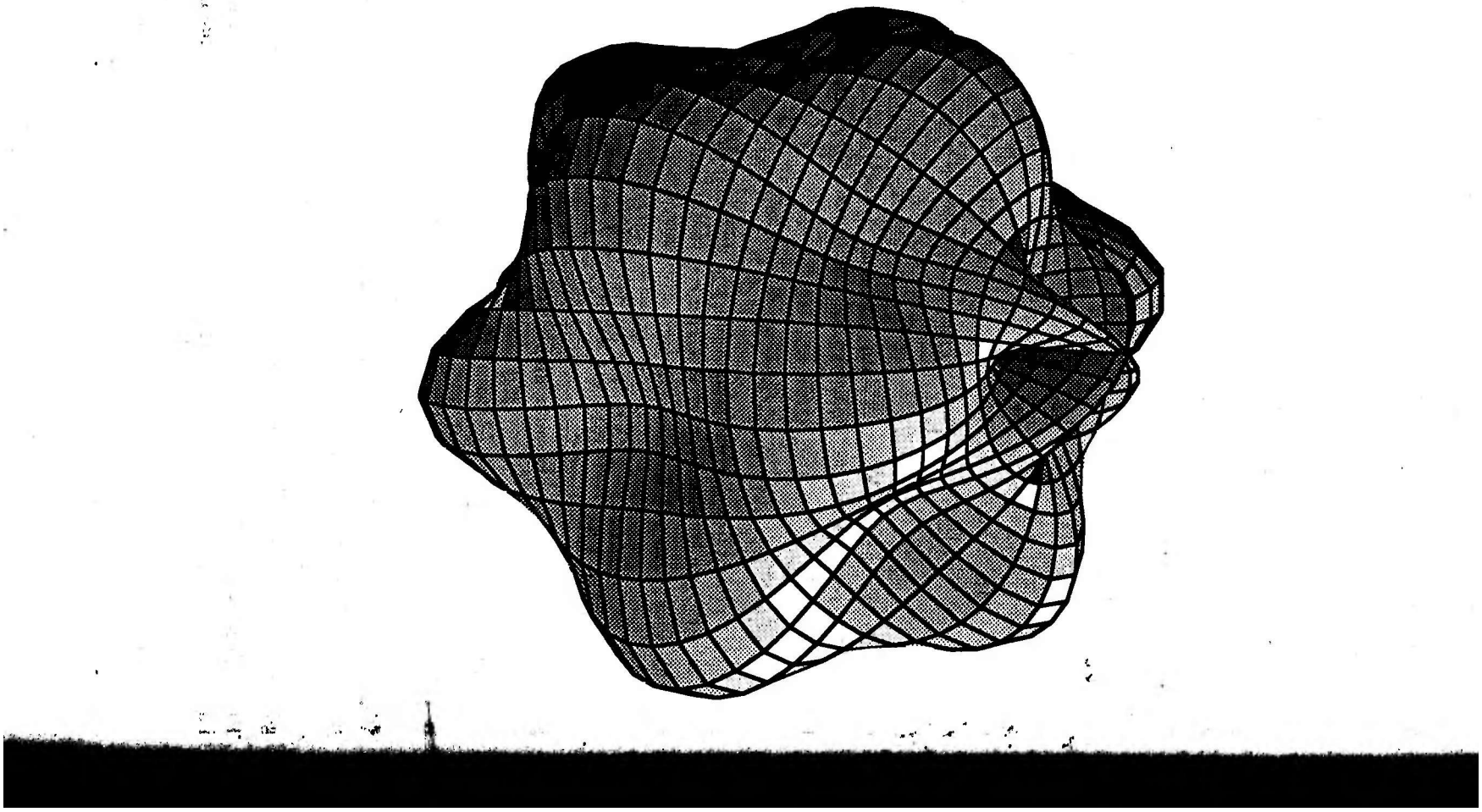
$$z=f(u)+g(v)\,.$$

Vraćajući se na promenljive x i y, nalazimo da su funkcije koje zadovoljavaju datu jednačinu oblika

$$z(x,y)=f(x-ay)+g(x+ay)\,,$$

gde su f i g proizvoljne dva puta diferencijabilne funkcije jedne promenljive.

Primedba. Jednačine u kojima se pojavljuje nepoznata funkcija više promenljivih i njeni parcijalni izvodi, nazivaju se **parcijalnim diferencijalnim jednačinama.**



Kada bi drugi radili na matematičkoj istini tako duboko i tako neprekidno kao što radim ja, i oni bi to otkrili.
Karl Friederich Gauss (1777–1855).

Glava 7

Diferencijalne jednačine

Diferencijalne jednačine imaju brojne primene u različitim oblastima prirodnih, društvenih i tehničkih nauka. Na žalost, za samo jedan mali broj diferencijalnih jednačina od interesa u primenama, postoje analitički postupci rešavanja. Jednačine klasične NEWTONove mehanike spadaju u ovu kategoriju, kao i neke diferencijalne jednačine kojima se opisuje ponašanje električnih kola. U ovoj glavi obrađujemo samo takve diferencijalne jednačine, jer metodi numeričke matematike i kvalitativne analize, koji se inače koriste za proučavanje rešenja diferencijalnih jednačina, čine zasebne oblasti kojima se ne možemo baviti.

7.1 Uvodni pojmovi i diferencijalne jednačine prvog reda

7.1.1 Diferencijalne jednačine i njihova rešenja

- *Neka je F funkcija koja preslikava neki podskup skupa $\mathbf{R}^{n+1}$ u $\mathbf{R}$. Jednačina*

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0\,, \quad x \in (a, b) \tag{1}$$

gde je y nepoznata n puta diferencijabilna funkcija, naziva se **(običnom) diferencijalnom jednačinom** *reda n ako se u njoj efektivno pojavljuje izvod $y^{(n)}$. Interval (a, b), na kome nezavisna promenljiva uzima vrednosti, može biti konačan ili beskonačan.*

- *Rešenje diferencijalne jednačine (1) na (a, b) je svaka funkcija $x \mapsto y(x)$ koja pretvara jednačinu (1) u identitet za $x \in (a, b)$. Rešenje može biti definisano u obliku $y = y(x)$ ili u obliku $x = x(y)$ ili u obliku $G(x, y) = 0$.*

- **Opšte rešenje** *diferencijalne jednačine (1) na (a,b) je svaka funkcija $y = y(x)$ koja je definisana za $x \in (a,b)$ pomoću jednakosti oblika*

(2) $$G(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante koje pripadaju nekoj oblasti skupa $\mathbf{R}^n$, tako da važe uslovi:

– $y = y(x)$ je rešenje jednačine (1) na (a,b),

– eliminacijom konstanti $C_1, \ldots C_n$ iz (2) i iz izvodnih jednakosti dolazi se samo do jednačine (1).

- **Partikularno rešenje** *diferencijalne jednačine (1) je svako rešenje koje se dobija iz opšteg rešenja za posebne (konačne ili beskonačne) vrednosti bar jedne od konstanti $C_1, \ldots, C_n$.*

- **Singularno rešenje** *diferencijalne jednačine (1) je svako njeno rešenje koje nije partikularno, tj. koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu (konačnu ili beskonačnu) vrednost konstanti.*

- **Integralna kriva** *diferencijalne jednačine (1) je svako njeno partikularno ili singularno rešenje, posmatrano kao kriva $y = y(x)$.*

1127. Odrediti red diferencijalnih jednačina:

a) $y'' - 3x^2y' + x^3 = y'''$,

b) $y''' - 3y'' + y' - y = y''' + 5xy$,

c) $y''y' = y''y$.

Rešenje. a) Jednačina je trećeg reda, jer je to najviši red izvoda koji se pojavljuje u jednačini.

b) Iako se u formulaciji jednačine pojavljuje treći izvod, jednačina je drugog reda, jer se treći izvod ne pojavljuje efektivno, tj. posle skraćivanja dobija se jednačina drugog reda koja je ekvivalentna polaznoj.

c) Jednačina je drugog reda. Naime, ona se "raspada" na dve jednačine: $y'' = 0$ i $y' = y$.

1128. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' = 3.$$

Rešenje. Integracijom leve i desne strane date jednačine nalazimo da je

$$y' = 3x + C_1,$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta. Još jednom integracijom dobijamo

(1) $$y = \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Funkcija $y = y(x)$ definisana sa (1) zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu drugog reda i sadrži dve proizvoljne konstante. Da bismo pokazali da je to zaista opšte rešenje, treba pokazati da je ispunjen uslov iz definicije opšteg rešenja, tj. da se eliminacijom konstanti iz (1) i izvodnih jednačina dolazi samo do date diferencijalne jednačine. To je u ovom slučaju jednostavno, jer dvostrukim diferenciranjem u (1) zaista dobijamo jednakost $y'' = 3$.

1129. Data je diferencijalna jednačina

$$y'' - y' = 0\,.$$

Pokazati da je funkcija $y = C_1e^x + 2C_2e^x$ rešenje date jednačine, ali nije njeno opšte rešenje, iako sadrži dve proizvoljne konstante. Objasniti.

Rešenje. Ako dva puta diferenciramo jednakost $y = C_1e^x + 2C_2e^x$ dobijamo

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^x = y\,,$$

$$y'' = C_1e^x + 2C_2e^x = y\,.$$

Prema tome, eliminacijom konstanti se dolazi do date diferencijalne jednačine, ali ne samo do nje, već i do jednačine $y' = y$ koja nije ekvivalentna datoj. Zato data funkcija nije opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

7.1.2 Rešavanje nekih diferencijalnih jednačina prvog reda

Da bi se diferencijalna jednačina rešila, tj. da bismo našli izraz za njeno rešenje, neophodno je transformisati jednačinu na izraz koji omogućava integraciju. Za diferencijalne jednačine koje se mogu dovesti na ovakav oblik kažemo da imaju **rešenja u konačnom obliku** *ili da se rešavaju* **pomoću kvadratura.** *U primenama su od velikog interesa i jednačine koje nemaju rešenje u konačnom obliku; one se rešavaju numeričkim metodama. Ovde navodimo jedan broj tipskih oblika diferencijalnih jednačina za koje postoje standardni metodi pomoću kojih se rešavaju.*

√ **Jednačina koja razdvaja promenljive** *je oblika*

$$f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Ova jednačina rešava se direktnom integracijom.

√ **Homogena jednačina**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

smenom $z = y/x$, gde je z nova funkcija, svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive.

√ **Linearna jednačina prvog reda**

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$$

ima opšte rešenje dato sa

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

√ **Bernoullijeva jednačina**

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^a(x) \qquad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, a \neq 1$$

smenom $z = y^{1-a}$, *gde je* z *nova funkcija, svodi se na linearnu jednačinu.*

√ **Cauchyjevo rešenje.** *Diferencijalna jednačina oblika*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y)$$

gde je F *funkcija dve promenljive definisana i neprekidna u oblasti* $A \subset \mathbf{R}^2$ *ima bar jedno rešenje* $y = y(x)$ *koje zadovoljava uslov* $y(x_0) = y_0$, *za proizvoljnu tačku* $(x_0, y_0) \in A$. *Ovakav uslov naziva se* **početni uslov**, *a rešenje koje zadovoljava početni uslov naziva se* CAUCHYjevo *rešenje.* CAUCHYjevo *rešenje ne mora da bude jedinstveno.*

1130. Naći integralne krive diferencijalne jednačine

$$\mathrm{d}x - \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0,$$

a zatim ispitati koliko integralnih krivih prolazi kroz tačku (x_0, y_0) za razne vrednosti $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

Rešenje. Ako je $x \neq \pm 1$, jednačina može da se napiše u obliku

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

odakle direktnom integracijom nalazimo da je

$$y = \arcsin x + C. \tag{1}$$

S druge strane, prave $x = \pm 1$ su takođe integralne krive date jednačine. Ove prave su singularna rešenja, jer se ni za jednu vrednost konstante C ne mogu dobiti iz opšteg rešenja (1).

Neka je (x_0, y_0) data tačka u ravni. Ako je $|x| > 1$, tada ni jedna integralna kriva date jednačine ne prolazi kroz (x_0, y_0). Ako je $|x| < 1$, tada iz

$$y_0 = \arcsin x_0 + C$$

dobijamo jedinstvenu vrednost za C; dakle, kroz datu tačku prolazi jedna integralna kriva koja odgovara partikularnom rešenju. Konačno, ako je $x = \pm 1$, tada kroz datu tačku $(\pm 1, y_0)$ prolazi jedna integralna kriva singularnog rešenja.

1131. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x\,dy - y\,dx = 0.$$

Rešenje. Ako je $x, y \neq 0$, data jednačina može se napisati u obliku

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

odakle nalazimo, integracijom, da je

$$\log|y| = \log|x| + C,$$

gde je C proizvoljno. Poslednja jednakost može da se napiše u obliku

$$|y| = K|x|, \quad K = e^C,$$

gde je $K > 0$. Odavde zaključujemo da je opšte rešenje date jednačine definisano sa

$$(1) \qquad y(x) = \begin{cases} Ax, & x < 0 \\ Bx, & x > 0 \end{cases} \qquad (A, B \text{ proizvoljne konstante}, x \neq 0).$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine prvog reda, treba, prema definiciji datoj u 7.1.1 da sadrži samo jednu proizvoljnu konstantu. Međutim, funkcija u (1) sadrži dve proizvoljne konstante. Prividna protivrečnost nestaje ako primetimo da (1) važi samo na $(0, +\infty)$ ili na $(-\infty, 0)$. Prema tome, na svakom od ovih intervala, opšte rešenje date jednačine je $y = Cx$, gde je C proizvoljna konstanta.

Ispitajmo da li jednačina ima rešenje na $(-\infty, +\infty)$. Ako je $A \neq B$, tada funkcija definisana sa (1) nije diferencijabilna u nuli, pa ne može biti rešenje diferencijalne jednačine. Ako stavimo da je $A = B\ (= C)$, tada funkcija $y = Cx$ zadovoljava datu jednačinu u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$. Dakle, opšte rešenje date jednačine na $(-\infty, +\infty)$ je $y = Cx$.

1132. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x\,dx + (y+1)\,dy = 0$$

i odrediti onu integralnu krivu koja prolazi kroz tačku $(0, 0)$.

Rešenje. Direktnom integracijom nalazimo

$$\int x\,dx + \int (y+1)\,dy = C,$$

tj.

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+y=C. \tag{1}$$

Sa (1) je određeno opšte rešenje date jednačine. Partikularno rešenje za koje je $y(0)=0$, tj. integralna kriva koja prolazi kroz $(0,0)$, nalazi se kada u (1) stavimo $x=0$ i $y=0$ i tako odredimo konstantu C. U ovom slučaju dobijamo $C=0$. Prema tome, tražena kriva je zadata jednačinom $x^2+y^2+2y=0$.

1133. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$$

i ispitati koliko integralnih krivih prolazi kroz tačku (x_0,y_0) za razne vrednosti $x_0,y_0\in\mathbf{R}$.

Rešenje. Neposrednom integracijom nalazimo da je

$$x^2+y^2=C,$$

i to je opšte rešenje date jednačine. Ako stavimo $x=x_0, y=y_0$, $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, nalazimo da je $C=x_0^2+y_0^2$, tako da je kružnica

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$$

jedina integralna kriva koja prolazi kroz datu tačku $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

Kroz tačku $(0,0)$ ne prolazi ni jedna integralna kriva.

1134. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0.$$

Rešenje. Ako je $x\neq 0, y\neq 0$, jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0,$$

odakle integracijom nalazimo da je

$$\log|y|+\log|x|=K,$$

tj. na isti način kao u zadatku 1131,

$$xy=C, \qquad x\neq 0, y\neq 0.$$

Prave $x=0$ i $y=0$ su takođe integralne krive date jednačine, i to su partikularna rešenja, jer se dobijaju iz opšteg rešenja za $C=0$.

1135. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = -2xy\,.$$

Rešenje. Prava $y = 0$ je očigledno rešenje date jednačine. Ako je $y \neq 0$, tada dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2x\,\mathrm{d}x$$

koja se integracijom svodi na

$$\log|y| = -x^2 + C\,.$$

Ako se C zameni sa $\log C$ (to je moguće zbog proizvoljnosti konstante), dobija se

$$|y| = Ce^{-x^2} \qquad (C > 0)\,, \tag{1}$$

ili, ako se oslobodimo apsolutne vrednosti,

$$y = Ce^{-x^2}\,, \qquad (C \in \mathbf{R}, c \neq 0)\,. \tag{2}$$

Na ovom mestu bismo mogli da se zapitamo da li je funkcija (2) jedino rešenje date jednačine, odnosno da li se oslobađanjem od apsolutne vrednosti u (1) dobijaju još neka rešenja. Naime, ako definišemo, na primer,

$$y = 3e^{-x^2}\,,(0 < x < 2) \qquad y = -3e^{-x^2}\,, x \leq 0 \text{ ili } x \geq 2\,, \tag{3}$$

tada je jednakost (1) ispunjena sa $C = 3$. Međutim, funkcija definisana sa (3) nije rešenje date jednačine jer nije diferencijabilna u tačkama $x = 0$ i $x = 2$. Ostavljamo čitaocu da izvede dokaz da (1) $\Rightarrow$ (2) ako je y diferencijabilna funkcija. Rešenje (2) je izvedeno pod pretpostavkom da je $y \neq 0$. Na početku smo utvrdili da je $y = 0$ jedno rešenje date jednačine; ono se dobija iz (2) za $C = 0$. Prema tome, opšte rešenje je dato sa

$$y(x) = Ce^{-x^2} \qquad (C \in \mathbf{R})\,.$$

1136. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = y + 1$.

Rešenje. Transformišimo datu jednačinu na sledeći način:

$$y' = y+1 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y+1 \iff \mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = 0 \qquad (y \neq -1)\,.$$

Integracijom poslednje jednačine dobijamo opšte rešenje u obliku

$$x - \log|y+1| = C\,.$$

Pri nalaženju rešenja isključili smo slučaj $y = -1$. Iz datog oblika diferencijalne jednačine vidimo da je i funkcija $y = -1$ rešenje ove jednačine, i to partikularno, jer se dobija iz opšteg rešenja za $C = +\infty$.

Primedba. Pokazati da se opšte rešenje ove jednačine može napisati i u obliku $y = Ce^x - 1$.

1137. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(xy - x)\,\mathrm{d}x + (xy + x - y - 1)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Rešenje. Faktorizacijom dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$x(y-1)\,\mathrm{d}x + (x-1)(y+1)\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

odnosno jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{(y+1)\,\mathrm{d}y}{y-1} = 0\,, \qquad (x \neq 1, y \neq 1)\,.$$

Rešenje poslednje jednačine se dobija integracijom:

$$x + \log|x-1| + y + 2\log|y-1| = C\,. \tag{1}$$

Neposredno se proverava da su $x = 1$ i $y = 1$ rešenja date jednačine. Ovo su partikularna rešenja, jer se dobijaju za $C = -\infty$ iz opšteg rešenja (1).

1138. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$2y\sqrt{by - y^2}\,\mathrm{d}x - (b^2 + x^2)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (b \in \mathbf{R})\,,$$

a zatim odrediti integralnu krivu koja prolazi kroz tačku $(0, b)$.

Rešenje. Za $y \neq 0$ i $y \neq b$, jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{2\,\mathrm{d}x}{b^2 + x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{by - y^2}} = 0\,,$$

i opšte rešenje se dobija integracijom:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{b-y}{y}} = C\,. \tag{1}$$

Neposredno se proverava da su $y = 0$ i $y = b$ takođe rešenja date jednačine. Prvo od njih je partikularno, jer se dobija iz (1) za $C = +\infty$; drugo je singularno.

Kroz tačku $(0, b)$ prolazi singularno rešenje $y = b$. Pored toga, iz (1) sa $x = 0, y = b$ dobijamo da je $C = 0$, tako da kroz datu tačku prolazi i partikularno rešenje određeno sa

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{b-y}{y}} = 0\,.$$

1139. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y(ay - y^2)^{1/2}}{(a^2 + x^2)^2} \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

Rešenje. Data jednačina se može napisati u obliku :

$$\frac{dy}{2y^{3/2}(a-y)^{1/2}} = \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} \tag{1}$$

Levu stranu u (1) možemo integraliti kao binomni diferencijal:

$$\int \frac{dy}{2y^{3/2}(a-y)^{1/2}} = \int \frac{dy}{2y^2\left(\frac{a-y}{y}\right)^{1/2}}$$

$$= \int \frac{-\,dt}{a} \qquad \left(t = \sqrt{\frac{a-y}{y}}\right)$$

$$= -\frac{t}{a} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a-y}{y}}\,.$$

Integral I desne strane u (1) izračunat je u zadatku 708 (I_2 sa $p = 0, q = a^2$):

$$I = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + C\,.$$

Prema tome, rešenje jednačine (1) dato je sa

$$-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a-y}{y}} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + C\,.$$

1140. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $y' = 1 + \frac{1}{y}$ $\qquad [\, y - \log|y+1| = x + C \,]$

b) $y' = y^3 + 1$ $\qquad [\, \frac{1}{6}\log\frac{(y+1)^2}{y^2-y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}} = x + C \,]$

c) $(x + 2x^3)\,dx + (y + 2y^3)\,dy = 0$ $\qquad [\, x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = C, \quad C > 0 \,]$

d) $y' = \frac{y-1}{x+1}$ $\qquad [\, y = 1 + C(x+1), x \neq -1 \,]$

e) $y' = e^{x-y}$ $\qquad [\, e^y - e^x = C \,]$

1141. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = \sqrt{y - x}\,.$$

Rešenje. Ako se uvede nova funkcija z pomoću smene $z = y - x$, dobija se ♣

diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive:

$$z' = \sqrt{z} - 1,$$

čije se rešenje nalazi integracijom:

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{z}-1} = 2z + 2\log|z-1| + C.$$

Rešenje diferencijalne jednačine dato je sa

$$x = 2\sqrt{y-x} + 2\log|\sqrt{y-x}-1| + C.$$

1142. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $y' = \sqrt{x^2-y} + 2x$ $\quad [\, y = x^2 - \frac{(x-C)^2}{4}, x \le C, \text{singul. reš. } y = x^2 \,]$

b) $y' = \dfrac{1}{x+y-1}$ $\quad [\, \log|x+y| - y = C \,]$

1143. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}.$$

Rešenje. Ova diferencijalna jednačina je homogena, jer se može napisati u obliku

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Ako uvedemo novu funkciju z pomoću smene $y = zx$, $y' = z'x + z$, dobijamo

$$z'x + z = 1 + z, \quad \text{tj.} \quad xz' = 1,$$

odakle je

$$z = \log|x| + C.$$

Prema tome, opšte rešenje date jednačine je

$$y = x(\log|x| + C) \qquad (x \neq 0).$$

1144. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Rešenje. Smenom $y = zx$ dobijamo jednačinu

$$xz' + z = \frac{1+z}{1-z},$$

odnosno

$$\frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \frac{dx}{x},$$

čije je rešenje dato sa

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\log(1+z^2) - \log|x| = C_1,$$

ili, posle sređivanja,

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}(y/x)}.$$

1145. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2+6xy+2x^2}{2y+5x}.$$

Rešenje. Data jednačina se može napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2(y^2/x^2)+6(y/x)+2}{2(y/x)+5},$$

što znači da je jednačina homogena. Uvođenjem nove funkcije v pomoću smene $y = xv$ dobija se $y' = v + xv'$, pa se smenom u jednačinu dobija

$$v + xv' = \frac{2v^2+6v+2}{2v+5}.$$

Daljim sređivanjem dobija se jednačina koja razdvaja promenljive:

$$\frac{2v+5}{v+2}dv = \frac{dx}{x}. \tag{1}$$

Integracija obe strane u (1) daje

$$2v + \log|v+2| = \log|xC|, \qquad C = \text{const}. \tag{2}$$

Stavljanjem $v = y/x$ u (2), dobijamo opšte rešenje u obliku

$$x^2 = D(y+2x)e^{2y/x}, \qquad D = \text{const}. \tag{3}$$

Objasnite kako se dobija konstanta C pod znakom apsolutne vrednosti u (2) i kako se dobija oblik (3). Da li je rešenje neprekidno u tački $x = 0$?

1146. Rešiti jednačinu

$$(x^2+2xy-y^2)\,dx+(y^2+2xy-x^2)\,dx=0\,,$$

a zatim odrediti integralne krive koje prolaze kroz tačke $A(2,2)$ i $B(1,-1)$.

Rešenje. Smenom $y=zx$, dobijamo jednačinu

$$\frac{dx}{x}+\frac{z^2+2z-1}{(z^2+1)(z+1)}\,dz=0 \qquad (z\neq -1)\,,$$

čije rešenje je dato sa

$$\frac{x(z^2+1)}{z+1}=C\,,$$

odnosno, vraćanjem na y,

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=C\,. \tag{1}$$

Funkcija $z=-1$, tj. $y=-x$ je partikularno rešenje jednačine, koje se iz opšteg rešenja (1) dobija za $C=\infty$.

Ako u (1) stavimo $x=y=2$, dobijamo $C=2$, tako da kroz tačku $A(2,2)$ prolazi integralna kriva data sa

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=2\,.$$

Kroz tačku $B(1,-1)$ prolazi samo prava $y=-x$.

1147. Diferencijalnu jednačinu

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

svesti na homogenu ili na jednačinu koja razdvaja promenljive i objasniti kako bi se dobilo opšte rešenje date jednačine.

Rešenje. Razlikovaćemo dva slučaja:

1° : $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. U ovom slučaju data jednačina se može svesti na homogenu ako se uvedu nove promenljive u, v pomoću

$$x=u+\alpha \qquad y=v+\beta\,,$$

gde se α i β određuju tako da važi

$$a_1x+b_1y+c_1=a_1u+b_1v, \qquad a_2x+b_2y+c_2=a_2u+b_2v\,,$$

tj.

$$a_1\alpha+b_1\beta=-c_1\,, \qquad a_2\alpha+b_2\beta=-c_2\,. \tag{1}$$

Kako je, po pretpostavci, determinanta sistema (1) različita od nule, konstante α i β se jednoznačno određuju. Na taj način, data jednačina postaje

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right),$$

što je homogena jednačina. Ako je opšte rešenje poslednje jednačine dato sa $v = F(u, C)$, tada je opšte rešenje date jednačine oblika $y = F(x + \alpha, C) + \beta$.

2° : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. U ovom slučaju data diferencijalna jednačina je oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right),$$

ili oblika

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti. Ako se uvede nova zavisna promenljiva sa (u prvom slučaju)

$$z = a_1x + b_1y,$$

jednačina se svodi na

$$\frac{dz}{dx} = f_1(z),$$

što je jednačina koja razdvaja promenljiva.

1148. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0.$$

Rešenje. Ova jednačina ima oblik iz zadatka 1147. Ako uvedemo smene

$$x = u + \alpha, \qquad y = v + \beta,$$

pri čemu α i β nalazimo iz uslova da je

$$x + y - 2 = u + v, \qquad x - y + 4 = u - v,$$

tada su α i β rešenja sistema

$$\alpha + \beta = 2, \qquad \alpha - \beta = -4,$$

odakle je $\alpha = -1$, $\beta = 3$, tj.

$$x = u - 1, \qquad y = v + 3.$$

Na ovaj način, jednačina se svodi na homogenu jednačinu:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v + u}{v - u},$$

čije je opšte rešenje dato sa

$$u^2 + 2uv - v^2 = C\,.$$

Vraćanjem na promenljive x i y dobijamo

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C\,.$$

1149. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{-2x + 2y + 1}{x - y + 1}\,.$$

Rešenje. Ova jednačina ima oblik kao u slučaju 2° zadatka 1147. Ako stavimo $z = x - y$, posle sređivanja dobijamo jednačinu koja razdvaja promenljive

$$3\,\mathrm{d}x - \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

čije je rešenje dato sa

$$3x - z - \log|z| = C\,.$$

Zamenom z sa $x - y$ dobijamo opšte rešenje date jednačine:

$$2x + y - \log|x - y| = C\,.$$

1150. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $x(x+2y)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$ $\quad [\,x^3 + 3x^2y - y^3 = C\,]$

b) $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y$ $\quad [\,x = y(C - \log|y|)\,]$

c) $\dfrac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2 - 4xy}$ $\quad [\,2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C\,]$

d) $(2x - y + 1)\,\mathrm{d}x + (2y - x - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ $\quad [\,x^2 + y^2 - xy + x - y = C\,]$

e) $(x - y)\,\mathrm{d}x + (2y - x + 1)\,\mathrm{d}y = 0$ $\quad [\,x^2/2 + y^2 - xy + y = C\,]$

f) $(x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ $\quad [\,x + 2y + 3\log|x + y - 2| = C\,]$

1151. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' + \frac{y}{x} = 3x$$

a zatim naći ono partikularno rešenje za koje je $y(2) = 1$.

Rešenje. Data jednačina je linearna. Primenom formule za njeno opšte rešenje nalazimo:

$$y = e^{-\int \mathrm{d}x/x}\left(C + 3\int x e^{\int \mathrm{d}x/x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{|x|}\left(C + 3\int x|x|\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{|x|}\left(C + x^3 \operatorname{sgn} x\right) = \frac{C}{|x|} + x^2\,.$$

Kako je C proizvoljna konstanta i kako je ovo rešenje definisano samo za $x \neq 0$, tj. na $(0, +\infty)$ ili na $(-\infty, 0)$, možemo se osloboditi apsolutne vrednosti i pisati ♣

$$y = \frac{C}{x} + x^2 \qquad (x \neq 0).$$

Partikularno rešenje nalazimo iz datog uslova:

$$y(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{C}{2} + 2^2 \Rightarrow C = -6, \quad \text{tj.} \quad y = -\frac{6}{x} + x^2.$$

1152. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x\,\mathrm{d}y + (x^2 - y)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Rešenje. Deljenjem sa $x\,\mathrm{d}x$ $(x \neq 0)$ dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$y' - \frac{y}{x} = -x,$$

čije je rešenje dato sa

$$y = x(C - x).$$

Data jednačina ima i singularno rešenje $x = 0$, koje zadovoljava jednačinu, ali se ne može dobiti iz opšteg rešenja.

1153. Rešiti jednačinu

$$2y\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Rešenje. Ova jednačina nije linearna po y, ali je linearna po x: ♣

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2}.$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$x = Cy - \frac{y^2}{2}.$$

1154. Pokazati da se svaka linearna diferencijalna jednačina

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$$

može napisati u obliku

$$(yR(x))' = Q(x)R(x), \qquad R(x) = \exp\left(\int P(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

i na osnovu toga izvesti formulu za njeno opšte rešenje.

Rešenje. Množenjem obe strane date jednačine sa $R(x)$ dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$y'R(x) + P(x)R(x)y = Q(x)R(x)\,.$$

Kako je

$$R'(x) = P(x)R(x)\,,$$

poslednja jednačina se može napisati u obliku

$$y'R(x) + R'(x)y = Q(x)R(x)\,, \quad \text{tj.} \quad (yR(x))' = Q(x)R(x)\,.$$

Integracijom nalazimo da je

$$yR(x) = \int Q(x)R(x)\,\mathrm{d}x + C\,,$$

odnosno,

$$y = \frac{1}{R(x)}\left(C + \int Q(x)R(x)\,\mathrm{d}x\right)\,,$$

što je opšte rešenje date jednačine.

1155. Neka je i intenzitet električne struje i neka su u, R, L vrednosti napona izvora, otpornosti i induktivnosti u električnom kolu (smatraćemo da su poslednje tri veličine pozitivne konstante). Ako je

$$u = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,,$$

odrediti kako se menja $i = i(t)$ ako je $i(0) = i_0$. Naći $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)$.

Rešenje. Data jednačina je linearna po $i = i(t)$. Koristeći se formulom za opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine, dobijamo bez teškoća:

$$i(t) = \frac{u}{R} + e^{-Rt/L}\left(i_0 - \frac{U}{R}\right)\,.$$

Odavde sleduje da je

$$\lim_{t\to+\infty} i(t) = \frac{U}{R} \qquad \text{(OHMov zakon)}.$$

1156. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x^3y' = 1 + 3x^3 - 2x^2y\,.$$

Dokazati da svaka integralna kriva seče jednu od svojih asimptota i odrediti koordinate tačke preseka.

Rešenje. Data diferencijalna jednačina je linearna:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1+3x^3}{x^3} .$$

Njeno opšte rešenje je

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp\left(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(C+\int \frac{1+3x^3}{x^3}\exp\left(\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{C}{x^2}+\frac{\log|x|}{x^2}+x . \end{aligned} \tag{1}$$

Funkcija definisana sa (1) očigledno ima kosu asimptotu $y = x$. Za dato C, apscisa preseka integralne krive se dobija kao rešenje jednacine

$$\frac{C}{x^2}+\frac{\log|x|}{x^2}+x = x ,$$

koja je ekvivalentna sa

$$C + \log|x| = 0 ,$$

tako da za svako C postoje dva rešenja : $x_{1,2} = \pm e^{-C}$, $y_{1,2} = x_{1,2}$.

1157. Uvođenjem smene $\sin y = z$ rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y} .$$

Rešenje. Množenjem leve i desne strane date jednačine sa $\cos y$, dobijamo

$$y' \cos y + \sin y = x \qquad (\cos y \neq 0) .$$

Ako ovde stavimo $\sin y = z$, $y' \cos y = z'$, dobijamo linearnu jednačinu

$$z' + z = x ,$$

čije je rešenje $z = Ce^{-x} + x - 1$. Prema tome, opšte rešenje date jednačine je

$$\sin y + 1 - x + Ce^{-x} = 0 \qquad (\cos y \neq 0) .$$

1158. Odrediti sve neprekidne funkcije f koje zadovoljavaju uslov

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{x}{3}(f(x)+2f(0)) . \tag{1}$$

Rešenje. Neka je $L(x)$ leva, a $D(x)$ desna strana jednakosti (1). Kako je, za svako f, $L(0) = D(0) = 0$, jednakost (1) će biti zadovoljena ako odredimo funkciju f za koju važi $L'(x) = D'(x)$.

Diferenciranjem obe strane jednakosti (1) dobijamo

$$f(x) = \frac{x}{3}(f'(x) + 2f(0)) + \frac{x}{3}f'(x)\,,$$

ili, posle sređivanja:

$$f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = -\frac{2}{x}f(0). \tag{2}$$

Dobili smo, dakle, linearnu diferencijalnu jednačinu po f, u kojoj ćemo $f(0)$ tretirati kao konstantu. Rešenje ove jednačine je

$$f(x) = Cx^2 + f(0)\,, \tag{3}$$

gde je C proizvoljna konstanta. U stvari, i $f(0)$ je proizvoljna konstanta, jer $f(0)$ nije određeno iz (3). Ako stavimo $f(0) = A$, dobijamo

$$f(x) = A + Cx^2 \qquad (A, C \in \mathbf{R})\,.$$

Proveriti zamenom u (1).

1159. Naći sve neprekidne funkcije $y = y(x)$ za koje važi jednakost

$$x\int_0^x y\,dx = (x+1)\int_0^x xy\,dx\,.$$

Rezultat. $y = Cx^{-3}e^{-1/x}$.

1160. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $y' - y\sin x = \sin x\cos x$ [$y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$]

b) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ [$y = (1+x^2)(C+x)$]

c) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ [$y = e^{-x^2}(C+x^2)$]

1161. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}\,.$$

Rešenje. Smenom $z = y^{1-1/2} = \sqrt{y}$, $y = z^2$, $y' = 2zz'$, data BERNOULLIjeva jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu po nepoznatoj funkciji z:

$$zz' + \frac{x}{2(1-x^2)}z^2 = z\frac{x}{2}\,.$$

Odavde je $z = 0$ jedno rešenje. Deljenjem sa $z \neq 0$ dobija se linearna diferencijalna jednačina

$$z' + \frac{x}{2(1-x^2)}z = \frac{x}{2}\,.$$

čije je opšte rešenje dato sa

$$z = \sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2),$$

odakle dobijamo da je

$$\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2).$$

Prvo nađeno rešenje $z = 0$, tj. $y = 0$ je singularno rešenje date jednačine.

1162. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = x^3y^2 + xy\,.$$

Rešenje. Ovo je BERNOULLIjeva jednačina, koja se smenom $z = y^{-1}$, $y' = -z'/z^2$ svodi na linearnu jednačinu:

$$z' + xz = -x^3\,.$$

Rešenje poslednje jednačine dobijamo u obliku

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int x\,dx}\left(C + \int(-x^3)\exp\left(\int x\,dx\right)dx\right) \\ &= Ce^{-x^2/2} - x^2 + 2\,. \end{aligned}$$

Odavde je

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2/2} - x^2 + 2}\,,$$

gde je C proizvoljna konstanta.

1163. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'(xy - y^3x^4) = 1.$$

Rešenje. Ako se data jednačina napiše u obliku

$$\frac{dx}{dy} = xy - y^3x^4,$$

prepoznaje se oblik BERNOULLIjeve jednačine po funkciji $x = x(y)$. Smenom $z = x^{-3}$ i svođenjem na linearnu jednačinu, dobija se opšte rešenje :

$$x = \left(Ce^{-3y^2/2} + \frac{3y^2-2}{3}\right)^{-1/3}\,.$$

1164. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $y' + 2xy = 2x^3y^3$ $[\, y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + 1/2 \,]$

b) $3y^2y' + y^3 + x = 0$ $[\, y^3 = Ce^{-x} - x + 1 \,]$

c) $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$ $[\, x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1) \,]$

7.1.3 Jednačine Lagrangea i Clairauta

Lagrangeova jednačina

(1) $$y = xf(y') + \varphi(y')$$

rešava se smenom $y' = p$ *i diferenciranjem, pri čemu se dobija linearna jednačina:*

(2) $$p = f(p) + (xf'(p) + \varphi'(p))\frac{dp}{dx}.$$

Iz (2) se dobija $x = x(p)$*; zamenom u (1) dobijamo* $y = y(p)$*, što daje rešenje u parametarskom obliku.*

Clairautova jednačina

$$y = xy' + \varphi(y')$$

je specijalni slučaj LAGRANGEove *jednačine. Ova jednačina uvek ima i singularno rešenje .*

1165. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y = x + xy' + (y')^2.$$

Rešenje. Ovo je LAGRANGEova jednačina. Ako stavimo $y' = p$, imamo da je

(1) $$y = x + xp + p^2.$$

Diferenciranjem ove jednakosti dobijamo

$$dy = dx + x\,dp + p\,dx + 2p\,dp.$$

Kako je $dy = p\,dx$, imamo jednačinu

$$dx + x\,dp + 2p\,dp = 0$$

koja je ekvivalentna sa linearnom jednačinom po x:

$$\frac{dx}{dp} + x + 2p = 0.$$

Rešenje poslednje jednačine je

$$x = Ce^{-p} - 2(p-1). \tag{2}$$

Ako (2) zamenimo u (1), dobijamo

$$y = Ce^{-p}(1+p) - p^2 + 2. \tag{3}$$

Jednakostima (2) i (3) definisano je opšte rešenje date diferencijalne jednačine u parametarskom obliku.

1166. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y = xy' + (y')^2.$$

Rešenje. Data jednačina je CLAIRAUTova. Uvedimo parametar $p = y'$ i napišimo jednačinu u obliku

$$y = xp + p^2. \tag{1}$$

Diferenciranjem obe strane, dobijamo

$$\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}x + 2p\,\mathrm{d}p.$$

Kako je $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, poslednja jednačina se svodi na

$$(x + 2p)\,\mathrm{d}p = 0. \tag{2}$$

Iz (2) sleduje da je $x = -2p$ ili $p = C$. Ako u (1) stavimo $x = -2p$, dobijamo $y = -p^2$, što daje singularno rešenje u parametarskom obliku. U ovom slučaju, ovo rešenje može da se napiše i u eksplicitnom obliku:

$$x = -2p \Rightarrow p = -\frac{x}{2} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}.$$

Iz $p = C$ i iz (1) dobijamo opšte rešenje $y = Cx + C^2$.

7.1.4 Riccatijeva jednačina

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

U opštem slučaju, ova jednačina nema rešenja pomoću kvadratura. Ako je poznato jedno partikularno rešenje y_1 ove jednačine, tada se uvođenjem nove zavisne promenljive z pomoću smene $y = y_1 + 1/z$, dobija linearna diferencijalna jednačina.

1167. Data je diferencijalna jednačina

$$(x-1)y' - y^2 + xy = x - 1 \,. \tag{1}$$

a) Pokazati da data jednačina ima partikularno rešenje u obliku polinoma prvog stepena, pa na osnovu toga odrediti opšte rešenje date jednačine.

b) Pokazati da sve integralne krive, osim jedne, prolaze kroz tačku $(1,1)$. Kako glasi jednačina te jedne krive ?

Rešenje. Zamenom $y = ax + b$ u datoj jednačini, dobijamo

$$x^2(a - a^2) + x(a - 2ab + b - 1) + 1 - b^2 = 0 \,.$$

Izjednačavanjem sa nulom koeficijenata uz $x^2, x, 1$, dobijamo sistem jednačina

$$a - a^2 = 0 \,,\ a - 2ab + b - 1 = 0 \,,\ 1 - b^2 = 0 \,,$$

čije je jedino rešenje $a = 0, b = 1$. Odavde sleduje da je $y = 1$ jedno partikularno rešenje date diferencijalne jednačine.

Uvedimo novu funkciju z pomoću smene $y = 1 + 1/z$. Zamenom u (1) dobijamo diferencijalnu jednačinu po z:

$$z' - \frac{2-x}{1-x} z = \frac{1}{1-x} \,. \tag{2}$$

Jednačina (2) je linearna po z; rešavajući je na uobičajen način, dobijamo

$$z(x) = \frac{Ce^x - 1}{1-x} \Rightarrow y(x) = 1 + \frac{1-x}{Ce^x - 1} \,. \tag{3}$$

Iz (3) sleduje da je $y(1) = 1$ za svako C za koje je $Ce^1 - 1 \neq 0$. Prema tome, jedino integralna kriva sa $C = 1/e$ možda ne prolazi kroz tačku $(1,1)$. Ta integralna kriva ima jednačinu

$$y = g(x) = 1 + \frac{1-x}{e^{x-1} - 1} \,.$$

Kako je

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{t \to 0} \left(1 - \frac{t}{e^t - 1}\right) = \lim_{t \to 0} \left(1 - \frac{t}{t + t^2/2 + \ldots}\right) = 0,$$

zaključujemo da ova integralna kriva zaista ne prolazi kroz $(1,1)$.

U stvari, ispitivanje poslednje granične vrednosti nije potrebno ako se izraz "kriva prolazi kroz tačku $(1,1)$" shvati u strogom smislu, tj, $g(1) = 1$, jer funkcija g nije ni definisana u $x = 1$. Međutim, ako bismo imali da je $\lim_{x \to 1} g(1) = 1$, i u tom slučaju bismo mogli da kažemo da kriva "prolazi" kroz $(1,1)$.

1168. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $y' = -y^2 + 1 + x^2$, ako je partikularno rešenje oblika $y_1 = ax + b$.

$$[\, y_1 = x,\ y = x + e^{-x^2}\left(C + \int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^{-1} \,]$$

b) $y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}$, ako je partikularno rešenje oblika $y_1 = \frac{a}{x} + b$.

$$[\, y_1 = -\tfrac{1}{x},\ y = -\tfrac{1}{x} + \tfrac{2}{x(C - \log|x|)} \,]$$

7.1.5 Diferencijalna jednačina u totalnom diferencijalu

Ovo je jednačina oblika

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0\,, \tag{1}$$

gde funkcije P i Q, sa neprekidnim parcijalnim izvodima do drugog reda, zadovoljavaju uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{2}$$

Ako je ovaj uslov ispunjen, postoji funkcija dve promenljive $f(x,y)$ za koju je $\mathrm{d}f(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$. Tada se jednačina (1) svodi na $f(x,y) = C$, što predstavlja njeno opšte rešenje. Dakle, problem rešavanja jednačine u totalnom diferencijalu se svodi na određivanje funkcije f takve da je $\mathrm{d}f = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. Ako je (x_0, y_0) proizvoljna tačka u oblasti u kojoj je definisana jednačina (1), tada se funkcija f određuje prema formuli

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Ako uslov (2) nije ispunjen, u nekim slučajevima se može odrediti funkcija $\lambda = \lambda(x,y)$ **(integracioni faktor)**, *takva da je*

$$\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}\,. \tag{3}$$

Ako postoji integracioni faktor, tada umesto jednačine (1) rešavamo ekvivalentnu jednačinu u totalnom diferencijalu

$$\lambda(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \lambda(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

1169. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Rešenje. Označimo sa P i Q izraze uz $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$, respektivno. Imamo da je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy\,,$$

što znači da je data jednačina u totalnom diferencijalu. Funkcija f takva da je $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f$ može se naći po formuli

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^x P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_0^y Q(0,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x (3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^y 4y^3\,\mathrm{d}y \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + y^4\,, \end{aligned}$$

pa je opšte rešenje dato sa

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C\,.$$

1170. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$((x+y+1)e^x - e^y)\,\mathrm{d}x + (e^x - (x+y+1)e^y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Rešenje. Ova jednačina je jednačina u totalnom diferencijalu, što nije teško proveriti. Neka su P i Q izrazi uz $\mathrm{d}x$, odnosno uz $\mathrm{d}y$. Neka je $f(x,y)$ funkcija čiji je diferencijal jednak $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. Umesto da primenimo gotovu formulu, funkciju f možemo odrediti i na sledeći način: Iz $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$ imamo da je

$$f(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = (x+y)e^x - xe^y + \varphi(y)\,,$$

gde je φ funkcija koju određujemo iz

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)\,,$$

što je ekvivalentno sa

$$e^x - xe^y + \varphi'(y) = e^x - (x+y+1)e^y\,,$$

odakle je $\varphi'(y) = -(y+1)e^y$. Rešavanjem ove diferencijalne jednačine po φ, dobijamo $\varphi(y) = -ye^y$. Prema tome,

$$f(x,y) = (x+y)(e^x - e^y)\,,$$

i opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $f(x,y) = C$, odnosno

$$(x+y)(e^x - e^y) = C\,.$$

1171. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0\,.$$

Rešenje. Jednačine u totalnom diferencijalu se u nekim slučajevima mogu rešavati i jednostavnim grupisanjem članova, čime se neposredno dolazi do oblika $df(x,y) = 0$. Ovde imamo da je

$$\begin{aligned}(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy &= 2x\,dx + 2y\,dy - (y\,dx + x\,dy) + dx - dy \\ &= d(x^2 + y^2 - xy + x - y)\,,\end{aligned}$$

pa je opšte rešenje ove jednačine dato sa

$$x^2 + y^2 - xy + x - y = C\,.$$

1172. Dokazati da diferencijalna jednačina

$$y(2x - y + 2)\,dx + 2(x - y)\,dy = 0$$

ima integracioni faktor koji zavisi samo od x, naći taj faktor, pa zatim odrediti opšte rešenje date jednačine.

Rešenje. Uvedimo oznake

$$P(x,y) = y(2x - y + 2)\,,\quad Q(x,y) = 2(x - y)\,.$$

Integracioni faktor $\lambda = \lambda(x)$ treba da zadovoljava uslov

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda(x)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)Q(x,y))\,,$$

odakle se dobija

$$\lambda(x)(2x - y + 2) - \lambda(x)y = 2\lambda'(x)(x - y) + 2\lambda(x)\,,$$

odnosno, posle sređivanja:

$$2\lambda(x)(x - y) = 2\lambda'(x)(x - y)\,.$$

Deljenjem sa $x - y$, dobija se $\lambda'(x) = \lambda(x)$, odakle je $\lambda(x) = e^x$ (integracionu konstantu ne uzimamo u obzir, jer nam je dovoljan samo jedan integracioni faktor). Sada se data jednačina može napisati u obliku

$$y(2x - y + 2)e^x\,dx + 2(x - y)e^x\,dy = 0. \tag{1}$$

Neka je $f(x,y)$ funkcija čiji je totalni diferencijal jednak izrazu sa leve strane u (1). Integracijom po y dobijamo

$$f(x,y) = \int (2x - 2y)e^x\,dy + \varphi(x) = 2xye^x - y^2e^x + \varphi(x)\,,$$

gde je φ proizvoljna diferencijabilna funkcija koju određujemo iz uslova $\partial f/\partial x = P(x,y)$, tj,

$$2ye^x + 2xye^x - y^2e^x + \varphi'(x) = y(2x - y + 2)e^x ,$$

odakle je $\varphi'(x) = 0$ i $\varphi(x) = C_1$. Opšte rešenje date jednačine je $f(x,y) = C_2$, odnosno $(2x - y)ye^x = C$.

1173. Ispitati da li jednačina

$$(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)\,dy = 0$$

ima integracioni faktor koji zavisi samo od x .

Rešenje. Pretpostavimo da postoji integracioni faktor $\lambda = \lambda(x)$. Tada bismo imali, redom

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda(x)(x^2 + y^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)(x + y))$$
$$\lambda(x) \cdot 2y = \lambda'(x) \cdot (x + y) + \lambda(x)$$
$$\lambda(x) \cdot (2y - 1) = \lambda'(x) \cdot (x + y) .$$

Odavde je

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{2y - 1}{x + y} . \tag{1}$$

Jednačina (1) nema rešenja koje bi bilo funkcija samo od x, jer desna strana u (1) efektivno zavisi i od y. Prema tome, data jednačina nema integracioni faktor koji bi bio funkcija samo od x. Da li je moguće naći integracioni faktor u nekom drugom obliku ?

1174. Dokazati da diferencijalna jednačina

$$(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)\,dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)\,dy = 0$$

ima integracioni faktor oblika $g(x + y)$. Odrediti opšte rešenje ove jednačine.

Rezultat. Integracioni faktor je $(x + y)^{-2}(x + y + 2)^{-2}$. Opšte rešenje date jednačine je $x^2 + y^2 + C(xy + x + y) = 0$.

1175. Dokazati da diferencijalna jednačina

$$y\,dx + (x^2y^2 + x)\,dy = 0$$

ima integracioni faktor oblika $g(xy)$. Zatim naći opšte rešenje ove jednačine, kao i onu integralnu krivu koja prolazi kroz tačku $(-1, 1)$.

Rezultat. Integracioni faktor je $1/(x^2y^2)$. Opšte rešenje je $y - (xy)^{-1} = C$.

1176. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x\,dy}{y^2} = 0$ $\quad [\, x/y = C \,]$

b) $x\,dx + y\,dy + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$ $\quad [\, x^2 + y^2 + 2\operatorname{arctg}(x/y) = C \,]$

c) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1\right) dx - \dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0$ $\quad [\, \sqrt{x^2-y^2} - x = C \,]$

d) $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \dfrac{e^y}{1+x^2}\,dy = 0$ $\quad [\, \dfrac{e^y-1}{1+x^2} = C \,]$

e) $\left(1 + e^{x/y}\right) dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$ $\quad [\, x + ye^{x/y} = C \,]$

1177. Naći integracioni faktor u jednom od oblika

$$\lambda(x),\ \lambda(y),\ \lambda(x+y),\ \lambda(xy),\ \lambda(x^2-y^2),\ \lambda(x^2+y^2)$$

a zatim rešiti diferencijalne jednačine:

a) $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\dfrac{x}{y} - 1\right) dy = 0$ $\quad [\, x^2 - y^2 + 2xy = C \,]$

b) $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$ $\quad [\, x - y/x = C \,]$

c) $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$ $\quad [\, x^2 + y - x/y + \log|y| = C \,]$

d) $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$ $\quad [\, x^2y^2 + 2\log(x/y) = C \,]$

e) $(y + x^2)\,dy + (x - xy)\,dx = 0$ $\quad [\, x^2 + y^2 = C(y-1)^2 \,]$

f) $\left(2y + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right) dx + \left(3y + x + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right) dy = 0$

$[\, y^3 + x^2y + 2xy^2 + \log|x+y| = C \,]$

►► 8.6.1

7.2 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

7.2.1 Linearne diferencijalne jednačine i metodi njihovog rešavanja

- *Diferencijalna jednačina oblika*

$$(1) \qquad y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = F(x)$$

je linearna diferencijalna jednačina reda n. Pretpostavićemo da su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ neprekidne u oblasti u kojoj tražimo rešenje ove diferencijalne jednačine. Funkcija F je **slobodni član** *diferencijalne jednačine (1). Ako je $F(x) \equiv 0$, tada je ova jednačina* **homogena**, *u protivnom je* **nehomogena**. *Svakoj nehomogenoj jednačini (1) može se pridružiti homogena jednačina*

$$(2) \qquad y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0$$

√ *Homogena jednačina (2) uvek ima rešenje $y \equiv 0$.*

√ *Neka su $y_1, \ldots y_n$ rešenja homogene jednačine (2). Funkcije $y_1, \ldots, y_n$ su linearno nezavisne ako i samo ako je determinanta*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ & & \ldots & \\ y^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) & \ldots & y^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

različita od nule u bar jednoj tački x. Determinanta W se naziva **Wronskijanom** *jednačine (2). Ako je $W(x) = 0$ za neko x iz oblasti u kojoj su funkcije f_i neprekidne, tada je $W(x) = 0$ u svakoj tački te oblasti.*

√ *Ako su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene jednačine, tada je njeno opšte rešenje dato sa*

$$(3) \qquad y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n\,,$$

gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

√ **Liouvilleova formula za diferencijalnu jednačinu drugog reda.** *Ako je y_1 partikularno rešenje homogene diferencijalne jednačine drugog reda*

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0\,,$$

tada je

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int f_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x$$

takođe partikularno rešenje date jednačine, linearno nezavisno od y_1.

Ako je poznato jedno partikularno rešenje y_1 date jednačine, tada se drugo rešenje y_2, linearno nezavisno od y_1, može naći primenom navedene formule, i time se dobija opšte rešenje $C_1y_1 + C_2y_2$. Prema tome, u ovom slučaju je dovoljno poznavati samo jedno partikularno rešenje da bi se dobilo opšte rešenje.

√ **Metod varijacije konstanti za rešavanje nehomogene jednačine.** *Ako je poznato opšte rešenje homogene jednačine (2), u obliku (3), tada je opšte rešenje odgovarajuće nehomogene jednačine (1) dato sa*

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n\,,$$

gde su $C_1 \ldots, C_n$ **funkcije** *koje se određuju iz sistema jednačina*

$$\begin{aligned}
C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n &= 0\\
C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} &= 0\\
C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} &= F(x)
\end{aligned}$$

Iz ovog sistema se dobijaju funkcije $C_1', \ldots, C_n'$, pa se zatim funkcije $C_1, \ldots, C_n$ nalaze integracijom.

√ *Pored metoda varijacije konstanti, opšte rešenje nehomogene jednačine može se naći i ako se poznaje jedno partikularno rešenje y_p te jednačine i opšte rešenje (3) homogene jednačine. Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine dato sa*

$$y = y_h + y_p = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + y_p\,.$$

√ **Linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.** *Jednačina oblika (1) u kojoj su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ konstante, tj.*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = F(x)\,. \tag{4}$$

naziva se linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća homogena jednačina

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0\,. \tag{5}$$

može se rešiti ako se njeno rešenje potraži u obliku $y = e^{\lambda x}$. Konstanta λ se određuje zamenom u (5), pri čemu se dobija **karakteristična jednačina** *diferencijalne jednačine (5):*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,. \tag{6}$$

Ova algebarska jednačina ima n korena i svakom korenu odgovara jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine (5), po sledećem pravilu:

– *Ako je* λ *realan prost koren karakteristične jednačine (6), tada je* $y = e^{\lambda x}$ *jedno partikularno rešenje homogene diferencijalne jednačine (5).*

– *Ako je* λ *realan koren reda* k *karakteristične jednačine, tada su*

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

partikularna rešenja homogene jednačine.

– *Ako je* $\lambda = \alpha + i\beta$ *prost kompleksan koren jednačine (6), tada je i* $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ *takođe koren ove jednačine, i ovom paru korena odgovaraju dva partikularna rešenja diferencijalne jednačine (5):*

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

– *Ako su* $\lambda = \alpha + i\beta$ *i* $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ *kompleksni koreni reda* k *jednačine (6), tada su*

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

partikularna rešenja homogene jednačine (5).

Opšte rešenje homogene jednačine (5) dobija se kao linearna kombinacija partikularnih rešenja nađenih po izloženom postupku.

√ **Rešavanje nehomogene jednačine sa konstantnim koeficijentima.** *Ako je poznato opšte rešenje homogene jednačine (5), opšte rešenje nehomogene jednačine (4) može se naći metodom varijacije konstanti.*

Alternativno, ako je poznato jedno partikularno rešenje y_p *nehomogene jednačine, njeno opšte rešenje je* $y = y_h + y_p$, *gde je* y_h *opšte rešenje homogene jednačine. Za neke specifične oblike slobodnog člana* F, *partikularno rešenje nehomogene jednačine može se odrediti metodom neodređenih koeficijenata, po sledećem pravilu:*

– *Ako je* $F(x)$ *polinom stepena* m *i ako* 0 *nije koren karakteristične jednačine, tada se partikularno rešenje traži u obliku polinoma istog stepena, čiji se koeficijenti nalaze metodom neodređenih koeficijenata iz jednačine (4). Ako je* 0 *koren reda* k *karakteristične jednačine, tada se partikularno rešenje traži u obliku* $y_p = x^kQ(x)$, *gde je* Q *polinom stepena* m.

– *Ako je* $F(x) = e^{\alpha x}P(x)$, *gde je* P *polinom stepena* m *i ako* α *nije koren karakteristične jednačine, tada je* $y_p = e^{\alpha x}Q(x)$, *gde je* Q *polinom stepena* m. *Ako je* α *koren reda* k *karakteristične jednačine, tada je* $y_p = x^kQ(x)$.

– *U najopštijem slučaju, ako je*

$$F(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right),$$

gde su P_1, P_2 *polinomi stepena* m_1, m_2 *respektivno, i ako* $\alpha + i\beta$ *nije koren karakteristične jednačine, tada se* y_p *traži u obliku*

$$y_p = e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right),$$

gde su Q_1, Q_2 polinomi stepena $m = \max(m_1, m_2)$. Ako je $\alpha + i\beta$ koren reda k karakteristične jednačine, tada se uzima da je

$$y_p = x^k \left(e^{\alpha x} \left(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x\right)\right) .$$

– Ako se funkcija F može predstaviti kao zbir $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$, gde svaka od funkcija F_i ima jedan od navedenih oblika, tada se metod neodređenih koeficijenata primenjuje posebno na svaku funkciju F_i i uzima se zbir tako nađenih partikularnih rešenja.

1178. Naći opšte rešenje diferencijalnih jednačina:

a) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$,

b) $y'' + y = 0$,

c) $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$,

d) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Rešenje. Sve jednačine su linearne homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima.

a) Karakteristična jednačina

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

ima korene $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$; kako su svi oni realni i različiti, tri linearno nezavisna rešenja date jednačine su 1 $(= e^{0 \cdot x})$, e^{2x} i e^{3x}. Odavde nalazimo opšte rešenje :

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} .$$

b) Karakteristična jednačina $\lambda^2 + 1 = 0$ ima rešenja $\pm i$. Ovom paru kompleksnih korena odgovaraju partikularna rešenja $y_1 = \cos x$ i $y_2 = \sin x$; stoga je opšte rešenje dato sa

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

c) Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0 ,$$

i njeni koreni su 1 i $-2 \pm 3i$. Prema tome, opšte rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y = C_1 e^x + e^{-2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x) .$$

d) Karakteristična jednačina ima dva kompleksna korena reda 2:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i .$$

Odgovarajuća partikularna rešenja su

$$e^{-x} \cos x , \quad xe^{-x} \cos x , \quad e^{-x} \sin x , \quad xe^{-x} \sin x .$$

Opšte rešenje je

$$y = e^{-x}\left((C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x\right).$$

1179. Naći opšte rešenje diferencijalnih jednačina:

a) $y'' - y = 0$ $[\, y = C_1e^x + C_2e^{-x} \,]$

b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ $[\, y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{2x} \,]$

c) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ $[\, y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x \,]$

d) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$

$[\, y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x \,]$

1180. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x + \cos x \,. \tag{1}$$

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine glasi

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0 \,. \tag{2}$$

Pomoću teoreme o racionalnim nulama polinoma nalazimo da je $\lambda_1 = 1$ jedno rešenje jednačine (2). Faktorizacijom dobijamo da su $\lambda_{2,3}$ koreni kvadratne jednačine $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, odakle je $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Prema tome, opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine je

$$y_h(x) = C_1e^x + e^x(C_2\cos x + C_3\sin x) \,.$$

Partikularno rešenje jednačine (1) ćemo odrediti kao zbir partikularnih rešenja y_{p_1} i y_{p_2} jednačina (3) i (4) respektivno:

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x \tag{3}$$

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \cos x \tag{4}$$

Kako je $\lambda = 1$ koren reda 1 karakteristične jednačine (2), y_{p_1} tražimo u obliku $y_{p_1}(x) = Axe^x$. Nalaženjem izvoda i zamenom u (3), dobijamo $A = 1$.

Partikularno rešenje jednačine (4) tražimo u obliku $y_{p_2}(x) = B\cos x + C\sin x$. Zamenom u jednačinu (4) i izjednačavanjem koeficijenata uz $\sin x$ i $\cos x$, dobijamo $B = 1/10$, $C = 3/10$.

Prema tome, opšte rešenje date diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= C_1e^x + e^x(C_2\cos x + C_3\sin x) + xe^x + \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x \,. \end{aligned}$$

Primedba. Česta greška je da se, u slučajevima kao što je jednačina (4), partikularno rešenje traži u nepotpunom obliku; u ovom slučaju napavili bismo grešku ako bismo tražili y_p u obliku $A\cos x$. Na isti način, ako je $F(x) = x^2$, na primer, partikularno rešenje se ne traži u obliku Ax^2, već u obliku $Ax^2 + Bx + C$.

1181. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' - y'' - y' + y = 3x + (24x - 4)e^x .$$

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine je

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 ,$$

i njena rešenja su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_{2,3} = 1$. Prema tome, opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine je

$$y_h = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^x .$$

Slobodni član date diferencijalne jednačine ima dva sabirka. Potražimo partikularna rešenja u obliku:

$$y_{p_1} = Ax + B , \; y_{p_2} = x^2(Cx + D)e^x .$$

Smenom u datu diferencijalnu jednačinu i izjednačavanjem koeficijenata, dobija se

$$y_{p_1} = 3(x + 1) , \; y_{p_2} = x^2(2x - 4)e^x .$$

Sada je opšte rešenje dato sa

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x + 2x^3 - 4x^2)e^x + 3(x + 1) .$$

1182. Odrediti onu integralnu krivu diferencijalne jednačine

(1) $$y'' + y' - 2y = 3e^x + 8e^{2x}$$

koja prolazi kroz koordinatni početak pod uglom od $\pi/4$ prema x-osi.

Rešenje. Karakteristična jednačina

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

ima rešenja $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$. Stoga je opšte rešenje homogenog dela diferencijalne jednačine dato sa

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} .$$

Partikularna rešenja koja odgovaraju funkcijama na desnoj strani u (1), tražićemo u obliku $y_{p_1} = Axe^x$ (jer je $\lambda = 1$ koren karakteristične jednačine) i $y_{p_2} = Be^{2x}$. Ako u (1) stavimo $y = y_{p_1} + y_{p_2}$, dobijamo, posle nalaženja izvoda i sređivanja

$$3Ae^x + 4Be^{2x} = 3e^x + 8e^{2x} ,$$

odakle nalazimo $A = 1$, $B = 2$. Prema tome, opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) je

$$y = (C_1 + x)e^x + C_2e^{-2x} + 2e^{2x} . \tag{2}$$

Odredimo sada partikularno rešenje koje prolazi kroz koodinatni početak (tj, $y(0) = 0$) i sa x-osom gradi ugao od $\pi/2$ ($y'(0) = \operatorname{tg} \pi/4 = 1$). Iz (2) dobijamo

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + 2 = 0 . \tag{3}$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 - 2C_2 + 5 = 0 . \tag{4}$$

Rešavanjem sistema jednačina (3)–(4), dobijamo $C_1 = -3$, $C_2 = 1$, pa je traženo partikularno rešenje dato sa

$$y = (x - 3)e^x + e^{-2x} + 2e^{2x} .$$

1183. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1} .$$

Rešenje. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$. U ovom slučaju partikularno rešenje ne može se naći metodom neodređenih koeficijenata, pa ćemo primeniti metod varijacije konstanti. Ako potražimo opšte rešenje nehomogene jednačine u obliku

$$C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} , \tag{1}$$

imamo da je

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0,$$
$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = \frac{e^x}{e^x + 1} .$$

Rešenje ovog sistema jednačina je

$$C_1'(x) = \frac{1}{2(e^x + 1)} , \quad C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{2(e^x + 1)} ,$$

odakle se integracijom dobija

$$C_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(e^x + 1) + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\log(e^x + 1) + C_2,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Zamenom $C_1(x)$ i $C_2(x)$ u (1), nalazimo opšte rešenje jednačine u obliku

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left((x - \log(e^x + 1))\,e^x - 1 + (\log(e^x + 1))\,e^{-x}\right) .$$

Primedba. Bez obzira na način na koji je dobijeno (metodom varijacije konstanti ili metodom neodređenih koeficijenata), opšte rešenje nehomogene jednačine se uvek može napisati u obliku $y = y_h + y_p$, gde je y_h opšte rešenje homogene jednačine, dok je y_p partikularno rešenje nehomogene.

1184. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3} .$$

Rešenje. Karakteristična jednačina $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ima dvostruki koren $\lambda_{1,2} = 1$, pa je opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine dato sa

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x .$$

Nađimo opšte rešenje nehomogene jednačine metodom varijacije konstanti. Iz

$$C_1' e^x + C_2' x e^x = 0$$
$$C_1' e^x + C_2'(x+1)e^x = \frac{x^2+2x+2}{x^3} ,$$

dobija se

$$C_2' = \frac{x^2+2x+2}{x^3} e^{-x} \; ; \; C_1' = -xC_2' . \tag{1}$$

Uvidom u (1) može se steći utisak da se C_2 ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija, jer će se pri integraciji desne strane u (1) pojaviti integrali tipa

$$\int x^{-k} e^{-x} \, dx \qquad (k > 0),$$

koji "nisu rešivi". Ipak, pokušajmo:

$$\begin{aligned} C_2 &= \int \frac{x^2+2x+2}{x^3} e^{-x} \, dx \\ &= \int \frac{e^{-x}}{x} \, dx + 2\int \frac{e^{-x}}{x^2} \, dx + 2\int \frac{e^{-x}}{x^3} \, dx \\ &= \int \frac{e^{-x}}{x} \, dx + 2\int \frac{e^{-x}}{x^2} \, dx + 2\left(-\frac{e^{-x}}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x^2} \, dx\right) \\ &= \int \frac{e^{-x}}{x} \, dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} \, dx - \frac{e^{-x}}{x^2} \\ &= \int \frac{e^{-x}}{x} \, dx - \frac{e^{-x}}{x} - \int \frac{e^{-x}}{x} \, dx - \frac{e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + B . \end{aligned}$$

Kao što vidimo, "nerešivi" integrali su se skratili, i dobijamo C_2 pomoću elementarnih funkcija. Dalje je, na sličan način,

$$C_1 = -\int \frac{x^2+2x+2}{x^2} e^{-x} \, dx = e^{-x} + \frac{2}{x} e^{-x} + A ,$$

pa je opšte rešenje date diferencijalne jednačine dato sa

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x = (A + Bx)e^x + \frac{1}{x},$$

gde su A i B proizvoljne konstante.

Primedba. Zadatak je moguće rešiti i tako što se "odmah vidi" da je partikularno rešenje nehomogene jednačine dato sa $y_p = 1/x$. U stvari, to i nije teško videti, ako se primeti da je desna strana date diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3} = \frac{2}{x^3} - 2\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)'' - 2\left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x}.$$

Ako ovo primetimo, opšte rešenje diferencijalne jednačine možemo napisati u obliku

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{x}$$

1185. Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:

a) $y'' - 2y' + y = 2xe^x + 5$ $\quad [\ y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{3}x^3e^x + 5\ ]$

b) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x + x^2$

$[\ y = C_1e^x + e^x(C_2\sin x + C_3\cos x) + xe^x - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2}\ ]$

c) $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$ $\quad [\ y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \sin x + 2\cos x\ ]$

d) $y'' + 4y = \cos^2 x$ $\quad [\ y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8} + \frac{x}{8}\sin 2x\ ]$

e) $y'' + y = \sin x\cos 3x$ $\quad [\ y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{30}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 2x\ ]$

f) $y'' - 4y = e^x\big((-4x+4)\cos x - (2x+6)\sin x\big)$

$[\ y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + e^x(x\cos x + \sin x)\ ]$

g) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$

$[\ y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2e^x\cos x\ ]$

1186. Naći opšte rešenje diferencijalnih jednačina:

a) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

$[\ y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\log|\cos 2x| + \frac{x}{2}\sin 2x\ ]$

b) $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}e^x$ $\quad [\ y = C_1 + C_2e^x + \frac{e^x}{x}\ ]$

c) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $\quad [\ y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 4\sqrt{x}\ ]$

d) $y'' + y = \operatorname{tg} x$ $\quad [\ y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\log|\operatorname{tg}(\pi/4 - x/2)|\ ]$

e) $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{6x^2+17x+13}{(x+1)^3}$ $\quad [\ y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{x+1}\ ]$

1187. Za razne vrednosti parametra $a \in \mathbf{R}$, naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

(1) $$y'' - (1+a)y' + ay = \operatorname{ch} x \ .$$

Rešenje. Karakteristična jednačina $\lambda^2 - (1+a)\lambda + a = 0$ ima rešenja $\lambda = 1$ i $\lambda = a$. Za $a = 1$ ova jednačina ima dvostruki koren, i to je slučaj koji treba posebno razmatrati.

Slobodni član diferencijalne jednačine može se napisati u obliku $(e^x + e^{-x})/2$; oblik partikularnog rešenja zavisi od toga da li su 1 ili -1 rešenja karakteristične jednačine. Dakle, ovde treba razdvojiti i slučajeve $a = -1$ i $a \neq -1$.

Iz ovoga zaključujemo da treba posmatrati tri slučaja: $a = 1$, $a = -1$ i $a \neq \pm 1$.

Ako je $a = 1$, opšte rešenje homogene jednačine je

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x \ .$$

U ovom slučaju, $\lambda = 1$ je koren karakteristične jednačine reda 2, pa se partikularno rešenje traži u obliku $y_p = Ax^2e^x + Be^{-x}$. Zamenom u (1) i izjednačavanjem koeficijenata uz e^x i uz e^{-x} sa obe strane, dobijamo $A = 1/4$, $B = 1/8$, pa je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{4}x^2\right)e^x + \frac{1}{8}e^{-x} \ .$$

U slučaju $a = -1$ imamo da je

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \ .$$

Sada su i 1 i -1 koreni karakteristične jednačine, reda 1. Partikularno rešenje tražimo stoga u obliku $y_p = Axe^x + Bxe^{-x}$. Zamenom u (1) dobijamo $A = 1/4$, $B = -1/4$ i opšte rešenje je

$$y(x) = \left(C_1 + \frac{1}{4}x\right)e^x + \left(C_2 - \frac{1}{4}x\right)e^{-x} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\operatorname{sh} x \ .$$

Ako $a \neq \pm 1$, opšte rešenje homogene jednačine dato je sa

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{ax} \ ,$$

a partikularno rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku $y_p = Axe^x + Be^{-x}$, odakle dobijamo $A = 1/2(1-a)$, $B = 1/4(1+a)$. Čak i da nismo razdvajali slučajeve, iz ovog rezultata bi bilo jasno da y_p, traženo na ovaj način, nije definisano za $a = \pm 1$. Opšte rešenje nehomogene jednačine u ovom slučaju je

$$y(x) = \left(C_1 + \frac{x}{2(1-a)}\right)e^x + \left(C_2 + \frac{1}{4(1+a)}\right)e^{-x} \ .$$

1188. Za razne vrednosti parametra a odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - a^2 y = e^x \ .$$

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine i njena rešenja su

(1) $$\lambda^2 - a^2 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm a \ .$$

Za $a = 0$, karakteristična jednačina ima jedno dvostruko rešenje; u ostalim slučajevima ima dva različita rešenja. Zbog oblika slobodnog člana ($e^{1\cdot x}$), treba razdvojiti slučajeve $a = 1$ i $a \neq 1$.

Za $a = 0$, data jednačina postaje $y'' = e^x$. Integracijom dobijamo $y' = e^x + C_1$, i konačno, $y = e^x + C_1 x + C_2$.

Za $a = 1$, s obzirom na (1), opšte rešenje homogene jednačine je

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \ .$$

Partikularno rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku $y_p = Axe^x$, jer je $\lambda = 1$ koren karakteristične jednačine. Zamenom u datu jednačinu dobijamo $A = 1/2$, pa je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

Ako $a \neq 0$, $a \neq 1$, opšte rešenje homogene jednačine je

$$y_h = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} \ ,$$

dok se partikularno rešenje nehomogene traži u obliku $y_p = Ae^x$, odakle se dobija $A = (1 + a^2)$, tako da je, u ovom slučaju

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + (1 + a^2) e^x \ .$$

1189. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

(1) $$y'' + 2ay' + y = e^{-x} \ ,$$

u zavisnosti od realnog parametra a.

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine je

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0$$

i njena rešenja su

(2) $$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \ .$$

Kod traženja rešenja homogene jednačine treba razdvojiti slučajeve kad karakteristična jednačina ima (i) dva realna, (ii) dvostruko realno, (iii) dva kompleksna rešenja. Za rešavanje nehomogene jednačine može se primeniti metod neodređenih koeficijenata i tu treba razdvojiti slučajeve (a) kad -1 nije rešenje karakteristične jednačine i (b) kad je -1 rešenje karakteristične jednačine (jednostruko ili dvostruko). Iz (2) vidimo da

- Slučaj (i) nastupa ako je $a^2 - 1 > 0$, tj $|a| > 1$.
- Slučaj (ii) nastupa ako je $a = 1$ ili $a = -1$.
- Slučaj (iii) nastupa ako je $|a| < 1$.
- Slučaj (b) nastupa ako je $-a \pm \sqrt{a^2 - 1} = -1$, odakle se dobija (pažljivim radom!) da je to mogućno samo za $a = 1$, pa je u tom slučaju $\lambda = -1$ dvostruko rešenje karakteristične jednačine.
- Slučaj (a) nastupa kad ne nastupa slučaj (b), dakle za $a \neq 1$.

Na osnovu ove analize, možemo posmatrati sledeće oblasti po a :

I Ako je $|a| > 1$, opšte rešenje homogene jednačine je

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} ,$$

dok se partikularno rešenje nehomogene jednačine može potražiti u obliku $y_p = Ae^{-x}$. Smenom u (1) dobijamo $A = 1/2(1-a)$, pa je opšte rešenje date diferencijalne jednačine

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{2(1-a)} e^{-x} .$$

U stvari, iz oblika partikularnog rešenja vidi se da jedino za $a = 1$ ono nije definisano, čime je potvrđena analiza slučajeva (a) i (b).

II Ako je $|a| < 1$, dobijaju se konjugovano-kompleksna rešenja karakteristične jednačine; partikularno rešenje nehomogene jednačine ostaje isto kao u prethodnom slučaju. Stoga je

$$y = e^{-ax}(C_1 \cos\sqrt{1-a^2}\, x + C_2 \sin\sqrt{1-a^2}\, x) + \frac{1}{2(1-a)} e^{-x} .$$

III Ako je $a = -1$, karakteristična jednačina ima dvostruki koren $\lambda = 1$, dok partikularno rešenje nehomogene jednačine ostaje isto (samo sa $a = -1$). U ovom slučaju je

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{4} e^{-x} .$$

IV Ako je $a = 1$, tada partikularno rešenje nehomogene jednačine treba potražiti u obliku

$$y_p = Bx^2 e^{-x} .$$

Smenom u jednačinu (1) dobijamo $B = 1/2$, pa je

$$y = (C_1 + C_2)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} .$$

1190. Za razne vrednosti parametra a odrediti opšte rešenje jednačine

$$y'' + ay = e^{-x} .$$

Rezultat.

$$y(x) = \begin{cases} C_1e^{x\sqrt{-a}} + C_2e^{-x\sqrt{-a}} + \frac{1}{a+1}e^{-x}, & a < 0, a \neq -1 \\ C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{x}{2}e^{-x}, & a = -1 \\ C_1x + C_2 + e^{-x}, & a = 0 \\ C_1 \sin x\sqrt{a} + C_2 \cos x\sqrt{a} + \frac{1}{a+1}e^{-x}, & a > 0 \end{cases}$$

1191. Za razne vrednosti parametra a, odrediti opšte rešenje jednačine

$$y'' - 5y' + ay = e^{3x} .$$

Rezultat.

$$y = \begin{cases} C_1 \exp \frac{5+\sqrt{25-4a}}{2}x + C_2 \exp \frac{5-\sqrt{25-4a}}{2}x + \frac{1}{a-6}e^{3x} , & a < \frac{25}{4}, a \neq 6 \\ C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + xe^{3x} , & a = 6 \\ (C_1 + C_2x)e^{5x/2} + 4e^{3x} , & a = \frac{25}{4} \\ e^{5x/2}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4a-25}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4a-25}}{2}x\right) + \frac{1}{a-6}e^{3x} , & x > \frac{25}{4} \end{cases}$$

1192. Data je diferencijalna jednačina

$$y''(x) - y'(x) + e^{2x}y = e^{2x} .$$

Uvodeći novu promenljivu $t = e^x$, transformisati datu jednačinu, a zatim naći njeno opšte rešenje.

Rešenje. Smenom $e^x = t$ imamo

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}e^x = \dot{y}t \; ; \; y'' = \ddot{y}t^2 + \dot{y}t .$$

Zamenom u datoj jednačini dobijamo diferencijalnu jednačinu po nezavisnoj promenljivoj t:

$$\ddot{y} + y = 1 ,$$

čije je opšte rešenje dato sa

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 .$$

Odavde je $y(x) = C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x + 1$.

1193. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2(\log x - 1)y'' - xy' + y = 0 ,$$

ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje linearna funkcija.

Rešenje. Zamenom $y = ax + b$ u datu jednačinu, dobijamo $b = 0$. Jedno partikularno rešenje je, prema tome, funkcija $y_{p_1}(x) = x$. Ako datu jednačinu napišemo u obliku

$$y'' - \frac{1}{x(\log x - 1)}y' + \frac{1}{x^2(\log x - 1)}y = 0 ,$$

drugo partikularno rešenje dobijamo primenom LIOUVILLEove formule:

$$y_{p_2} = x \int \frac{1}{x^2} \exp\left(\int \frac{1}{x(\log x - 1)}\, \mathrm{d}x\right)\, \mathrm{d}x .$$

Pomoću smene $\log x - 1 = t$, $\mathrm{d}x/x = \mathrm{d}t$, nalazimo

$$\int \frac{1}{x(\log x - 1)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log|\log x - 1| ,$$

odakle je

$$y_{p_2} = x \int \frac{\log x - 1}{x^2}\, \mathrm{d}x = -\log x$$

(objasnite zašto smo izostavili znak apsolutne vrednosti).

Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je linearna kombinacija dva nađena partikularna rešenja, tj,

$$y = C_1 x + C_2 \log x .$$

1194. Data je diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad (x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0 .$$

Dokazati da se konstante A, B, C mogu odrediti tako da funkcija $y = Ax^2 + Bx + C$ bude opšte rešenje ove diferencijalne jednačine. Zatim odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(2) \qquad (x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 1 .$$

Rešenje. Zamenom $y = Ax^2 + Bx + C$ u (1), dobijamo jednakost $A + C = 0$, tj, $C = -A$. To znači da svaka funkcija oblika $y = Ax^2 + Bx - A = A(x^2 - 1) + Bx$, gde su A i B proizvoljne konstante, zadovoljava jednačinu (1), a kako sadrži dve proizvoljne konstante, to je onda i opšte rešenje date homogene jednačine.

Opšte rešenje nehomogene jednačine dobićemo pomoću metoda varijacije konstanti. Odgovarajući sistem (jednačinu (2) treba podeliti sa (x^2+1) !) glasi

$$C_1'(x^2-1)+C_2'=0, \quad C_1'\cdot 2x+C_2'=1.$$

Odavde se dobija $C_1'=x/(x^2+1)$, $C_2'=1-2x^2/(x^2+1)$. Integracijom nalazimo

$$C_1(x)=\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+A\,,$$

$$C_2(x)=-x-2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=-x+2\operatorname{arctg} x+B\,,$$

tako da je opšte rešenje jednačine (2) dato sa

$$\begin{aligned} y&=C_1(x)\cdot(x^2-1)+C_2(x)\cdot x\\ &=A(x^2+1)+Bx+\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x^2+1)+2x\operatorname{arctg} x-x^2\,. \end{aligned}$$

1195. Ispitati da li diferencijalna jednačina

$$(x^2+3x)y''-(2x+3)y'+2y=0$$

ima partikularno rešenje u obliku polinoma a zatim naći opšte rešenje ove jednačine.

Rešenje. Neka je

$$y=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

rešenje date jednačine. Ovde su nepoznati ne samo koeficijenti polinoma, a_i, već i njegov stepen n. Izvodi su

$$y'=\sum_{k=1}^{n}a_kkx^{k-1}, \quad y''=\sum_{k=2}^{n}a_kk(k-1)x^{k-2}\,.$$

Zamenom u jednačini, dobijamo

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{n}a_kk(k-1)x^k+3\sum_{k=2}^{n}a_kk(k-1)x^{k-1}-2\sum_{k=1}^{n}a_kkx^k\\ &\qquad -3\sum_{k=1}^{n}a_kkx^{k-1}+2\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Nepoznati stepen n možemo odrediti iz uslova da koeficijent uz x^n u (1) bude jednak nuli. Ovo je ideja koja se može iskoristiti uvek u zadacima u kojima se traži stepen polinoma.

Kako je koeficijent uz x^n u (1) jednak $a_n(n-1)(n-2)$, dobijamo da je $n=1$ ili $n=2$. Dalje možemo da nastavimo metodom neodređenih koeficijenata iz (1), ali je jednostavnije da potražimo rešenje direktno u obliku

$$y = ax + b$$

(za $n=1$), odnosno u obliku

$$y = cx^2 + dx + e$$

za slučaj $n=2$. Metodom neodređenih koeficijenata sa ovako pretpostavljenim rešenjima, dobija se

$$b = \frac{3}{2}a, \quad e = \frac{3}{2}d,$$

dok su a, c i d proizvoljni. Ako stavimo $a=1$, odnosno $c=1$, $d=0$, dobijamo partikularna rešenja:

$$y_{p_1} = x + \frac{3}{2}, \quad y_{p_2} = x^2.$$

Kako su funkcije y_{p_1} i y_{p_2} očigledno linearno nezavisne, opšte rešenje date jednačine je

$$y(x) = C_1\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_2x^2.$$

1196. Ispitati da li jednačina

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0$$

ima rešenja u obliku polinoma. U potvrdnom slučaju odrediti opšte rešenje ove jednačine.

Rezultat. Opšte rešenje je $y = C_1(1+x^2) + C_2(x + (1+x^2)\operatorname{arctg} x) - \frac{1+x}{2}$.

1197. Odrediti a i b tako da diferencijalna jednačina

(1) $$x(a-x)y'' + (bx^2 - a)y' + 2(1-bx)y = 0$$

ima partikularno rešenje $y = e^{2x}$. Za tako nađene vrednosti a i b, odrediti opšte rešenje date jednačine.

Rešenje. Ako u (1) stavimo $y = e^{2x}, y' = 2e^{2x}, y'' = 4e^{2x}$, posle sređivanja dobijamo

(2) $$(-4+2b)x^2 + (4a-2b)x - 2a + 2 = 0.$$

Kako (2) treba da važi za svako $x \in \mathbf{R}$, i kako su funkcije $x^2, x, 1$ linearno nezavisne, iz (2) dobijamo

(3) $$-4+2b=0, \quad 4a-2b=0, \quad -2a+2=0.$$

Sistem jednačina (3) ima rešenje $a = 1, b = 2$. (Ovo je sistem 3 jednačine se 2 nepoznate, koji u opštem slučaju ne mora da ima rešenje. Prema tome, ne bismo mogli da odredimo konstante a i b tako da neka druga funkcija, na primer $y = e^{3x}$, bude rešenje date jednačine.)

Jednačina (1) sa ovako određenim a i b glasi:

$$y'' + \frac{2x^2 - 1}{x(1-x)}y' + \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}y = 0 . \tag{4}$$

Drugo partikularno rešenje jednačine (4) se dobija primenom LIOUVILLEove formule:

$$y_2(x) = e^{2x} \int \frac{1}{e^{4x}} \exp\left(-\int \frac{2x^2 - 1}{x(1-x)}\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x . \tag{5}$$

Rešavanjem integrala u (5), dobijamo $y_2 = x^2/2$, pa je opšte rešenje jednačine (1) dato sa

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x^2 .$$

7.2.2 Eulerova diferencijalna jednačina

✓ *Diferencijalna jednačina*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = h(x) \tag{1}$$

rešava se smenom $x = e^t$. Uvođenjem ove smene, jednačina se transformiše u linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, koja se rešava na uobičajeni način.

Primetimo da smena $x = e^t$ važi samo za $x > 0$. Međutim, rešenje koje se dobije ovim postupkom važi za svako x. Naime, za $x < 0$ možemo da uvedemo smenu $x = -e^t$ i tako dobijamo istu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima kao i u prethodnom slučaju.

1198. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = x .$$

Rešenje. Uvođenjem smene $x = e^t$, dobijamo $y = y(x) = y(\log t)$. Neka y' označava izvod po x i neka $\dot{y}$ označava izvod po t. Tada je

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dot{y}\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}}{e^t}$$

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^{2t}} .$$

Zamenom u datoj jednačini dobija se ($x^2 = e^{2t}$, $x = e^t$)

$$e^{2t}\frac{\ddot{y}-\dot{y}}{e^{2t}} - 4e^t\frac{\dot{y}}{e^t} + 6y = 0,$$

$$\ddot{y} - \dot{y} - 4\dot{y} + 6y = e^t,$$

$$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = e^t.$$

Poslednja jednačina je linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima – njeno opšte rešenje je

$$y = Ae^{2t} + Be^{3t} + \frac{1}{2}e^t .$$

Vraćanjem na promenljivu x, dobijamo opšte rešenje date diferencijalne jednačine:

$$y = Ax^2 + Bx^3 + \frac{1}{2}x .$$

1199. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2y'' - 2xy + 2y = 2x^3 - x ,$$

kao i ono partikularno rešenje za koje je $y(1) = 1$ i $y'(1) = 3$.

Rezultat. Opšte rešenje je $y = C_1x + C_2x^2 + x^3 + x\log x$; traženo partikularno rešenje je $y = x^3 - x^2 + x + x\log x$.

1200. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(2+x)^2y'' - 3(2+x)y' + 4y = (2+x)^2 .$$

Rezultat. Smenom $2 + x = e^t$ data jednačina se svodi na linearnu i njeno opšte rešenje je

$$y = (x+2)^2\left(\frac{1}{2}\log^2|x+2| + C_1\log|x+2| + C_2\right).$$

1201. Rešiti diferencijalne jednačine:

a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + px + q \quad (p, q \in \mathbf{R})$

b) $x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y = x^2(1 + 3\log x)$

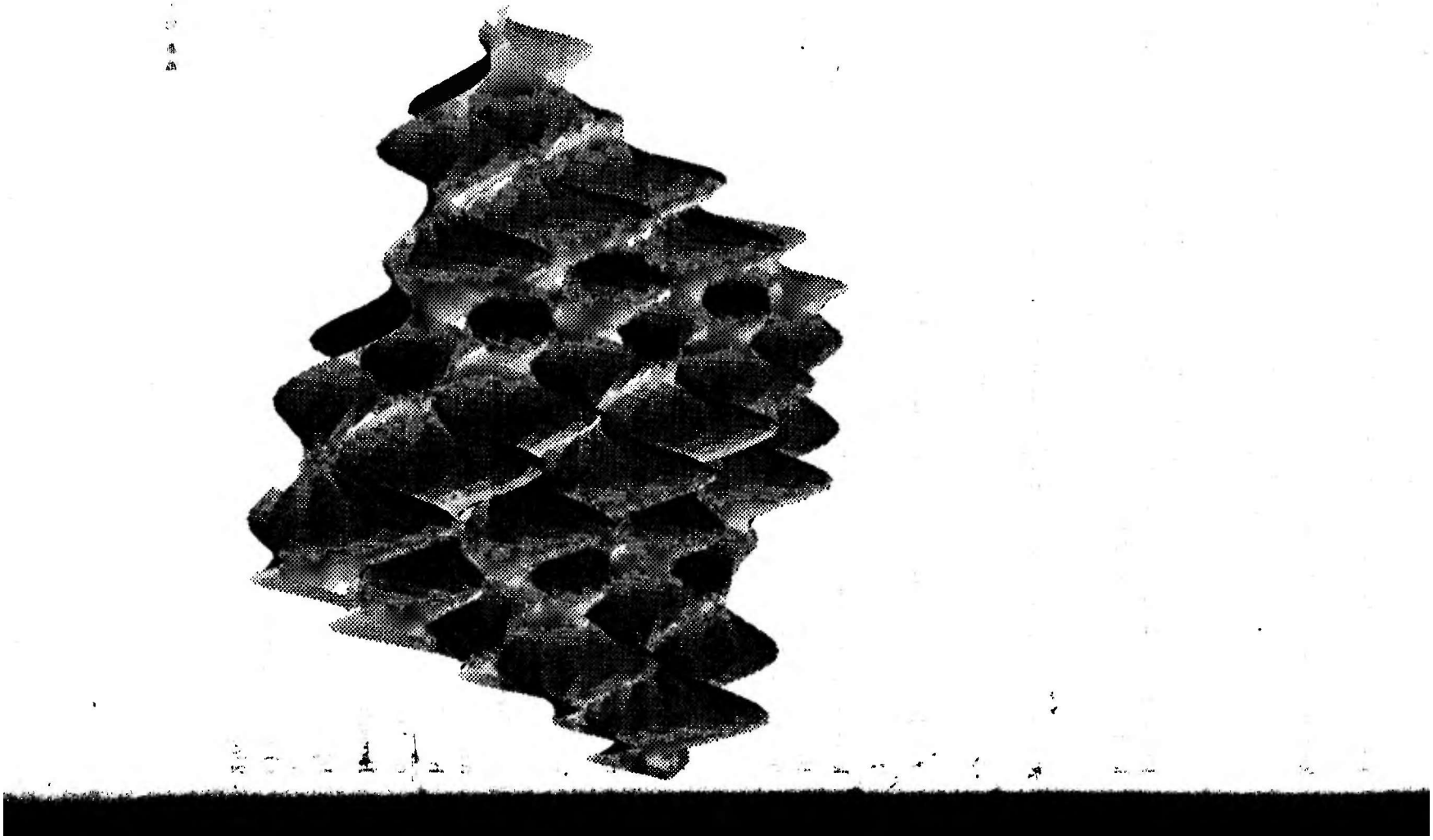
c) $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = x + 2\log x + \log^2 x$

Rezultat. a) $y = x^2\log|x| - px\log|x| + C_1x + C_2x^2 + q/2$.

b) $y = \frac{1}{6}x^2\log^3|x| + \frac{1}{8}x^2\log^4|x| + C_1x^2 + C_2x^2\log|x| + C_3x^2\log^2|x|$

c) $y = (C_1 + C_2\log|x|)\cos\log|x| + (C_3 + C_4\log|x|)\sin\log|x| + \frac{1}{4}x + \log^2|x| + 2\log|x| - 4$

►► 8.6



Nemojte mu dozvoliti da čita matematičke knjige do svoje sedamnaeste godine.
Lagrange, Cauchyjevom ocu.

Glava 8

Razni zadaci

U zadacima ove glave ponavlja se gradivo iz prethodnih glava. Težina zadataka je od ispitnih do problemskih. U nekim delovima obrađuje se i materija koja nije rađena u osnovnom tekstu, na primer u 8.6.3 (rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova) ili u odeljku 8.5, gde se daju neke važne nejednakosti, koje nisu mogle da se uklope u podelu osnovnog teksta. Na kraju, u odeljku 8.7 dati su zadaci za čije rešavanje je, po pravilu, potrebno znanje više različitih oblasti.

8.1 Nizovi

1202. Dokazati da je

$$\lim \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1} .$$

1203. Niz x_n definisan je sa

$$x_1 = a,\ x_2 = b \quad (a, b \in \mathbf{R}), \qquad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4 \ldots)$$

Odrediti $\lim x_n$.

Rešenje. Naći ćemo opšti član niza u eksplicitnom obliku. Uočimo da je, za $k \geq 3$:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{x_{k-1} + x_{k-2}}{2} - x_{k-1} = -\frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{2} .$$

Polazeći od ove jednakosti, dobijamo

$$x_2 - x_1 = b - a,\ x_3 - x_2 = -\frac{b-a}{2},\ x_4 - x_3 = \frac{b-a}{4},\ \ldots x_k - x_{k-1} = (-1)^k \frac{b-a}{2^{k-2}} .$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{b-a}{2^{n-2}} \\ &= b + (b-a)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right) \\ &= b + (b-a)\frac{(-1/2)^{n-2} - 1}{3} \qquad \text{(zbir geometrijske progresije).} \end{aligned}$$

Odavde je

$$\lim x_n = b - \frac{b-a}{3} = \frac{a+2b}{3}.$$

1204. FIBONACCIjev niz $\{x_n\}$ definisan je sa

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \qquad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

Dokazati da je

$$x_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{gde je} \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Primedba. Ako se duž podeli na dva dela tako da se manji deo prema većem odnosi kao veći deo prema celini, tada je taj odnos jednak $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$, dok je odnos većeg dela prema manjem $(\sqrt{5}+1)/2 \approx 1.618$. Ovakav način podele duži je poznat pod nazivom **zlatni presek**. Zlatni presek je bio poznat još u antičko doba i predstavlja standard harmonije u umetničkim delima. Naime, smatra se da je najlepši pravougaonik kod koga se stranice odnose u razmeri zlatnog preseka, kao i da centralnu figuru neke slike ne treba stavljati u sredinu, već po pravilu zlatnog preseka.

1205. Neka je

$$y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}} \qquad (n = 0, 1, \ldots,)$$

gde je $\{x_n\}$ FIBONACCIjev niz definisan u zadatku 1204.
Dokazati da je

$$\lim y_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Uputstvo. Posmatrati odvojeno podnizove y_{2k} i y_{2k+1}.

1206. Niz x_n je definisan pomoću

$$x_0 = 0\,, x_1 = \operatorname{th} c\,, \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{1 + x_{n+1}x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

gde je c proizvoljan realan broj. Naći $\lim x_n$.

Uputstvo. Dokazati najpre da je $x_n = \operatorname{th}(c \cdot b_n)$, gde je $\{b_n\}$ FIBONACCIjev niz. Odavde zaključiti da je $\lim x_n = 1$ za svako $c \neq 0$ i $\lim x_n = 0$ za $c = 0$.

1207. Počevši od tačke $P_1 = (1, 1)$, konstruišimo niz tačaka P_n na sledeći način: Konstruišimo kružnicu sa centrom u koordinatnom početku i sa poluprečnikom P_n. Neka je A_n tačka u kojoj kružnica seče pozitivni deo x-ose. Središte duži P_nA je tačka P_{n+1}.
Odrediti $\lim P_n$.

1208. Ispitati konvergenciju niza datog sa

$$x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n}\,,$$

u zavisnosti od početne vrednosti x_1.

Rezultat. Niz x_n ima graničnu vrednost jednaku 2 za svako $x_1 \in \mathbf{R}$ osim u slučajevima:
– $x_1 = 1$, kada je $\lim x_n = 1$
– $x_1 \in \{0, 2/3, 6/7, 14/15, 30/31, 62/63, \ldots\}$, kada niz nije definisan.

1209. Konstruisati niz celih brojeva $x_n \neq 0$, takav da niz $y_n = \sin(x_n/m)$ konvergira ka istoj graničnoj vrednosti za svako $m \in \mathbf{N}$.

Rezultat. $x_n = \pi n!$, $\lim y_n = 0$.

1210. Za razne vrednosti $x \geq 0$, odrediti

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (x^2/2)^n}\,.$$

Uputstvo. Primenom zadatka 225, pokazati da je $f(x) = 1$ za $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$ ako je $x \in (1, 2)$ i $f(x) = x^2/2$ za $x \geq 2$.

1211. Naći $f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sin^{2n} x$, $x \in \mathbf{R}$.

Rezultat. $f(x) = 1$ za $x = \pi/2 + k\pi\,, k \in \mathbf{Z}$, $f(x) = 0$ inače.

1212. Dokazati da ne postoji $\lim \sin n$.

Rešenje. **I način:** Pretpostavimo suprotno. Ako postoji granična vrednost, ona je konačna, jer je niz ograničen. Neka je $\lim \sin n = c$. Tada za svako fiksirano $k \in \mathbf{N}$, razlika $\sin(n+k) - \sin n$ teži nuli. Prema tome,

$$2 \sin \frac{k}{2} \cos \frac{2n+k}{2} \to 0 .$$

Kako je, za $k \in \mathbf{N}$, $\sin k/2 \neq 0$ (jer jednačina $\sin x/2 = 0$ nema celobrojnih rešenja), ostaje da $\cos(2n+k)/2 \to 0$ za svako $k \in \mathbf{N}$, tj. za svako $k \in \mathbf{N}$,

$$\cos n \cos \frac{k}{2} - \sin n \sin \frac{k}{2} \to 0 . \tag{1}$$

Ako je $c = 0$, iz (1) sleduje da je $\lim \cos n = 0$, što je nemoguće s obzirom na jednakost $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Ako $c \neq 0$, tada je $1/|\sin n|$ ograničen niz, pa je

$$\lim \frac{1}{\sin n} \left(\cos n \cos \frac{k}{2} - \sin n \sin \frac{k}{2} \right) = 0 ,$$

odakle je

$$\lim \operatorname{ctg} n = \operatorname{tg} \frac{k}{2}$$

za svako $k \in \mathbf{N}$, što nije moguće zbog jedinstvenosti granične vrednosti.

II način: Neka je

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (\pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi), \qquad B = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (7\pi/6 + 2k\pi, 11\pi/6 + 2k\pi).$$

Kako su intervali koji se pojavljuju u gornjim unijama širine $4\pi/6 > 1$, u svakom od ovih (disjunktnih) intervala nalazi se bar po jedan prirodan broj. Prema tome, skupovi A i B sadrže beskonačno mnogo prirodnih brojeva. Kako je

$$\sin n > \frac{1}{2} \quad (n \in A), \qquad \sin n < -\frac{1}{2} \quad (n \in B),$$

zaključujemo da dati niz nema graničnu vrednost.

III način: Ako je $\lim \sin n = c$, tada je i $\lim \sin(n+1) = c$, odnosno

$$\lim(\sin n \cos 1 + \cos n \sin 1) = c .$$

Odavde dobijamo

$$c \cos 1 \pm \sqrt{1 - c^2} \sin 1 = c , \tag{2}$$

gde se znak bira u zavisnosti od c. Kako je $c \in [-1, 1]$, postoji neko α tako da je $\sin \alpha = c$. Tada iz (2) imamo da je

$$\sin(\alpha \pm 1) = \sin \alpha ,$$

a ovo nije moguće ni za jedan realan broj α.

1213. Dat je niz

$$x_1 = \sqrt{13}\,,\ x_2 = \sqrt{13+\sqrt{5}}\,,\ x_{n+2} = \sqrt{13+\sqrt{5+x_n}}\,,\quad n = 1,2,\ldots$$

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti $\lim x_n$.

Rešenje. Ako postoji konačna granična vrednost x datog niza, tada je

$$x = \sqrt{13+\sqrt{5+x}}\,. \tag{1}$$

Sređivanjem i kvadriranjem dobija se jednačina

$$x^4 - 26x^2 - x + 164 = 0\,.$$

Nije teško videti, primenom teoreme o racionalnim nulama polinoma, da je jedno rešenje $x = 4$. Faktorizacijom, na primer, pomoću HORNERove šeme dobijamo

$$x^4 - 26x^2 - x + 164 = (x-4)(x^3 + 4x^2 - 10x - 41)$$

Ispitivanjem funkcije $x \mapsto x^3 + 4x^2 - 10x - 41$ možemo ustanoviti da ona ima dva negativna korena i jedan koren između 3 i 4. Međutim, ovo **nisu koreni jednačine** (1). Naime, ispitivanjem razlike $g(x) = x - \sqrt{13+\sqrt{5+x}}$, dobijamo da je, za $x \geq 0$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{13+\sqrt{5+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5+x}} > 1 - \frac{1}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} > 0\,,$$

pa je funkcija g monotono rastuća na $[0,+\infty)$, i prema tome, ima samo jedan koren na tom intervalu, i to je $x = 4$.

Dakle, ako niz ima graničnu vrednost x, onda je $x = 4$. Konvergenciju niza možemo dokazati na dva načina.

I način: Pokazaćemo da je niz monoton i ograničen. Očigledno je $x_2 > x_1$. Dalje, $x_3 = \sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13}}} > \sqrt{13+\sqrt{5}} = x_2$. Pretpostavimo da je $x_n > x_{n-1}$. Tada je

$$x_{n+2} = \sqrt{13+\sqrt{5+x_n}} > \sqrt{13+\sqrt{5+x_{n-1}}} = x_{n+1}\,,$$

odakle, prema principu matematičke indukcije, zaključujemo da je $x_n > x_{n-1}$ za svako $n \in \mathbf{N}$, pa je niz monotono rastući.

Dalje ostaje da se pokaže da je niz ograničen odozgo. Kao prirodna gornja granica može se uzeti 4. Nejednakost $x_n < 4$ važi za $n = 1,2$. Ako za neko $n \geq 1$ imamo $x_n < 4$, tada je

$$x_{n+2} = \sqrt{13+\sqrt{5+x_n}} < \sqrt{13+\sqrt{5+4}} = 4\,,$$

pa je i tvrđenje o ograničenosti niza dokazano.

Kako je niz monoton i ograničen, on je konvergentan.

II način: Neka je $f(x) = \sqrt{13+\sqrt{5+x}}$. Kako je, za $x \geq 0$,

$$f(x) > 0 \quad \text{i} \quad 0 < f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{13+\sqrt{5+x}} \cdot \sqrt{5+x}} < 1,$$

zaključujemo, prema 3.2.4, da je f kontrakcija na $[0, +\infty)$.

S obzirom na definiciju niza, iz činjenice da je f kontrakcija proizilazi da podniz neparnih članova i podniz parnih članova konvergiraju ka istoj graničnoj vrednosti (ka nepokretnoj tački funkcije f), pa je dati niz konvergentan.

Primedba. U dokazu monotonosti i ograničenosti koristili smo modifikovan princip matematičke indukcije, sa korakom 2 : Ako je tvrđenje tačno za $n = 1$ i za $n = 2$, i ako iz pretpostavke da je tačno za neko n sledi da je tačno i za $n + 2$, tada je tvrđenje tačno za svako $n \in \mathbf{N}$.

1214. Dokazati da je niz definisan pomoću

$$x_1 = \sqrt{2}\,, \quad x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$$

konvergentan i odrediti graničnu vrednost.

Rešenje. Primetimo najpre da je $x_n > 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Dokažimo da je niz monotono rastući. Očigledno je $x_1 < x_2$. Iz pretpostavke $x_n < x_{n+1}$ dobija se da je

$$x_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_n} < \left(\sqrt{2}\right)^{x_{n+1}} = x_{n+2},$$

čime je dokazano da je $x_n < x_{n+1}$ za svako n.

Na sličan način, primenom matematičke indukcije, dokazuje se da je $x_n < 2$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Prema tome, niz ima konačnu graničnu vrednost c, koja je rešenje jednačine $c = (\sqrt{2})^c$, tj.

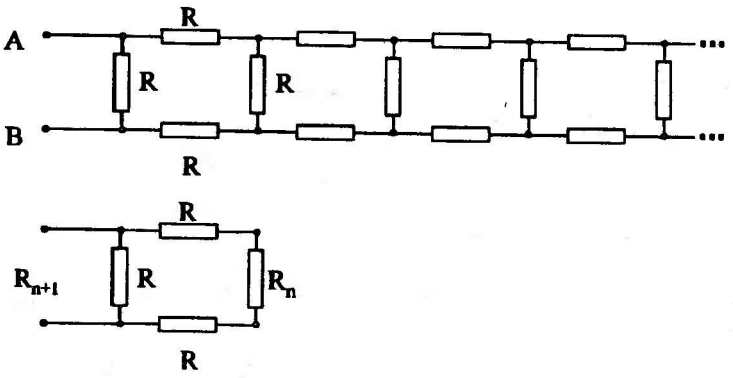
$$\frac{\log c}{c} = \frac{\log 2}{2}. \tag{1}$$

Ispitivanjem funkcije $x \mapsto \frac{\log x}{x}$, nalazimo da jednačina (1) ima dva rešenja: $c_1 = 2$ i $c_2 > e$. Kako su svi članovi niza manji od 2, njegova granična vrednost ne može biti veća od e, pa je $\lim x_n = 2$.

1215. Data je otpornička šema kao na slici 45a, gde svaka komponenta ima otpornost R. Naći otpornost R_u između tačaka A i B.

Rešenje. Neka je R_n otpornost šeme koja nastaje povezivanjem n blokova. Tada se R_{n+1} dobija kao na slici 45b:

$$R_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R_n}} = \frac{R(2R+R_n)}{3R+R_n}. \tag{1}$$



Slika 45. a: *Otpornička šema iz zadatka 1215. b: Generisanje šeme iz blokova*

Neka je

$$f(x) = \frac{R(2R+x)}{3R+x}.$$

Tada je, za $x > 0$ i $R > 0$, $f'(x) \leq 1/9$; prema tome, f je kontrakcija na $[0, +\infty)$ i niz R_n je konvergentan. Iz (1) dobijamo da je $R_u = \lim R_n = R(\sqrt{3} - 1)$.

Zadatak i rešenje predložio je dr Slobodan Simić.

1216. Dat je niz x_n pomoću

$$x_0 = q > 0, \qquad x_{n+1} = q^{-x_n} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Ispitati da li su tačna sledeća tvrđenja:

1°. Niz je konvergentan za $e^{-1/e} \leq q \leq e^e$,

2°. Za $0 < q < e^{-1/e}$ važi da je $\lim x_n = +\infty$,

3°. Za $q > e^e$, niz je ograničen; podniz x_{2n} je monotono opadajući; podniz x_{2n+1} je monotono rastući, ali ova dva podniza nemaju iste granične vrednosti i niz je divergentan.

1217. Rešiti jednačinu po $x \in \mathbf{R}$:

$$x^{-x^{-x^{-x}\cdot\cdot\cdot}} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Rešenje. Leva strana date jednačine može se napisati u obliku

$$x^{\underbrace{\frac{1}{x^{-x^{-x}\cdot\cdot\cdot}}}_{=1/2}}$$

Prema tome, $1/x^{1/2} = 1/2$, tj. $x = 4$.

Primedba. 1° Neka je $f(x)$ funkcija sa leve strane jednačine (1). Tada je $f(x)$ granična vrednost niza $f_n(x)$ definisanog pomoću

$$f_0(x) = x\,, \qquad f_{n+1}(x) = x^{-f_n(x)} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

U rešenju zadatka je pokazano da ako niz $f_n(x)$ ima graničnu vrednost koja je jednaka $1/2$, tada je $x = 4$. Prema tome, rešenje će biti potpuno tek kada se pokaže da je niz $f_n(4)$ konvergentan. Ovo može da se uradi na osnovu zadatka 1216.

2° Ako je funkcija f definisana kao pod 1°, dokazati da za svako $L > 0$ jednačina $f(x) = L$ ima rešenje x, za koje niz $f_n(x)$ konvergira.

Zadatak je predložio mr Mirko Jovanović.

1218. Dat je niz

$$x_0 = x\,, \qquad x_{n+1} = x_n^2 \cdot x \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Da li jednačina

$$\lim x_n = 2$$

ima rešenje po x ?

Rešenje. Po analogiji sa zadatkom 1217, ako u jednakosti

$$x_{n+1} = x_n^2 \cdot x$$

pustimo da $n \to +\infty$, dobijamo

$$2 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Međutim, $x = 1/2$ nije rešenje date jednačine. Naime, za $x = 1/2$, dati niz ima graničnu vrednost koja je jednaka nuli. Prema tome, jednačina nema rešenja.

1219. a) Koristeći se BANACHovim stavom, dokazati da KEPLERova jednačina

$$x - \varepsilon \sin x = m \qquad (0 < \varepsilon < 1\,, m \in \mathbf{R})$$

ima jedinstveno rešenje po x.

b) Rešiti jednačinu $x - 0.1 \sin x = 2$.

Rešenje. a) Neka je $f(x) = m + \varepsilon \sin x$. Data jednačina se može napisati u obliku $x = f(x)$. Kako je, za $0 < \varepsilon < 1$ i za svako $x \in \mathbf{R}$,

$$|f'(x)| = \varepsilon |\cos x| \leq \varepsilon < 1\,,$$

zaključujemo da je funkcija f kontrakcija na skupu $\mathbf{R}$, pa jednačina ima jedinstveno rešenje .

b) Na osnovu a), rešenje jednačine $x = 0.1 \sin x + 2$ dobija se kao granična vrednost niza definisanog pomoću

$$x_0 \in \mathbf{R}, \qquad x_{n+1} = 0.1 \sin x_n + 2,$$

gde x_0 može da se uzme proizvoljno. Neka je, na primer, $x_0 = 2$. Tada nalazimo (na 5 decimala):

$$x_1 = 2.09092, x_2 = 2.08677, x_3 = 2.08698, x_4 = 2.08697, x_5 = 2.08697 \ldots$$

1220. Dokazati da svaka okolina broja e sadrži beskonačno mnogo racionalnih brojeva x i y, $x \neq y$, takvih da važi $x^y = y^x$.

Rešenje. Potražimo racionalna rešenja jednačine

$$x^y = y^x \qquad (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

Ako stavimo $y = tx$ $(t \neq 1)$, tada imamo

$$x^y = y^x \iff x^{tx} = (tx)^x \iff (x^t)^x = (tx)^x \iff x = t^{1/(t-1)}.$$

Za $1/(t-1) = n \in \mathbf{N}$, iz poslednje jednakosti sledi da su x i y racionalna rešenja date jednačine; u tom slučaju je

$$t = t_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad x = x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y = y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Kako nizovi x_n i y_n konvergiraju ka e, u svakoj okolini broja e nalaze se skoro svi članovi oba niza, iz čega sledi traženo tvrđenje.

1221. Dokazati da je niz x_n definisan sa

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x_n}, (n = 0, 1, \ldots)$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

1222. Za koje $a, b \in \mathbf{R}$ je konvergentan niz definisan sa

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1 + bx_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \; ?$$

1223. Ako je

$$0 < x_1 < 2, \qquad x_{n+1} = \frac{2(2x_n + 1)}{x_n + 3} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

dokazati da je niz $\{x_n\}$ konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

1224. Neka je

$$x_1 = a \in [0, 1], \qquad x_n = a \pm \frac{x_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

gde se uzima ili uvek znak + ili uvek znak −. Dokazati da je x_n konvergentan za svako $a \in [0, 1]$ i odrediti graničnu vrednost.

Rezultat. Sa +: $\lim x_n = 1 - \sqrt{1 - 2a}$; sa −: $\lim x_n = \sqrt{1 + 2a} - 1$.

1225. Neka je, za $a > 0$,

$$0 < x_0 < \frac{2}{a}, \qquad x_n = x_{n-1}(2 - a x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dokazati da je dati niz konvergentan i naći $\lim x_n$. [$1/a$]

1226. Dokazati da je niz definisan sa

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \quad (a \geq 0)$$

konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

1227. Neka niz $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ zadovoljava relacije

$$(1) \qquad 0 < x_n < 3, \quad x_{n+1}\left(\frac{1}{3}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 2\right) \leq -\frac{10}{3} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Odrediti $\lim x_n$.

Rešenje. Neka je

$$f(x) = x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right).$$

Nije teško proveriti da za $x \in (0, 3)$ važe nejednakosti

$$(2) \qquad -\frac{10}{3} < f(x) < 0,$$

pri čemu se minimum dostiže u tački $x = 2$, $f(2) = -10/3$ (skicirati grafik).

Iz (1) i (2) sleduje da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$(3) \qquad x_{n+1}\left(\frac{1}{3}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 2\right) \le -\frac{10}{3} \le x_n\left(\frac{1}{3}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n - 2\right).$$

Kako je $x_n^2/3 - x_n/2 - 2 < 0$ kada je $0 < x_n < 3$, iz (3) nalazimo da je

$$x_n \le x_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dakle, niz je monotono rastući i ograničen. Neka je $\lim x_n = x$. Ako u nejednakostima (3) pustimo da $n \to +\infty$, dobijamo

$$x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right) \le -\frac{10}{3} \le x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right),$$

odakle izlazi $f(x) = -10/3$ i na osnovu navedenih osobina funkcije f zaključujemo da je $x = 2$.

Primedba. Ispitati da li niz iz zadatka 1208 zadovoljava uslove (1).

Zadatak i rešenje predložio je mr Mirko Jovanović.

1228. Dokazati da niz

$$a_n = \frac{n^n}{3^n n!} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

konvergira i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. U zadatku 242 dokazano je

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Stoga je

$$(1) \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{3}e < 1,$$

odakle zaključujemo da je niz a_n monotono opadajući i ograničen odozdo, pa postoji

$$a = \lim a_n \ge 0.$$

Prema (1), imamo da je

$$0 < a_{n+1} < \frac{1}{3}ea_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako ovde pustimo da $n \to +\infty$, dobijamo

$$0 \le a \le \frac{e}{3}a,$$

što je moguće samo za $a = 0$. Dakle, granična vrednost datog niza je 0.

1229. Dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}},$$

i na osnovu toga odrediti $\lim \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Uputstvo. Nejednakost se može dokazati matematičkom indukcijom. Granična vrednost niza nalazi se iz

$$0 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

1230. Naći $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ [e],

1231. Neka za pozitivan niz $\{a_n\}$ važi

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o(1/n) \quad (n \to +\infty), \tag{1}$$

gde je $p > 0$. Dokazati da je $\lim a_n = 0$.

Rešenje. Za dovoljno veliko n, iz (1) zaključujemo da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{p}{2n}. \tag{2}$$

Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da (2) važi za svako $n \geq 1$. Posmatrajmo niz $\{b_n\}$ definisan sa

$$b_1 = 1, \qquad b_n = \frac{1}{\left(1+\frac{p}{2}\right)\left(1+\frac{p}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{2(n-1)}\right)}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Očigledno je

$$0 < b_n < \frac{1}{1+\frac{p}{2}+\frac{p}{4}+\cdots+\frac{p}{2(n-1)}} \to 0 \text{ kad } n \to +\infty.$$

Pored toga,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{2n}.$$

Dalje imamo, zbog (2):

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

odakle, zbog pozitivnosti nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dobijamo

$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n} > \frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{b_2}{b_3}\cdots\frac{b_{n-1}}{b_n},$$

tj.

$$0 < a_n < a_1 \cdot b_n \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

čime je dokaz završen.

Primedba. Neposredno iz (1) može se zaključiti da je niz $\{a_n\}$ monotono opadajući za dovoljno veliko n, jer je $a_n/a_{n+1} > 1$.

1232. Ako je $\lim a_n = 0$ i ako postoji $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = c$, dokazati da je $|c| \geq 1$.

Konstruisati niz $\{a_n\}$ sa $\lim a_n = 0$, za koji ne postoji $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

1233. Dokazati: Ako za niz $\{x_n\}$ važi

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n, \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$$

tada postoji $\lim \frac{x_n}{n}$.

1234. Neka je

$$x_1 = 1, \; x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dokazati da je $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ i na osnovu toga zaključiti da je niz $\{x_n\}$ konvergentan.

Rešenje. Nije teško videti da je $0 < x_n < 1$ za $n \geq 2$, pa su stoga $l = \underline{\lim}\, x_n$ i $L = \overline{\lim}\, x_n$ konačni. Iz definicije niza tada dobijamo da je

$$L = \frac{1}{1+l}, \qquad l = \frac{1}{1+L},$$

odakle je $l = L$.

Zadatak i rešenje predložio je mr Nenad Cakić.

1235. Dokazati: Ako za ograničen niz $\{x_n\}$ važi

$$\lim(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

tada za svako $c \in \mathbf{R}$ takvo da je

$$\underline{\lim}\, x_n \leq c \leq \overline{\lim}\, x_n$$

postoji jedan podniz x_{n_k} za koji je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

1236. Ako su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ ograničeni i nenegativni nizovi, dokazati da je

$$\underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}\,(a_n b_n) \leq \underline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n .$$

1237. Ako je $\{a_n\}$ konvergentan niz, da li niz

$$b_n = n(a_{n+1} - a_n)$$

može divergirati ka $+\infty$?

1238. Neka je x_n niz realnih brojeva. Dokazati:

a) Ako je niz x_n ograničen odozdo, tada postoje dva monotono neopadajuća niza y_n, z_n tako da je $y_n \leq x_n \leq z_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

b) Ako je niz x_n ograničen odozgo, tada postoje dva monotono nerastuća niza u_n i v_n tako da je $u_n \leq x_n \leq v_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

c) Ako je niz x_n konvergentan, tada se nizovi y_n, z_n, u_n, v_n iz a) i b) mogu izabrati tako da imaju istu graničnu vrednost kao i niz x_n.

Rezultat. Traženi nizovi su, na primer,

$$y_n = \inf_{k \geq n} x_k , \quad z_n = \max_{k \leq n} x_k , \quad u_n = \min_{k \leq n} x_k , \quad v_n = \sup_{k \geq n} x_k .$$

HENRY BRIGGS (1561–1631) je posvetio poslednje godine svog života izračunavanju logaritama trigonometrijskih funkcija, i do svoje smrti je skoro obavio taj zadatak za svaki stoti deo stepena, na 13 decimalnih mesta. Ovaj posao je, 1633. godine, dovršio jedan njegov saradnik i objavio u knjizi *Trigonometria Brittanica, sive Doctrina Triangulorum.*

8.2 Funkcije i izvodi

8.2.1 Granične vrednosti funkcija

1239. Neka je funkcija f definisana na $(a,+\infty)$ i ograničena na svakom intervalu (a,b), gde je $0<b-a<+\infty$. Dokazati da tada važi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right), \tag{1}$$

gde se pretpostavlja da granična vrednost na desnoj strani u (1) postoji.

Primedba. Nije dovoljno pretpostaviti da postoji granična vrednost na levoj strani u (1); primer za to je funkcija $f(x)=\sin x$, za koju postoji granična vrednost na levoj, ali ne i na desnoj strani. Takođe je moguće da ni jedna granična vrednost ne postoji, kao u slučaju funkcije $f(x)=(-1)^{[x]}x$. Formula (1) se može shvatiti i kao generalizacija L'HOSPITALovog pravila, odnosno STOLZove teoreme.

Rešenje. Pretpostavimo da važi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=C\,. \tag{2}$$

Razlikovaćemo dva slučaja: C beskonačno i C konačno.

Neka je C konačno. Bez gubitka opštosti pretpostavimo da je $C\geq 0$ (u suprotnom slučaju posmatraćemo funkciju $-f$). Tada za svako $\varepsilon>0$ postoji x_0, tako da za svako $x\geq x_0$ važi:

$$\begin{aligned}
C-\varepsilon< &\quad f(x+1)-f(x) &&< C+\varepsilon\\
C-\varepsilon< &\quad f(x+2)-f(x+1) &&< C+\varepsilon\\
&\quad\vdots &&\quad\vdots\\
C-\varepsilon< &\, f(x+n)-f(x+n-1) &&< C+\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Sabiranjem svih gornjih nejednakosti dobijamo da za svako $x\geq x_0$ i svako $n\in\mathbb{N}$ važi

$$nC-n\varepsilon<f(x+n)-f(x)<nC+n\varepsilon\,,$$

odnosno, posle deljenja sa $x+n$:

$$\frac{nC}{x+n}-\frac{n\varepsilon}{x+n}+\frac{f(x)}{x+n}<\frac{f(x+n)}{x+n}<\frac{nC}{x+n}+\frac{n\varepsilon}{x+n}+\frac{f(x)}{x+n}\,. \tag{3}$$

Pretpostavimo sada da $x\in[x_0,x_0+1)$. Tada je

$$\frac{nC}{x_0+1+n}<\frac{nC}{x+n}\leq\frac{nC}{x_0+n} \tag{4}$$

i

$$\frac{n\varepsilon}{x_0+1+n} < \frac{n\varepsilon}{x+n} \leq \frac{n\varepsilon}{x_0+n} . \tag{5}$$

Iz uslova zadatka sleduje da je funkcija f ograničena na intervalu $[x+0, x_0+1)$, recimo $|f(x)| < A$. Za x u tom intervalu imaćemo da je

$$-\frac{A}{x+n} < \frac{f(x)}{x+n} < \frac{A}{x+n} . \tag{6}$$

Zamenom (4), (5) i (6) u (3), dobićemo, za $x \in [x_0, x_0+1)$:

$$\frac{nC}{x_0+1+n} - \frac{n\varepsilon}{x_0+n} - \frac{A}{x_0+n} < \frac{f(x+n)}{x+n} < \frac{nC}{x_0+n} + \frac{n\varepsilon}{x_0+n} + \frac{A}{x_0+n} . \tag{7}$$

Gornje nejednakosti važe za svako n.[1] Za dovoljno veliko n, recimo za $n \geq n_0$, i za svako $x \in [x_0, x_0+1)$ važi

$$\left|\frac{A}{x_0+n}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{nC}{x_0+n} - C\right| < \varepsilon, \quad \frac{n}{x_0+n} . \tag{8}$$

Iz (7) i (8) sleduje

$$\left|\frac{f(x+n)}{x+n} - C\right| \leq 3\varepsilon \tag{9}$$

Dakle, za dato ε nalazimo x_0 i n_0, tako da za svako $x \in [x_0, x_0+1)$ i za svako $n \geq n_0$ važi (9). Kako se svaki realan broj $y \geq x_0+1$ može napisati u obliku $y = x+n (x \in [x_0, x_0+1), n \in \mathbf{N})$, iz (9) zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = C$. Slučaj $C = \pm\infty$ razmatra se analogno.

1240. Ispitati da li je tačno tvrđenje: Ako je funkcija f definisana za svako $x \in \mathbf{R}$, i ako postoji konačan

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) ,$$

tada postoji bar jedan interval $[a, b]$ na kome je funkcija f ograničena.

1241. Neka je funkcija f definisana na $(a, +\infty)$ i ograničena na svakom intervalu (a, b) za $0 < b-a < +\infty$, i neka je $\inf\limits_{x\geq a} f(x) > 0$. Dokazati da je tada

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} ,$$

ukoliko postoji granična vrednost na desnoj strani.

[1] Dokaz bi bio kraći kada bismo na ovom mestu pustili da $n \to \infty$ i primenili teoremu o dva žandara. Objasnite zašto to nismo uradili.

1242. Dokazati: Ako je funkcija f definisana na $(a,+\infty)$, ograničena na svakom intervalu (a,b) za $0 < b-a < +\infty$ i ako postoji

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=L,$$

tada je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{L}{x^{n+1}}.$$

1243. Odrediti realne brojeve a i b tako da je

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left((x^3-ax^2+1)^{1/3}-(x^3-bx^2+1)^{1/3}\right)=\frac{1}{3}. \tag{1}$$

Rešenje. Ako iz obe zagrade u (1) izdvojimo x^3, dobićemo:

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to+\infty}x\left((1-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^3})^{1/3}-(1-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^3})^{1/3}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left(\left(1+(-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^3})\right)^{1/3}-\left(1+(-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^3})\right)^{1/3}\right).\end{aligned}$$

Ovim smo stvorili uslove za primenu MACLAURINovog razvoja:

$$(1+t)^{1/3}=1+\frac{1}{3}t+o(t)\qquad(t\to0),$$

gde za t uzimamo $-a/x+1/x^3$, odnosno $-b/x+1/x^3$. U oba slučaja $t\to0$, $o(t)=o(1/x)$, pa je

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{3}(-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^3})+o(1/x)-\left(1+\frac{1}{3}(-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^3})+o(1/x)\right)\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{b-a}{3x}+o(1/x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b-a}{3}+o(1)\right)=\frac{b-a}{3}.\end{aligned}$$

Prema tome, $L=1/3$ ako i samo ako je $b=1+a$.

1244. Neka je

$$f(x)=\frac{x[e^{2x}(x^2-6x+6)+e^x(x^2+6x-12)+6]}{(e^x-1)^3}.$$

Odrediti granične vrednosti funkcije f kad **a)** $x\to0$, **b)** $x\to+\infty$, **c)** $x\to-\infty$. U poslednja dva slučaja odrediti i znak funkcije za velike vrednosti $|x|$.

Rezultat. **a)** 2, **b), c)** 0, $f(x)>0$ za $|x|$ dovoljno veliko.

1245. Neka je funkcija f definisana u nekoj levoj okolini tačke a i neka za svaki monotono rastući niz x_n takav da je $\lim x_n = a$ važi da je $\lim f(x_n) = A$. Dokazati da je tada

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = A .$$

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da za neko $\varepsilon > 0$ važi

$$(\forall \delta > 0)(\exists x) \quad a - \delta < x < a \wedge |f(x) - A| > \varepsilon . \tag{1}$$

Za $\delta_1 = 1$, neka je x_1 takvo da važi (1). Neka je $\delta_2 = (a - x_1)/2$, i izaberimo x_2 tako da (1) važi sa δ_2 i x_2. Nastavljanjem ovog postupka do beskonačnosti, dobijamo niz $\{x_n\}$ koji je po konstrukciji monotono rastući i koji konvergira ka a, ali $f(x_n)$ ne konvergira ka A, što je kontradikcija.

1246. Ispitati da li je

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\log(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\log(1 + x)} \right) = -\frac{1}{2} .$$

1247. Naći

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\, \frac{\log(e^x + x)}{x} \right) .$$

Rezultat. $-\frac{1}{6}$.

1248. Izračunati

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x .$$

Rešenje. Neka je $f(x)$ funkcija čija se granična vrednost traži. Primenom L'HOSPITALovog pravila dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \log f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(\sin(1/x) + \cos(1/x))}{1/x} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\log(\sin t + \cos t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} = -1 , \end{aligned}$$

pa je tražena granična vrednost jednaka e^{-1}.

1249. Naći

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x + a)^{1 + 1/x} - x^{1 + 1/(x+a)} \right) .$$

Rešenje. Kako je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x+a)}{x}=0,$$

imamo da je

$$(x+a)^{1+1/x}=(x+a)(x+a)^{1/x}=(x+a)\exp\left(\frac{\log(x+a)}{x}\right)$$

$$=(x+a)\left(1+\frac{\log(x+a)}{x}+\frac{(\log(x+a))^2}{2x^2}+o((\log(x+a))^2/x^2)\right)$$

$$=x+a+\frac{x+a}{x}\log(x+a)+o(1)\qquad(x\to+\infty).\tag{1}$$

Na sličan način nalazimo

$$x^{1+1/(x+a)}=x+\frac{x}{x+a}\log x+o(1)\qquad(x\to+\infty)\tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$(x+a)^{1+1/x}-x^{1+1/(x+a)}=a+\frac{x+a}{x}\log(x+a)-\frac{x}{x+a}\log x+o(1)$$

$$=a+\left(\frac{x+a}{x}-\frac{x}{x+a}\right)\log x+\frac{x+a}{x}\log\frac{x+a}{x}+o(1)\to a\qquad(x\to+\infty).$$

Zadatak se može rešiti i primenom L'HOSPITALovog pravila.

1250. Naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ [$-e/2$]

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^3-x^2+x/2)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right)$ [$1/6$]

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ [$19/90$]

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ [$1/2$]

1251. Odrediti funkciju oblika Cx^n tako da $y(x)\sim Cx^n$ kad $x\to0$, gde je

a) $y=(1+x)^x-1$ [x^2]

b) $y=1-\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}$ [$x/2$]

c) $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)$ [$x^7/30$]

d) $y=\dfrac{x^x-1}{\log x}$ [x]

1252. Odrediti koeficijente a, b, c, d u jednakostima:

a) $(a + b\cos x)\sin x = x + O(x^5)$ $(x \to 0)$ $[\, a = 4/3, b = -1/3 \,]$

b) $\operatorname{ctg} x = \frac{1+ax^2}{x+bx^3} + O(x^5)$ $(x \to 0)$ $[\, a = -2/5, b = -1/15 \,]$

c) $e^x = \dfrac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2} + O(x^5)$ $(x \to 0)$ $[\, a = 1/2, b = 1/12, c = -1/2, d = 1/12 \,]$

8.2.2 Neprekidnost i uniformna neprekidnost

1253. Metod polovljenja intervala. Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, $a < b$ i neka je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, pri čemu je poznato da funkcija f ima samo jednu nulu u (a, b). Neka je $a_0 = a$, $b_0 = b$. Definišimo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, $n = 2, 3, \ldots$ na sledeći način:

Neka je s sredina intervala (a_{n-1}, b_{n-1}), tj. $s = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Ako je $f(s) > 0$, tada je $a_n = a_{n-1}$, $b_n = s$. Ako je $f(s) < 0$, tada je $a_n = s$, $b_n = b_{n-1}$. Ako je $f(s) = 0$, tada je $a_n = b_n = s$.

Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$, gde je c nula funkcije f.

Primedba. Ovaj metod se koristi za približno određivanje nule date neprekidne funkcije na datom intervalu.

Rešenje. U slučaju ako je $f(s) = 0$ za neko n, gde je s sredina intervala (a_{n-1}, b_{n-1}), tada je $a_n = b_n = a_{n+1} = b_{n+1} = \cdots = s$, i nizovi a_n i b_n imaju istu graničnu vrednost s, gde je s nula funkcije f.

Pretpostavimo sada da je $f(s) \neq 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Prema konstrukciji nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, tada je

$$a_1 < a_2 < a_3 \cdots < b_3 < b_2 < b_1$$

i važi da je

$$\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Prema tome, intervali $[a_n, b_n]$ su umetnuti intervali (videti zadatak 256), pa je

$$\lim a_n = \lim b_n = c$$

Dokažimo da je $f(c) = 0$. Ako bi bilo $f(c) > 0$, tada bi, zbog neprekidnosti funkcije f, za svako x u nekoj okolini tačke c važila nejednakost $f(x) > 0$. Međutim, zbog $f(a_n) < 0$ i $\lim a_n = c$, ovo nije moguće. Na isti način, zbog $f(b_n) > 0$ i $\lim b_n = c$ nije moguće $f(c) < 0$. Dakle, $f(c) = 0$.

1254. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ako je } x = m/n, \text{ gde su } m, n \in \mathbf{Z} \text{ uzajamno prosti, } n \geq 1, \\ 0, & \text{ako } x \neq \mathbf{Q} \end{cases}$$

Ispitati neprekidnost date funkcije.

Uputstvo. Pokazati najpre da ako niz racionalnih brojeva p_n/q_n, $q_n \geq 1$, $NZS(p_n, q_n) = 1$, konvergira ka iracionalnom broju, tada je $\lim q_n = \infty$. Odavde zaključiti da je data funkcija neprekidna u iracionalnim tačkama x.

1255. Neka je $f(x) = nx/(n+1)$ ako je x racionalan broj oblika $x = m/n$, gde su m i $n \geq 1$ uzajamno prosti, i neka je $f(x) = |x|$ ako je x iracionalan broj. U kojim tačkama je ova funkcija neprekidna?

1256. Funkcija f je definisana sa

$$f(x) = x, \quad (x \in \mathbf{Q}) \qquad f(x) = -x, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}.$$

U kojim tačkama $x \in \mathbf{R}$ je ova funkcija neprekidna ?

1257. Da li funkcija koja je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ a nije monotona ni na jednom intervalu (a, b) može da ima inverznu funkciju ?

Rezultat. Može, ako nije neprekidna ni na jednom intervalu. Videti zadatke 63 i 1256.

1258. Dokazati: Ako je funkcija f definisana i neprekidna na $[a, b]$ i ako na $[a, b]$ nije monotona, tada f nema inverznu funkciju na $[a, b]$.

1259. Funkcija f je definisana sa

$$f(x) = \frac{1}{\sin(1/x)}, \quad x \neq 0, x \neq \frac{1}{k\pi}, k = 1, 2, \ldots, \quad f(x) = 0 \text{ u ostalim slučajevima.}$$

Pokazati da ova funkcija ima prebrojivo mnogo prekida druge vrste na svakom intervalu $[0, a]$, $a > 0$.

1260. Ispitati da li su funkcije uniformno neprekidne na naznačenim intervalima:

a) $\log x$ na $(0, 1)$ [ne]

b) $\dfrac{\sin x}{x}$ na $(0, +\infty)$ [da]

1261. Ako su funkcije f i g definisane i neprekidne na skupu D, dokazati da su funkcije

$$x \mapsto \min(f(x), g(x)) \quad \text{i} \quad x \mapsto \max(f(x), g(x))$$

takođe neprekidne na D. Da li isto tvrđenje važi za uniformnu neprekidnost?

1262. Ako su funkcije f i g uniformno neprekidne na A, da li i njihov proizvod mora da bude uniformno neprekidna funkcija na A ?

Rezultat. Ne mora. Na primer, funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = \sin x$ su uniformno neprekidne na $\mathbf{R}$, ali funkcija $x \mapsto x \sin x$ nije uniformno neprekidna na $\mathbf{R}$.

1263. Neka je f neprekidna funkcija na $[0,1]$ i neka je $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $K > 0$ tako da za svako $x, y \in [0,1]$ važi

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + 2\frac{(x-y)^2}{K^2} M .$$

Rešenje. Kako je funkcija f neprekidna na zatvorenom skupu $[0,1]$, ona je i uniformno neprekidna. Stoga za dato $\varepsilon > 0$ postoji $K > 0$ tako da je

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + 2\frac{(x-y)^2}{K^2} M$$

kad god je $|x - y| < K$. Ako je $|x - y| \geq K$, tada je $|x - y|/K \geq 1$, pa je

$$|f(x) - f(y)| \leq 2M \leq 2M\frac{(x-y)^2}{K^2} + \varepsilon ,$$

čime je tvrđenje dokazano.

8.2.3 Izvodi

1264. a) Neka je funkcija F diferencijabilna u svakoj tački skupa $D = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Neka za svako $x \in D$ važi $F'(x) = 0$. Ako je, za neko $a \in D$, $F(a) = 0$, tada je $F(x) = 0$ za svako $x \in D$.

b) Koristeći se rezultatom pod a), dokazati da iz

$$(\forall x \in D)\ f'(x) = g'(x) \ \wedge \ f(a) = g(a)$$

sledi $f(x) = g(x)$ za svako $x \in D$, gde je D zajednički domen za funkcije f i g, na kome su obe diferencijabilne.

Rešenje. Iako ima jednostavno rešenje, ovaj zadatak je osnova za dokazivanje velikog broja raznih jednakosti između funkcija. Naime, često je lakše dokazati jednakost izvoda umesto jednakosti funkcija. U tom slučaju treba još samo proveriti da li važi jednakost između funkcija samo u jednoj, proizvoljno odabranoj, tački.

Deo a) dokazujemo na sledeći način: Ako je $F'(x) = 0$ za svako $x \in D$, tada je $F(x) = C$=const., pa iz drugog uslova $F(a) = 0$ sledi $C = 0$, tj, $F(x) = 0$ za svako $x \in D$.

Deo b) se dobija iz a) ako se stavi $F(x) = f(x) - g(x)$.

1265. Dokazati da za $|x| \leq 1/2$ važi

$$3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi\,. \tag{1}$$

Rešenje. Neka je $f(x)$ funkcija sa leve strane jednakosti (1). Imamo da je $f(0) = \pi$, kao i

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-4x^2)^2(1-x^2)}}$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\operatorname{sgn}(1-4x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{za } |x| < \frac{1}{2}\,.$$

Ovim dokazano da jednakost (1) važi za $|x| < 1/2$ (videti zadatak 1264).
U tačkama $x = \pm 1/2$ neposredno se proverava da važi (1).

1266. Pokazati da funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad \text{i} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

imaju jednake izvode u svakoj tački u kojoj su obe funkcije definisane. Naći zavisnost između funkcija f i g.

Rešenje. Neposredno se dobija da je $f'(x) = g'(x)$ za svako $x \neq 1$, dok u tački $x = 1$ funkcija f nije definisana. Iz ovoga ne možemo da zaključimo da je $f(x) = g(x) + C$ za svako $x \neq 1$, jer se konstanta može razlikovati u oblastima $x < 1$ i $x > 1$.

Zaista, kako je $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ i $g(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, imamo da je

$$f(x) = g(x) + \pi/4 \qquad (x < 1)\,.$$

U oblasti $x > 1$, na osnovu dokazane jednakosti izvoda, važi

$$f(x) = g(x) + C\,,$$

gde je C konstanta koju treba odrediti. Ako u gornjoj jednakosti pustimo da $x \to +\infty$, dobijamo $\operatorname{arctg}(-1) = \pi/2 + C$, odakle je $C = -3\pi/4$ i važi jednakost

$$f(x) = g(x) - \frac{3\pi}{4} \qquad (x > 1)\,.$$

1267. Naći vezu između funkcija

$$f_1(x) = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \arcsin\frac{1}{x}\,, \quad f_2(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\,, \quad f_3(x) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

1268. Izračunati sumu

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Rešenje. Neka je

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad (x \neq 1).$$

Tada je

$$S(x) = f'(x) = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)' = \frac{x^n(nx - n - 1) + 1}{(x-1)^2} \qquad (x \neq 1).$$

Za $x = 1$, neposredno se dobija da je $S(x) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

1269. Neka je

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Definišimo funkcije f_k sa:

$$f(x) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}, \quad f_1(x) = f'(x), \quad f_k(x) = (xf_{k-1}(x))' \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

Dokazati da je

$$S_k = \lim_{x \to 1} f_k(x)$$

i na osnovu toga izračunati $S_3(n)$ i $S_4(n)$.

Rezultat. $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $S_4(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

1270. Neka je funkcija $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ diferencijabilna u tački a. Odrediti

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n^2}\right) - nf(a) \right).$$

Rešenje. Imamo da je

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(a + \frac{k}{n^2}\right) - f(a) \right).$$

Ako je f diferencijabilna u tački a, tada je

$$f\left(a + \frac{k}{n^2}\right) - f(a) = f'(a)\frac{k}{n^2} + R_{k,n}\frac{k}{n^2}, \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

gde je $R_{k,n}$ ostatak za koji važi

$$(1) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \frac{k}{n^2} < \delta \Rightarrow |R_{k,n}| < \varepsilon \, .$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i izaberimo δ prema (1). Tada imamo

$$\frac{1}{n} < \delta \Rightarrow \frac{k}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow |R_{k,n}| < \varepsilon \, ,$$

tj. za $n > 1/\delta$ je $|R_{k,n}| < \varepsilon$ za svako $k = 1, \ldots, n$. Dalje je

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(f(a + \frac{k}{n^2}) - f(a) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(f'(a) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} R_{k,n} \frac{k}{n^2} \right)$$

$$(2) \qquad = \frac{1}{2} f'(a) + \lim_{n\to\infty} S_n \, ,$$

gde je $S_n = \sum_{k=1}^{n} R_{k,n} \frac{k}{n^2}$.

Za svako $\varepsilon > 0$ i za $n > 1/\delta$ imamo

$$|S_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |R_{k,n}| \frac{k}{n^2} \leq \varepsilon \frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \varepsilon \, ,$$

što znači da je $\lim S_n = 0$, pa iz (2) dobijamo $L = f'(a)/2$.

1271. Navesti primer funkcije koja je diferencijabilna u tački $x_0 \in \mathbf{R}$, a u svakoj okolini tačke x_0 postoje tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna.

Rešenje. Jedan takav primer je funkcija f data sa

$$f(x) = (x - x_0)^2 \left| \cos \frac{\pi}{x - x_0} \right| , x \neq x_0, \qquad f(x_0) = 0 \, .$$

Neposredno se proverava da je $f'(x_0) = 0$. U tačkama $x_k = x_0 + 2/(2k+1)$ imamo da je $f'_-(x_k) \neq f'_+(x_k)$, pa kako $x_k \to x_0$ kad $k \to +\infty$, zaključujemo da u svakoj okolini tačke x_0 postoje tačke u kojima funkcija f nije diferencijabilna.

1272. Da li je za postojanje izvoda funkcije $x \mapsto f(g(x))$ u tački x_0 potrebno da postoje izvodi $g'(x_0)$ i $f'(g(x_0))$? Da li su ovi uslovi dovoljni?

Rešenje. Uslovi su dovoljni, ali nisu potrebni. Na primer, funkcije

$$f(x) = 2x + |x| \, , \quad g(x) = \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} |x|$$

ne ispunjavaju ni jedan od navedenih uslova za $x_0 = 0$, ali je funkcija $x \mapsto f(g(x)) = x$ diferencijabilna u x_0.

1273. Ako je funkcija f diferencijabilna na (a,b) i ako je $\lim_{x\to b_-} f(x) = +\infty$, da li mora da bude i $\lim_{x\to b_-} f'(x) = +\infty$? Da li izvod može da bude ograničen na (a,b)?

Rešenje. Granična vrednost izvoda ne mora da postoji. Na primer, ako je

$$f(x) = \cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x},$$

tada je $\lim_{x\to 0_-} f(x) = +\infty$, ali

$$f'(x) = \frac{1+\sin 1/x}{x^2}$$

nema graničnu vrednost kad $x \to 0$. Naime, za $u_n = 1/(2n\pi - \pi/2)$ imamo da je $f'(u_n) = 0$, dok za $v_n = 1/(n\pi)$ imamo $f'(v_n) = n^2\pi^2 \to +\infty$.

Dokazaćemo da izvod, pod navedenim pretpostavkama, ne može da bude ograničen. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $|f'(x)| < M$ za svako $x \in (a,b)$. Primenom LAGRANGEove teoreme na proizvoljan interval $(x,y) \subset (a,b)$ nalazimo da je

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y| < M(b-a),$$

iz čega proizilazi da je funkcija f ograničena na (a,b), što je kontradikcija sa pretpostavkom.

1274. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna na $(a,+\infty)$, dokazati implikaciju

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

1275. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna na $(a,+\infty)$ i ako postoji $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, dokazati implikaciju

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

1276. Da li iz

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad (x \to 0),$$

gde je P_n polinom reda n, sledi

$$f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1}) \qquad (x \to 0)\ ?$$

Rezultat. Ne. Posmatrati funkciju $f(x) = x + x^2\sin(\pi/x)$, za $n = 1$.

1277. Dokazati da je funkcija

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\quad (x\neq 0),\qquad f(0)=\frac{1}{2}$$

diferencijabilna u $x=0$ i naći $f'(0)$. [$-1/12$]

1278. Funkcije f i g zadovoljavaju uslove: 1° f i g imaju drugi izvod u tački x_0, 2° $f(x_0)=g(x_0)$, 3° $f(x)\leq g(x)$ u nekoj okolini tačke x_0. Dokazati da je **a)** $f'(x_0)=g'(x_0)$, **b)** $f''(x_0)\leq g''(x_0)$.

Rešenje. a) Iz uslova zadatka imamo da je, za dovoljno malo $h>0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-g(x_0)}{h}\leq\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h},$$

odakle se, puštanjem da $h\to 0$, dobija

$$f'_+(x_0)\leq g'_+(x_0). \tag{1}$$

Na sličan način, iz

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\frac{g(x_0)-f(x_0-h)}{h}\geq\frac{g(x_0)-g(x_0-h)}{h},$$

zaključujemo da je

$$f'_-(x_0)\geq g'_-(x_0). \tag{2}$$

Kako postoje izvodi $f'(x_0)$ i $g'(x_0)$, iz (1) i (2) sledi da je $f'(x_0)=g'(x_0)$.

b) Ako postoje drugi izvodi u tački x_0, tada je, na osnovu zadatka 524,

$$\begin{aligned}f''(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h}\\&\leq\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-2g(x_0)+g(x_0-h)}{h}=g''(x_0).\end{aligned}$$

1279. Dokazati da za prirodne brojeve k i n, $k<n$ i za svako $a,b\in\mathbf{R}$ važi

$$S=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j(aj+b)^k=0.$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j e^{(aj+b)x}.$$

Tada je

$$S = f^{(k)}(x)\Big|_{x=0} .$$

S druge strane,

$$f(x) = e^{bx} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \left(e^{ajx}\right) = e^{bx} (1 - e^{ax})^n .$$

Polazeći od ovog drugog oblika funkcije f, nije teško pokazati da je $f^{(k)}(x)|_{x=0} = 0$ za $k < n$, čime je dokaz završen.

1280. Za $n \in \mathbf{N}$, odrediti $f^{(n)}(0)$ ako je $f(x) = \operatorname{sh} x \cdot \sin x$.

Rezultat. $f^{(n)}(0) = 2^{n/2}$, $n = 4k+2, k = 0, 1, 2, \ldots$, $f^{(n)}(0) = 0$ u ostalim slučajevima.

1281. Dokazati:

$$\left(x^{n-1} f(1/x)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}(1/x) .$$

1282. (Generalizacija zadatka 524). Dokazati:

a) Ako u tački x postoji $f_+^{(k)}(x)$, tada je

$$f_+^{(k)}(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{j} f(x + (k-j)h)$$

b) Ako u tački x postoji $f_-^{(k)}(x)$, tada je

$$f_-^{(k)}(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{j} f(x - jh)$$

c) Ako u tački x postoji $f^{(k)}(x)$, tada je

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{j} f(x + (k-j)h) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{j} f(x - jh) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{j} f\left(x + \frac{k-2j}{2} h\right) \end{aligned}$$

Pokazati da postojanje graničnih vrednosti na desnim stranama navedenih jednakosti ne implicira postojanje odgovarajućih izvoda na levim stranama.

1283. Naći maksimalno k za koje postoji konačan izvod $f^{(k)}(0)$, ako je

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & (\text{za } x \neq 0)\,, \\ 0, & (\text{za } x = 0)\,. \end{cases}$$

1284. Pokazati da funkcija f data sa

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2(1-x)^2}\right), & \text{za } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{za } x \neq (0,1) \end{cases}$$

ima sve izvode u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$. Skicirati grafik date funkcije.

1285. Pokazati da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)\right), & \text{za } 0 < x < 1\,, \\ 0\,, & \text{za } x \leq 0\,, \\ 1\,, & \text{za } x \geq 1\,, \end{cases}$$

ima sve izvode u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$ i skicirati njen grafik.

1286. Neka je f beskonačno puta diferencijabilna funkcija definisana u nekoj okolini nule, i neka je $n \in \mathbf{N}$. Dokazati da je

$$f(x) = x^n g(x)\,,$$

gde je g beskonačno puta diferencijabilna funkcija, ako i samo ako je

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

8.2.4 Taylorova formula

1287. Ako funkcija f ima neprekidan n-ti izvod na $[a,b]$ i ako je $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ za $k = 1, \dots n-1$, dokazati da postoji $c \in (a,b)$ tako da važi

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{|f^{(n)}(c)|}{n!} \cdot \frac{|a-b|^n}{2^{n-1}}.$$

Rešenje. Ako primenimo TAYLOROvu formulu na funkciju f u tački $(a+b)/2$, a u okolini tačaka a i b, dobijamo redom:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f^{(n)}(c_1)}{n!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n, \qquad c_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f^{(n)}(c_2)}{n!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^n, \qquad c_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right).$$

Iz ove dve jednakosti nalazimo da je

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \left|f^{(n)}(c_1) - f^{(n)}(c_2)\right| \cdot \frac{|a-b|^n}{2^n n!} \\ &\leq \frac{|f^{(n)}(c_1)| + |f^{(n)}(c_2)|}{2} \cdot \frac{|a-b|^n}{2^{n-1} n!}. \end{aligned}$$

Iz neprekidnosti funkcije $f^{(n)}$ sledi neprekidnost funkcije $|f^{(n)}|$; kako neprekidna funkcija uzima sve vrednosti između svoje dve vrednosti, zaključujemo da postoji neko $c \in (a,b)$ tako da je

$$\left|f^{(n)}(c)\right| = \frac{|f^{(n)}(c_1)| + |f^{(n)}(c_2)|}{2},$$

čime je dokaz završen.

1288. Naći pedeseti izvod u nuli funkcije $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

1289. Funkciju $f(x) = 1 + x^2(1+x)^{1/2}$ aproksimirati primenom MACLAURINove formule polinomom četvrtog stepena i proceniti grešku na $(0, 1/2)$.

Rezultat. $f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16} \cdot \frac{x^5}{\sqrt{(1+\theta x)^5}}$, $\theta \in (0,1)$. Greška na zadatom intervalu nije veća od 2^{-9}.

1290. Neka je $t \mapsto f(t)$ funkcija definisana u nekoj okolini tačke t_0, takva da postoji $f^{(n+1)}(t_0) \neq 0$. Neka je

$$\varphi(t) = \frac{n!}{(t-t_0)^n}\left(f(t) - f(t_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0)\right), t \neq t_0 \quad \varphi(t_0) = f^{(n)}(t_0).$$

a) Pokazati da funkcija φ ima inverznu funkciju u nekoj okolini tačke $(t_0, \varphi(t_0))$.
b) Naći izvod $y'(t_0)$ funkcije $y = y(t)$ koja je definisana pomoću

$$\varphi(y) = f^{(n)}(t).$$

Rezultat. $y'(t_0) = n + 1$.

1291. Neka funkcija f ima neprekidan izvod reda $n+1$ u nekoj okolini tačke a i neka je $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Definišimo funkciju $\theta = \theta(h)$ pomoću TAYLORove formule sa ostatkom u CAUCHYjevom obliku:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad (0 < \theta < 1).$$

Dokazati da je $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+n}}$.

8.2.5 Teoreme o srednjoj vrednosti

1292. Primenom LAGRANGEove teoreme dokazati da za $x \geq 0$ važi

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Ovim je definisana funkcija $\theta = \theta(x)$. Dokazati da je $\lim\limits_{x \to 0_+} \theta(x) = 1/4$ i da je $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = 1/2$, pa zatim dokazati da za sve vrednosti $x \geq 0$ važi $1/4 \leq \theta < 1/2$.

Rešenje. Neka je $f(x) = \sqrt{x}$. Za svako $x \geq 0$, ova funkcija na segmentu $[x, x+1]$ ispunjava uslove LAGRANGEove teoreme, pa postoji neka tačka između x i $x+1$, nazovimo je $x + \theta$, tako da je

$$(1) \quad f(x+1) - f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = f'(x+\theta) = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

iz čega sledi prvi deo tvrđenja. Ako iz (1) izračunamo θ, dobićemo

$$\theta = \theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)} - \frac{x}{2}$$

odakle je $\lim\limits_{x \to 0_+} \theta(x) = 1/4$. Kad $x \to +\infty$, imamo

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/2} - 1\right),$$

odakle je (posle razvoja po MACLAURINovoj formuli), $\lim_{x\to+\infty}\theta(x) = 1/2$. Da bismo dokazali da je θ u granicama između $1/4$ i $1/2$, dovoljno je dokazati da je to monotono rastuća funkcija po x, tj, da je izvod $\theta'(x)$ pozitivna funkcija, i to za svako $x \geq 0$. Zaista, za $x \geq 0$ imamo da je

$$\theta'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x(x+1)}(2x+1-2\sqrt{x^2+x})} .$$

Kako je $2x+1 > 2\sqrt{x^2+x}$ (što se može dokazati kvadriranjem), sledi da je $\theta'(x) > 0$ za svako $x \geq 0$, čime je dokaz završen.

1293. Neka je $\theta(x)$ data funkcija takva da za svako $x \in [-a, a]$ važi $-1 \leq \theta(x) \leq 1$. Pokazati da za svaku funkciju f definisanu u nekoj okolini tačke $x = 0$ važi:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x\theta(x)) = L .$$

Pokazati na primeru da obrnuta implikacija ne važi.

Rešenje. Neka je $\lim_{x\to 0} f(x) = L$. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksirano. Za takvo ε, postoji $\delta > 0$ tako da za svako y za koje je $|y| < \delta$, važi i $|f(y) - L| < \varepsilon$. Ako je $\theta(x) \in [-1, 1]$, tada $|x| < \delta \Rightarrow |x\theta(x)| < \delta$, odakle (sa $y = x\theta(x)$) sledi $|f(x\theta(x)) - L| < \varepsilon|$, čime je dokazano da je

$$\lim_{x\to 0} f(x\theta(x)) = L .$$

Da obrnuta implikacija ne važi, pokazaćemo na primeru:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad \theta(x) = \frac{1}{[1/x]\pi x} \qquad (|x| < 1/2).$$

Ovde očigledno ne postoji granična vrednost funkcije $x \mapsto f(x)$ kad $x \to 0$; međutim, kad $x \to 0$ imaćemo da je

$$\lim_{x\to 0} f(x\theta(x)) = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{[1/x]\pi}\right) = \lim_{x\to 0} \sin[1/x]\pi = 0 .$$

1294. Neka je funkcija f diferencijabilna na $[a, b]$, gde je $a < b$ i $ab > 0$. Dokazati da postoji $c \in (a, b)$ tako da važi

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c) .$$

1295. Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ $(a < b)$ i diferencijabilna na (a, b). Ako f nije oblika $f(x) = \alpha x + \beta$, tada u intervalu (a, b) postoji tačka c tako da je

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| .$$

Dokazati.

Da li tvrđenje važi i ako se znak ">" zameni sa "<"?

1296. Ako funkcija f ima konačan drugi izvod na $[a,b]$ i ako je $f'(a) = f'(b) = 0$, dokazati da tada postoji tačka $c \in (a,b)$, tako da je

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

1297. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna u intervalu (a,b) i neka je, za fiksirano $c \in (a,b)$, $f''(c) \neq 0$. Dokazati da u intervalu (a,b) postoje tačke x i y tako da važi

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

1298. Ako je funkcija f dva puta diferencijabilna na $(a,+\infty)$ i ako je

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

dokazati da tada postoji tačka $c \in (a,+\infty)$ tako da je $f''(c) = 0$.

8.2.6 Ispitivanje funkcija

1299. Ispitati funkciju $y = f(x)$ i nacrtati njen grafik ako je

$$f(x) = 2\frac{x \log|x|}{1 - 2\log|x|}.$$

Rezultat. Funkcija je neparna, definisana za $x \neq 0, \pm\sqrt{e}$. Kad $x \to 0$, $f(x) \to 0$. Za $x > 0$: vertikalna asimptota $x = \sqrt{e}$, lokalni minimum za $x = e^{-1/2}$, lokalni maksimum za $x = e$; prevojna tačka za $x = e^{5/2}$.

1300. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 + 2x}e^{1/x}.$$

a) Dokazati da je

$$f(x) = Ax + B + \frac{C}{x} + o(1/x) \qquad (x \to +\infty),$$

gde su A, B, C konstante koje treba odrediti.

b) Ispitati datu funkciju i nacrtati njen grafik.

Rezultat. **a)** $A = 1, B = 1/2, C = 1/4$. **b)** Vertikalne asimptote $x = 0, x = -1/2$, kosa asimptota $y = x + 1/2$. Lokalni ekstremumi u tačkama $\pm\sqrt{2}/2$. $f'_-(0) = 0$. Konkavna za $x \in (-\infty, -1/2)$, konveksna u ostalim tačkama u kojima je definisana.

1301. Ispitati funkciju

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}.$$

Rezultat. Definisana za svako $x \in \mathbf{R}$. Horizontalne asimptote $y = \pm\pi/4$. Prvi izvod je

$$y' = \frac{2}{2x^2 + 4x + 4} \operatorname{sgn}(x + 2) \quad (x \neq -2).$$

U tački $x = -2$ nema izvod (levi izvod je $-1/2$, desni $1/2$). Opada za $x \in (-\infty, -2)$, dalje raste. Prevojna tačka $x = -1$. Konveksna za $x \in (-2, -1)$, konkavna za $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

1302. Data je familija krivih

$$(x^2 + x + 1)y = (x - a)^3, \tag{1}$$

gde je $a \in \mathbf{R}$. **a)** Za $a = 1$ ispitati funkciju $y = y(x)$. **b)** Odrediti skup prevojnih tačaka datih krivih za razne vrednosti parametra a.

Rezultat. **a)** Definisana i neprekidna za svako $x \in \mathbf{R}$. Kosa asimptota $y = x - 4$. Rastuća za svako $x \in \mathbf{R}$. Prevojne tačke za $x = 1, -2$ i $-1/2$.

b) Diferenciranjem izraza (1) dva puta po x, nalazimo da je

$$y'' = \frac{6(x - a)(x^2 a(a + 1) + x(a^2 + 3a + 1) + a + 1)}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

Odavde se dobijaju apscise prevojnih tačaka:

$$x_1 = a, \quad x_2 = -\frac{1}{a + 1}, \quad x_3 = -\frac{a + 1}{a} \qquad (a \neq 0, a \neq -1),$$

odnosno

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \qquad (a = 0 \text{ ili } a = 1).$$

1303. Neka je $y = f(x)$ dva puta diferencijabilna funkcija za $x \geq 0$, $f(0) = 0$ i neka je $f'(x)$ rastuća funkcija za $x > 0$. Dokazati da je funkcija $y = g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ rastuća za $x > 0$.

Rešenje. Imamo da je

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

Kako je $h'(x) = xf''(x) > 0$ za $x > 0$, zaključujemo da je h rastuća funkcija na $(0, +\infty)$, odnosno da je, za $x > 0$, $h(x) > h(0) = 0$. Odavde je $g'(x) > 0$ za $x > 0$, pa je g monotono rastuća funkcija.

1304. Odrediti kosu asimptotu funkcije date sa

$$y = (x - 3)e^{1/(x+1)}.$$

Rezultat. Kako je, kad $x \to +\infty$, $y = x - 2 - \frac{7}{2x} + o(1/x)$, kosa asimptota je prava $y = x - 2$.

1305. Data je funkcija $f(x) = (1/16)^x$. Pokazati da na intervalu $(0, +\infty)$ postoji inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \log_{1/16} x$. Koliko rešenja ima jednačina

$$f(x) = f^{-1}(x)\ ?$$

Skicirati grafike funkcija f i f^{-1}.

Rešenje. Data jednačina ima (bar) tri rešenja. Naime, neposredno se proverava da su njena rešenja $x_1 = 1/4$ i $x_2 = 1/2$. Treće rešenje je apscisa zajedničkog preseka krivih $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ sa pravom $y = x$.

1306. Neka je $f(x) = q^{-x}$, gde je $q > 1$. U koliko tačaka se seku krive $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$?

Rezultat. Za $1 < q \leq e^e$ seku se u jednoj tački; za $q > e^e$ seku se u tri tačke.

1307. Da li postoje dve monotono rastuće i konveksne funkcije čiji se grafici seku u beskonačno mnogo tačaka ?

Rezultat. Da. Takve su, na primer, funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 + \sin x$ koje se seku u tačkama $M_k(k\pi, k^2\pi^2)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Obe funkcije su monotono rastuće i konveksne na $[0, +\infty)$.

Skicirati grafike ovih funkcija.

1308. Ispitati funkcije i nacrtati njihov grafik:

$$f(x) = e^{-1/x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0, \qquad g(x) = xf(x).$$

Dokazati da funkcija f ima u nuli minimum i da funkcija g u nuli nema ekstremum, iako je $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ za svako $k = 0, 1, \ldots$

Uputstvo. Videti zadatak 539.

1309. Naći asimptote krive

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \qquad (x > 0).$$

Rezultat. Kosa asimptota $y = x/e + 1/2e$.

1310. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$.

a) Dokazati da se data funkcija može prikazati u obliku

$$f(x) = Ax + B + \frac{C}{x} + o(1/x^2) \qquad (x \to +\infty).$$

b) Ispitati datu funkciju.

Rezultat. **a)** $A = 1, B = 0, C = 4/3$

b) $y = 0$ za $x = 0$. Vertikalna asimptota $x = \sqrt[3]{4}$. Kosa asimptota (obostrana) $y = x$. Ekstremumi: $f(0) = 0$, lokalni maksimum, $f(2) = 2\sqrt[3]{2}$, lokalni minimum. Prevojna tačka $x = -\sqrt[3]{4}$.

1311. Ispitati funkciju

$$f(x) = 2x - \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

i nacrtati njen grafik.

Rezultat. $y = 0$ za $x = \log(\sqrt{2}-1)$. Vetikalna asimptota $x = 0$. Kosa asimptota $y = 2x$. Lokalni minimum u tački $x = \log(1+\sqrt{2})$. Konveksna za svako $x \in \mathbf{R}$.

1312. Ispitati da li za krivu

$$y = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}$$

važi jednakost $R = 2\sin\alpha$, gde je R poluprečnik krivine date krive u tački M čija je apscisa x, dok je α ugao koji tangenta u M gradi sa x-osom.

Rešenje. Iz jednačine date krive dobijamo

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,, \quad y''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,.$$

Prema tome, poluprečnik krivine u tački $M(x, y)$ je

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = 2\sqrt{x}\,.$$

S druge strane, ako je α ugao koji (orijentisana) tangenta u tački M gradi sa x-osom, onda je $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$ i $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, pa je

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{x} = \frac{1}{2}R,$$

što je i trebalo dokazati.

1313. a) U tački (x_0, y_0) krive $y = f(x)$ konstruisana je tangenta koja seče koordinatne ose u tačkama $(x_1, 0)$ i $(0, y_1)$. Izračunati površinu tako dobijenog trougla.

b) U kojoj tački elipse

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

treba postaviti tangentu da bi ona sa koordinatnim osama obrazovala trougao najmanje površine?

Rezultat. a) Površina trougla koji tangenta obrazuje sa koordinatnim osama je

$$P = \frac{1}{2}|x_1 y_1| = \frac{1}{2}\left|-x_0^2 f'(x_0) + 2x_0 y_0 - \frac{y_0^2}{f'(x_0)}\right|.$$

Ovaj izraz može se napisati i u obliku

$$P = \frac{1}{2}\left(x_0\sqrt{|f'(x_0)|} - \operatorname{sgn}(f'(x_0)) \cdot \frac{y_0}{\sqrt{|f'(x_0)|}}\right)^2.$$

b) U tački $(2, 1)$.

1314. Date su krive

$$(C_1)\quad y^2 = 2p(x-a) \quad \text{i} \quad (C_2)\quad y = e^{(b-x)/p},$$

gde su $a, b, p \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$. Dokazati da se date krive seku pod pravim uglom.

Rešenje. Iz (C_1), diferenciranjem obe strane po x, imamo da je $2yy' = 2p$, tj, $y_1 = p/y_1'$. Iz (C_2) se dobija $y_2 = -py_2'$. U tački preseka ove dve krive, y-koordinate su jednake, odakle je $y_2' = -1/y_1'$, što znači da se krive seku pod pravim uglom.

Ostaje još da se pokaže da se krive zaista seku za sve dozvoljene vrednosti parametara. Pretpostavimo najpre da je $p > 0$. Tada je kriva C_1 definisana za $x > a$ i njena jednačina je $y_1 = \sqrt{2p(x-a)}$. Kriva C_2 je monotono opadajuća. Neka je $f(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Tada je

$$f(a) = -y_2(a) < 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНВ. БР. 27673
БИБЛИОТЕКА

i zbog neprekidnosti funkcije f, u intervalu $(a, +\infty)$ postoji tačka x_0 takva da je $f(x_0) = 0$; to je tačka preseka krivih C_1 i C_2.

Neka je sada $p < 0$. U ovom slučaju, kriva C_1 je definisana za $x < a$, dok je C_2 monotono rastuća funkcija. Kako je

$$f(a) = -y_2(a) < 0\,, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\,,$$

kao i u prethodnom slučaju, funkcija f ima nulu u intervalu $(-\infty, a)$. Time je dokaz završen.

8.2.7 Polinomi

1315. a) Da li se može odrediti $a \in \mathbf{R}$ tako da jednačina

$$x^4 - 15x^2 + ax - 12 = 0$$

ima četiri različita realna korena?

b) Odrediti a tako da ova jednačina ima bar jedan dvostruki koren, a zatim rešiti jednačinu.

Uputstvo. Broj realnih rešenja date jednačine jednak je broju preseka krive $y = x^4 - 15x^2$ sa pravom $y = 12 - ax$.

1316. Odrediti $a \in \mathbf{R}$ tako da jednačina

$$x^4 - 4x^2 + 4ax - 1 = 0$$

ima četiri različita realna rešenja.

8.2.8 Funkcionalne jednačine

1317. Naći sve funkcije f, neprekidne na $\mathbf{R}$, koje za svako x, y zadovoljavaju jednakost

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\,. \tag{1}$$

Primedba. Problemi ovog tipa, u kojima treba odrediti funkciju koja zadovoljava neku jednakost, nazivaju se **funkcionalne jednačine**. Jednačina (1) je najpoznatija i najstarija funkcionalna jednačina, i poznata je pod nazivom CAUCHYjeva **funkcionalna jednačina**.

Rešenje. Funkcija $x \mapsto Cx$, gde je C proizvoljna konstanta, očigledno zadovoljava jednakost (1). Dokazaćemo da je to i jedino neprekidno rešenje [1].

[1] Postoje i rešenja ove jednačine koja nisu neprekidna.

1° Ako u (1) stavimo $x = y$, dobićemo $f(2y) = 2f(y)$. Dalje je $f(3y) = f(y+2y) = f(y) + f(2y) = f(y) + 2f(y) = 3f(y)$. Primenom matematičke indukcije, nije teško pokazati da je

$$f(ny) = nf(y) \qquad (y \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}) . \tag{2}$$

2° Neka su m, n proizvoljni prirodni brojevi. Iz (2) sleduje

$$f\left(n\frac{y}{m}\right) = nf\left(\frac{y}{m}\right), \tag{3}$$

dok iz

$$f(y) = f\left(m\frac{y}{m}\right) = mf\left(\frac{y}{m}\right)$$

dobijamo

$$f\left(\frac{y}{m}\right) = \frac{1}{m}f(y) . \tag{4}$$

Kombinovanjem (3) i (4), imamo da je

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = \frac{m}{n}f(y) \qquad (y \in \mathbf{R}, m, n \in \mathbf{N}) . \tag{5}$$

3° Neka su sada x i y proizvoljni realni brojevi. Neka je x_k niz racionalnih brojeva koji konvergira ka x (takav niz postoji za svaki realan broj). Na osnovu (5) zaključujemo da za svako $k \in \mathbf{N}$ važi

$$f(x_k y) = x_k f(y) .$$

Ako ovde pustimo da $k \to +\infty$, zbog neprekidnosti funkcije f imaćemo da je $\lim f(x_k y) = f(xy)$, tako da dobijamo

$$f(xy) = xf(y) \qquad (x, y \in \mathbf{R}) \tag{6}$$

Stavimo u (6) da je $y = 1$, i neka je $f(1) = C$. Tada imamo

$$f(x) = Cx ,$$

što je i trebalo dokazati.

1318. Dokazati: Ako je funkcija f definisana i neprekidna na $\mathbf{R}$ i ako za svako $x \in \mathbf{R}$ i za svako $h > 0$ važi

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = 0 , \tag{1}$$

tada je $f(x) = ax + b$, gde su a i b realne konstante.

1319. Naći sva neprekidna rešenja funkcionalne jednačine

$$f(x+y) = f(x)f(y) .$$

Uputstvo. Jedno rešenje ove jednačine je funkcija $f(x) = 0$; drugo je $f(x) = e^{Cx}$. Jedinstvenost ovih rešenja se može pokazati tako što se najpre pokaže da je $f(x) > 0$ za svako x, a zatim se data jednačina logaritmuje, čime se svodi na funkcionalnu jednačinu iz zadatka 1317.

1320. Naći sve neprekidne funkcije $x \mapsto f(x)$, koje za svako $x, y \in \mathbf{R}$ zadovoljavaju jednakost

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) .$$

Uputstvo. Datu jednačinu zadovoljavaju funkcije $f(x) = \cos Cx$, $f(x) = \operatorname{ch} Cx$, gde je C proizvoljna konstanta, kao i funkcija $f(x) = 0$. Da su to jedina rešenja može se pokazati ako se razmatraju posebno slučajevi $f(1) = 0$, $0 < f(1) \leq 1 \Rightarrow f(1) = \cos C$, $f(1) > 1 \Rightarrow f(1) = \operatorname{ch} C$. Prvi slučaj dovodi do funkcije $f(x) = 0$, dok se drugi i treći slučaj rešavaju slično kao u zadatku 1317.

1321. Odrediti sve funkcije f za koje važi:

1°. $f(ax) = a^2 f(x)$ za svako $a \in \mathbf{R}$ i za svako $x \in \mathbf{R}$,

2°. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Rezultat. $f(x) = 6x^2$.

SRINIVASA RAMANUJAN (1887–1920), Indijac koji je imao izvanredne sposobnosti računanja napamet, tvrdio je da je $\exp(\pi\sqrt{163})$ "skoro ceo" broj. U to vreme, početkom ovog veka, nije bilo računskih mogućnosti da se ovo proveri. Pomoću programa *Derive* dobili smo da je

$$\exp(\pi\sqrt{163}) = 262537412640768743.99999999999992500725971\ldots$$

8.3 Integrali

1322. Izračunati $\int \frac{\log(x^2+x+1)}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

$$[\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \tfrac{(x^2+2)\log(x^2+x+1)}{4x^2} + \tfrac{\log|x|}{2} + \tfrac{(\pi\sqrt{3}+3)x-3}{6x} + C\ ]$$

1323. Dokazati da je

a) $\int \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x\,, x \neq 0 = |x| + C\,,$

b) $\int [x]\,\mathrm{d}x = \frac{[x]([x]+1)}{2} + C,$

c) $\int (-1)^{[x]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x) + C\,.$

1324. Neka je P_n polinom stepena n. Naći integral

$$\int \frac{P_n(x)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^m}\,, \qquad (a \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N}).$$

Uputstvo. Primeniti TAYLOROvu formulu za polinom P_n u okolini tačke a.

1325. Pomoću određenih integrala naći granične vrednosti

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right),$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\,.$

Rešenje. a) Neka je S_n zbir čiju graničnu vrednost treba naći. Očigledno je

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\,.$$

Ovde prepoznajemo integralnu sumu za funkciju $f(x) = x$ na $[0,1]$, koja se dobija kada se uzmu podeone tačke $x_k = k/n, k = 0,1,\ldots,n$ i u svakom od dobijenih intervala vrednost funkcije se računa u levoj krajnjoj tački. Stoga je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

b) Neka je X_n niz čija se granična vrednost traži. Tada je

$$S_n = \log X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k - \log n = \sum_{k=1}^{n}\left(\log\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\,.$$

Ovde prepoznajemo integralnu sumu za integral funkcije $x \mapsto \log x$ na $[0,1]$, koja se dobija ekvidistantnom podelom, sa izračunavanjem vrednosti funkcije u desnim tačkama intervalâ. Prema tome,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \log x \, dx = -1 .$$

Odavde je

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = e^{-1} .$$

1326. Primenom određenih integrala naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ $[\log 2]$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$ $[\frac{\pi}{4}]$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $p>0$ $[\frac{1}{p+1}]$

1327. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$, gde je

$$X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right) \sin\frac{k\pi}{n^2} .$$

Rešenje. Niz X_n čiju graničnu vrednost tražimo ne može se neposredno napisati u obliku integralne sume. Ako bismo, umesto $\sin\frac{\pi}{n^2}$ imali samo $\frac{\pi}{n^2}$, odgovarajuća ♣ suma bi bila

$$S_n = \pi \sum_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} ,$$

a ovo je integralna suma za integral

$$\pi \int_0^1 (1+x)x \, dx = \frac{5\pi}{6} .$$

Kako je $\sin t = t + o(1/t^2)$, $(t \to 0)$, imamo da je

$$X_n - S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot o(1/n^4) = \sum_{k=1}^{n-1} o(1/n^4) = o(1/n^3) \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

odakle se dobija da je

$$\lim X_n = \lim S_n = \frac{5\pi}{6} .$$

1328. Naći granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$ $\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}}{n+\frac{1}{k}}$ $\left[\frac{1}{\log 2}\right]$

1329. Pokazati da je

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(e^{t/2^k}+e^{-t/2^k}\right)=\frac{e^t-e^{-t}}{2t}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{t}{2^k}=\frac{\sin t}{t}$.

Uputstvo. a) Pokazati da je

$$\prod_{k=1}^{n}\left(e^{t/2^k}+e^{-t/2^k}\right)=\sum_{k=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1}e^{(2k+1)/2^n}.$$

1330. Data je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}1\,, & x\in(-\infty,0)\\ x+1\,, & x\in[0,1)\\ 2x\,, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

Naći primitivnu funkciju date funkcije na $(-\infty,+\infty)$. Primenom NEWTON–LEIBNIZ-ove formule na intervalu $[-1,x]$ odrediti $\int_{-1}^{x}f(t)\ \mathrm{d}t$.

Rezultat.

$$F(x)=\begin{cases}x+C\,, & x\in(-\infty,0]\\ \frac{x^2}{2}+x+C\,, & x\in[0,1]\\ x^2+\frac{1}{2}+C\,, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{x}f(t)\ \mathrm{d}t=F(x)-F(-1)=\begin{cases}x+1\,, & x\in(-\infty,0]\\ \frac{x^2}{2}+x+1\,, & x\in[0,1]\\ x^2+\frac{3}{2}\,, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

1331. Izračunati integrale

a) $\int_{0}^{2}[e^x]\,\mathrm{d}x$. $[\,14-\log 7!\,]$

b) $\int_1^{n+1} \log[x]\,dx$, $n \in \mathbf{N}$. [$\log n!$]

c) $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\log x)]\,dx$ [$-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$]

1332. POISSONov integral J je definisan pomoću

$$J(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x\cos t + x^2)\,dt, \quad (x \neq 1)$$

a) Pokazati da je

$$2\pi\log(1 - |x|) \leq J(x) \leq 2\pi\log(1 + |x|)$$

i na osnovu toga dokazati da je $\lim_{x\to 0} J(x) = 0$.

b) Dokazati da je $J(x) = \frac{1}{2^n} J(x^{2^n})$, za svako $n \in \mathbf{N}$.

c) Dokazati da je $J(x) = 2\pi\log|x| + J(1/x)$.

d) Na osnovu prethodnih rezultata, dokazati da je

$$J(x) = 0 \quad (|x| < 1), \qquad J(x) = 2\pi\log|x| \quad (|x| > 1).$$

1333. Neka je

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}} \quad (a > b > 0).$$

a) Uvođenjem nove promenljive t pomoću

$$\sin x = \frac{2a\sin t}{(a+b) + (a-b)\sin^2 t},$$

dokazati da je $G(a,b) = G(a_1, b_1)$, gde je

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

b) Neka su nizovi a_n i b_n definisani pomoću

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Dokazati da je $G(a,b) = G(a_n, b_n)$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

c) Dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\frac{\pi}{2a_n} < G(a,b) < \frac{\pi}{2b_n},$$

i na osnovu toga zaključiti da je

$$G(a,b) = \frac{\pi}{2c},$$

gde je $c = \lim a_n = \lim b_n$ aritmetičko-geometrijska sredina brojeva a i b (videti zadatak 254).

1334. Dokazati da je

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\ \mathrm{d}t = C, \tag{1}$$

gde je C konstanta koju treba odrediti.

Rešenje. Neka je $f(x)$ funkcija sa leve strane jednakosti (1).

I način: Funkcija f može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\sin^2 x} \arccos\sqrt{t}\ \mathrm{d}t + \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\sin^2 x} (\arccos\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t})\ \mathrm{d}t + \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\ \mathrm{d}t \\ &= I_1(x) + I_2(x), \end{aligned}$$

gde I_1 i I_2 imaju očigledno značenje.

Kako je, za svako $t \in [0,1]$,

$$\arccos\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t} = \frac{\pi}{2},$$

(videti zadatak 119 na strani 42), imamo da je

$$I_1(x) = \int_0^{\sin^2 x} \frac{\pi}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sin^2 x.$$

Ako u integralu $I_2(x)$ uvedemo smenu $t = 1 - u$, nalazimo da je

$$I_2(x) = \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\ \mathrm{d}t = \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{1-u}\ \mathrm{d}u.$$

Odavde je

$$I_2(x) = \frac{1}{2}\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} (\arccos\sqrt{t} + \arccos\sqrt{1-t})\ \mathrm{d}t.$$

Kako je, za $t \geq 0$,

$$\arccos\sqrt{1-t} = \arccos\sqrt{1-(\sqrt{t})^2} = \arcsin\sqrt{x}\ ,$$

integral I_2 postaje

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \frac{1}{2}\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} (\arccos\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t})\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \frac{\pi}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}(\cos^2 x - \sin^2 x)\ . \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} f(x) = I_1(x) + I_2(x) &= \frac{\pi}{2}\sin^2 x + \frac{\pi}{4}(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{\pi}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{\pi}{4}\ . \end{aligned}$$

Redigovano prema rešenju Željke Buturović.

II način: Kako su funkcije $x \mapsto \cos^2 x$ i $x \mapsto \sin^2 x$ periodične sa periodom π, dovoljno je da pokažemo da je $f(x) = C$ za $x \in [0, \pi]$. Izvod funkcije f je

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\cos x \sin x \arccos|\cos x| + 2\sin x \cos x \arcsin|\sin x| \\ &= \sin 2x(\arcsin|\sin x| - \arccos|\cos x|)\ . \end{aligned}$$

Za $x \in [0, \pi]$, imamo da je

$$\arcsin|\sin x| = \arcsin\sin x = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2] \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi]\ . \end{cases}$$

Nije teško videti da je, za $x \in [0, \pi/2]$,

$$\arccos|\cos x| = \arccos\cos x = x\ ,$$

dok je, za $x \in [\pi/2, \pi]$

$$\arccos|\cos x| = \arccos(-\cos x) = \arccos\cos\underbrace{(\pi - x)}_{\in[0,\pi/2]} = \pi - x.$$

Prema tome, za $x \in [0, \pi]$ važi jednakost

$$f'(x) = \sin 2x(\arcsin|\sin x| - \arccos|\cos x|) = 0\ .$$

Na osnovu dokazanog, $f(x) = C$ za svako $x \in [0, \pi]$, a zbog periodičnosti funkcije f, ova jednakost važi i za svako $x \in \mathbf{R}$.

Konstantu C ćemo odrediti ako nađemo $f(x)$ za neko x. Na primer, za $x = \pi/4$ imamo da je $\cos^2 x = \sin^2 x = 1/2$, pa je

$$C = f(\pi/4) = \int_0^{1/2} (\arccos\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t})\ \mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\ \mathrm{d}t = \pi/4\ .$$

1335. Ako je n prirodan broj, izračunati

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \cos nx\ \mathrm{d}x\ .$$

Rešenje. **I način:** Uvođenjem smene $x = \pi - t$, dobijamo ♣

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{x}{2}} \cos nx\ \mathrm{d}x\ .$$

Kako je podintegralna funkcija neparna, integral je jednak nuli za svako $n \in \mathbf{N}$.
II način: Primenom formule ♣

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\ ,$$

(videti zadatak 100 na strani 35), imamo da je

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right) \cos nx\ \mathrm{d}x\ .$$

Kako je, za svaki ceo broj $m \neq 0$, $\int_0^{2\pi} \cos mx\ \mathrm{d}x = 0$, nalazimo, redom:

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos nx\ \mathrm{d}x \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\big)\ \mathrm{d}x = 0\ . \end{aligned}$$

1336. Izračunati integral $\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\ \mathrm{d}x$.

[$\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$, primeniti EULERovu formulu.]

1337. Izračunati integral $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x\ \mathrm{d}x$.

$$\left[\ \frac{1-e^{-2a\pi}}{2^{2n}a}\left(\binom{2n}{n} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right)\ \right]$$

1338. Izračunati $\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{(-1)^{n-1}\pi}{4n}\right]$

1339. Izračunati integral $\int_{1+e^{-a}}^{1+e^{a}} \frac{\log^2(t-1)}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$, $(a>0)$. $\left[\frac{a^2}{3}.\right]$

1340. Na segmentu $[0,3]$ odrediti srednju vrednost funkcije

$$f(x)=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

Rezultat. $\bar{f}=\frac{4\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1341. Naći primer funkcije f tako da je funkcija $x\mapsto|f(x)|$ integrabilna na $[a,b]$, dok funkcija $x\mapsto f(x)$ nije integrabilna na $[a,b]$.

Rešenje. Funkcija f definisana pomoću

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ -1, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

zadovoljava postavljene uslove na proizvoljnom intervalu $[a,b]$. Naime, funkcija $x\mapsto|f(x)|\equiv 1$ je očigledno integrabilna, dok sama funkcija f nije integrabilna (videti zadatak 766).

1342. Dokazati: Ako je f integrabilna funkcija na svakom konačnom intervalu i ako je

(1) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=c\neq 0,$$

tada je

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\operatorname{sgn}c\cdot\infty.$$

Rešenje. Pretpostavimo da važi (1), sa $c>0$. Tada za dovoljno velike vrednosti t, recimo za $t>a>0$, važi $f(t)>c/2$. Prema tome, za $x>a$ imamo

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t>\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{c}{2}\,\mathrm{d}t$$

(3) $$=\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{cx}{2}$$

Prvi sabirak u (3) je konačan, jer smo pretpostavili da je f integrabilna funkcija. Drugi sabirak teži ka $+\infty$, pa je (2) dokazano.

Za $c<0$, dokaz je analogan.

1343. Ako je integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergentan i ako je f monotona funkcija, tada je $f(x) = O(1/x)$ $(x \to +\infty)$. Dokazati.

1344. Neka je funkcija f monotona na $(0, a)$ i neka postoji $\int_0^a x^p f(x)\,\mathrm{d}x$ (kao RIEMANNov ili nesvojstveni integral). Dokazati da je tada

$$\lim_{x \to 0_+} x^{p+1} f(x) = 0\,.$$

1345. Neka je funkcija f neograničena u okolini tačke $c \in (a, b)$ i neka je nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergentan. Da li se ovaj integral može dobiti kao granična vrednost integralnih suma, kao u definiciji RIEMANNovog integrala?

1346. Neka je funkcija f monotona na $(0, 1]$ i neograničena u okolini tačke $x = 0$. Ako postoji nesvojstveni integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, tada je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokazati.

1347. Neka je f neprekidna funkcija na $[0, +\infty)$ i neka je $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Naći $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x$.

Uputstvo. Pokazati da je

$$\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x}{t}\,,$$

a zatim primeniti L'HOSPITALovo pravilo.

1348. Neka je f nepekidna i pozitivna funkcija. Dokazati da je funkcija g definisana pomoću

$$g(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

monotono rastuća za $x \geq 0$.

1349. Dokazati: Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ $(a<b)$, i ako je

$$\int_a^b |f(x)|\,dx > 0\,, \tag{1}$$

tada postoje tačke $\alpha,\beta\in[a,b], \alpha<\beta$ tako da $f(x)\neq 0$ za svako $x\in[\alpha,\beta]$.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj, da u svakom intervalu $[\alpha,\beta]\in[a,b]$ postoji tačka x tako da $f(x)=0$. Dokazaćemo da je tada integral u (1) jednak nuli.

Uočimo jedan niz integralnih podela za integral u (1), u kome su podeone tačke definisane sa

$$x_0=a\,,\ x_i=a+(b-a)\frac{i}{n}\quad (i=1,\dots,n)\,.$$

Prema našoj pretpostavci, u svakom intervalu $[x_{i-1},x_i]$ postoji tačka $\xi_i=\xi_{i,n}$ za koju je $f(\xi_{i,n})=0$. Zbog integrabilnosti funkcije $|f|$,

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_{i,n})|\frac{1}{n}=0\,,$$

čime je dokaz završen.

1350. Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ $(a<b)$, i ako je

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=0\,, \tag{1}$$

tada je $f(x)=0$ za svako $x\in[a,b]$. Pokazati na primeru da ovo tvrđenje ne važi ako f nije neprekidna u svim tačkama intervala $[a,b]$.

Rešenje. Pretpostavićemo suprotno, tj, da postoji tačka $x_0\in[a,b]$, tako da $f(x_0)\neq 0$. Dokazaćemo da tada ni (1) ne važi i da je integral pozitivan.

Ako $f(x_0)\neq 0$, na osnovu osobina neprekidnih funkcija postoji jedan interval $[\alpha,\beta]$ koji sadrži tačku x_0 i u kome je $f(x)\neq 0$, pa je u tom intervalu $|f(t)|>0$. Tada je

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx>0\,. \tag{2}$$

Bez gubitka opštosti možemo smatrati da je $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ (objasniti zašto). Odavde je

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^\alpha |f(x)|\,dx+\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx+\int_\beta^b |f(x)|\,dx>0\,,$$

jer su prvi i treći integral nenegativni (kao integrali nenegativne funkcije), a drugi integral je pozitivan na osnovu (2).

Ovim je dokaz završen.

1351. Izračunati $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \log x}{(x^4+1)^3}\,\mathrm{d}x$. $[-\frac{1}{32}]$

1352. Izračunati $I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin^n x\,\mathrm{d}x$, $(a>0, n\in\mathbf{N})$.

Rezultat.

$$I_n(a) = \begin{cases} \dfrac{(2k)!}{\prod_{j=1}^{k}((2j)^2+a^2)} \cdot \dfrac{1}{a}, & \text{za } n=2k, \\ \dfrac{(2k+1)!}{\prod_{j=0}^{k}((2j+1)^2+a^2)} & \text{za } n=2k+1. \end{cases}$$

1353. Izračunati

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{ch}\,(x))^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Rezultat. $I_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} c_n$, gde je $c_n = 1$ za neparno n i $c_n = \pi/2$ za parno n.

1354. Za $n=2,3,\ldots$, izračunati

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\cdots+x^{2n-2}}.$$

Rešenje. Na konceptualnom nivou, ovaj zadatak ne sadrži posebne teškoće: potrebno je faktorisati polinom u imeniocu podintegralne funkcije, rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka, naći njihove integrale, i odrediti njihovu sumu. Međutim, svaki od ovih koraka je problem za sebe[1].

1° Nule polinoma $x \mapsto 1+x^2+\cdots+x^{2n-2}$ su rešenja jednačine[2]

$$x^{2n}-1 = (x^2-1)(1+x^2+\cdots+x^{2n-2}) = 0, \qquad x \neq \pm 1.$$

Prema tome, to su kompleksni brojevi

$$e^{\pm\frac{\pi i}{n}},\ e^{\pm\frac{2\pi i}{n}},\ \ldots\ e^{\pm\frac{(n-1)\pi i}{n}}.$$

Odavde se dobija faktorizacija

$$\begin{aligned} 1+x^2+\cdots+x^{2n-2} &= \prod_{k=1}^{n-1}(x-e^{\frac{k\pi i}{n}})(x-e^{-\frac{k\pi i}{n}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1). \end{aligned}$$

[1] Zadatak se može jednostavnije rešiti primenom kompleksne analize.
[2] Videti i rešenje zadatka 79.

Stoga je

$$(1)\qquad \frac{1}{1+x^2+\cdots+x^{2n-2}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k x + B_k}{x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1},$$

gde koeficijente A_k i B_k treba odrediti.

Uvedimo oznaku $\alpha_k = k\pi/n$. Tada (1) možemo da napišemo u obliku

$$(2)\qquad 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{A_k x + B_k}{x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1} \prod_{m=1}^{n-1} (x - e^{i\alpha_m})(x - e^{-i\alpha_m}) \right).$$

Ako se, za fiksirano k, u (2) pusti da $x \to e^{i\alpha_k}$, odnosno $x \to e^{-i\alpha_k}$, dobija se sistem jednačina

$$1 = (A_k e^{i\alpha_k} + B_k) \prod_{m\neq k} (e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_m})(e^{i\alpha_k} - e^{-i\alpha_m})$$
$$1 = (A_k e^{-i\alpha_k} + B_k) \prod_{m\neq k} (e^{-i\alpha_k} - e^{i\alpha_m})(e^{-i\alpha_k} - e^{-i\alpha_m}).$$

Sumiranjem uz pomoć svođenja na zbir geometrijske progresije, a zatim rešavanjem gornjeg sistema, nalazimo

$$A_k = -\frac{4\cos\alpha_k \sin^2\alpha_k}{n}, \quad B_k = \frac{2\sin^2\alpha_k}{n}.$$

2° Standardnim postupkom dobijamo

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha} + C,$$
$$\int \frac{x\,dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{arctg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha} + C.$$

3° Iz 1° i 2° nalazimo jednu primitivnu funkciju:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{2\cos\alpha_k \sin^2\alpha_k}{n}\log(x^2 - 2x\cos\alpha_k + 1) - \frac{2\sin\alpha_k\cos 2\alpha_k}{n}\operatorname{arctg}\frac{x - \cos\alpha_k}{\sin\alpha_k} \right).$$

4° Dokažimo da je $F(0) = 0$. Neka je

$$c_k = \frac{2\sin\alpha_k\cos 2\alpha_k}{n}\operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}.$$

Tada je

$$F(0) = -\sum_{k=1}^{n-1} c_k.$$

Nije teško videti da je $c_{n-k} = -c_k$, za $k = 1, 2, \ldots, n-1$; odavde je $F(0) = 0$ ako je n neparan broj. Ukoliko je n paran broj, od sume koja se pojavljuje u izrazu za $F(0)$ ostaje samo srednji član $c_{n/2}$, koji je takođe jednak nuli, jer je $\cos \alpha_{n/2} = \cos \pi/2 = 0$.

5° Na osnovu dosadašnje analize, zaključujemo da je vrednost integrala jednaka $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. Sada ćemo odrediti ovu graničnu vrednost. Posmatrajmo najpre sumu

$$S(x) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2 \cos \alpha_k \sin^2 \alpha_k}{n} \log(x^2 - 2x \cos \alpha_k + 1) ,$$

čiji ćemo k-ti clan označiti sa d_k. Zbog simetrije, na sličan način kao u 4°, imamo

$$d_k + d_{n-k} = -\frac{2 \cos \alpha_k \sin^2 \alpha_k}{n} \log \frac{x^2 - 2x \cos \alpha_k + 1}{x^2 + 2x \cos \alpha_k + 1} \to 0 \quad (\text{kad } x \to +\infty) .$$

U slučaju kada je n paran broj, lako se pokazuje da je srednji član $d_{n/2} = 0$.

Iz ovoga sleduje da suma $S(x)$ teži nuli kada $x \to +\infty$.

Kako se, za $k = 1, 2, \ldots, n-1$, brojevi α_k nalaze u intervalu $(0, \pi)$, imamo da je $\sin \alpha_k > 0$, pa je

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k} = \frac{\pi}{2} .$$

Na osnovu toga je

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \alpha_k \cos 2\alpha_k = -\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} .$$

U zadatku 101 je dokazano da je

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} = -\frac{\cos(\pi/2n)}{\sin(3\pi/2n)} .$$

Prema tome, vrednost datog integrala je

$$\frac{\pi}{n} \cdot \frac{\cos(\pi/2n)}{\sin(3\pi/2n)} .$$

*Zadatak je predložio dr Milan Dreševi*ć. *Redigovano prema rešenju Vladimira Baltića.*

1355. Da li je ispravno zaključiti da iz

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2 + x^2} = 0$$

sleduje da je

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{n}{n^2+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} 0\cdot dx = 0?$$

Rešenje. Nije. Naime, za svako n integral je jednak $\pi/4$.

1356. Konstruisati niz integrabilnih funkcija f_n i f koje ispunjavaju sledeće uslove:

1°. $(\forall n\in\mathbf{N})\quad \int_0^1 f_n(t)\,dt = 1,$

2°. $(\forall t\in[0,1])\quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t),$

3°. $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 1.$

Rešenje. Neka je niz funkcija f_n definisan sa $f_n(t) = (n+1)t^n$ za $t\in[0,1)$ i $f_n(1) = 0$. Za svako fiksirano $t\in(0,1)$, primenom STOLZove teoreme dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)t^n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{q^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^n(1-q)} = 0 \qquad \left(q=\frac{1}{q}\right).$$

Prema tome, za svako $t\in[0,1]$, $f_n(t)\to f(t)$, gde je $f(t)\equiv 0$.
S druge strane,

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = t^{n+1}\Big|_0^1 = 1\,,$$

za svako $n\in\mathbf{N}$, dok je $\int_0^1 f(t) = 0$.

1357. Konstruisati niz funkcija f_n i funkciju f koje ispunjavaju uslove iz prethodnog zadatka, ali na intervalu $(0,+\infty)$ umesto $[0,1]$.

Rešenje. Neka su funkcije f_n, f definisane sa

$$f_n(t) = n/(1+t)^{n+1}\,,\quad (t>0)\,,\quad f_n(0) = 0\,,\qquad f(t)\equiv 0\,.$$

Tada je

$$\int_0^\infty f_n(t)\,dt = 1,\quad \int_0^\infty f(t)\,dt = 0 \tag{1}$$

i za svako $t\geq 0$ važi da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)\,. \tag{2}$$

Navedimo još jedan primer: Funkcije f_n definisane su sa

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [n, n+1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Za ovaj niz funkcija takođe važe jednakosti (1) i (2), sa funkcijom $f(t) \equiv 0$.

1358. Dokazati da je $\lim I_n = 0$, gde je

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(n+2)x \, dx .$$

Rešenje. I način. Kako je $\cos x \geq 0$ za $x \in [0, \pi/2]$, imamo da je

$$|I_n| \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n x |\sin(n+2)x| \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = J_n .$$

Dalje treba dokazati da je $\lim J_n = 0$. Ovo može da se uradi kao u zadatku 829, ili da se ovaj integral efektivno izračuna (videti zadatke 834 i 835).

II način. Direktnim izračunavanjem integrala dobijamo

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin\big((n+1)x + x\big) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x \big(\sin(n+1)x \cos x + \cos(n+1)x \sin x\big) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \sin(n+1)x \, dx + \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin x \cos(n+1)x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \sin(n+1)x \, dx + \int_0^{\pi/2} \cos(n+1)x \, d\left(-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x\right) \\ &= \int_0^{\pi/2} d\left(\cos(n+1)x \cdot \left(-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x\right)\right) \\ &= \cos(n+1)x \left(-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

odakle nalazimo da je $\lim I_n = 0$.

1359. Naći

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Rešenje. Označimo dati integral sa I_n. Kako je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x},$$

imamo, za $0 < \delta < 1$:

$$|I_n| \le \left| \int_0^{1-\delta} x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{1-\delta}^{1} x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \mathrm{d}x \right|$$
$$\le (1-\delta)^n \sqrt{2} \int_0^{1-\delta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{2} \int_{1-\delta}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$
$$= 2\sqrt{2}(1-\delta)^n(1-\sqrt{\delta}) + 2\sqrt{2\delta}\,.$$

Ako ovde pustimo da $n \to +\infty$, dobijamo $0 \le \overline{\lim}\, |I_n| \le 2\sqrt{2\delta}$. Kako je $\delta > 0$ proizvoljno malo, iz poslednje nejednakosti proizilazi da je $\overline{\lim}\, |I_n| = 0$, pa je i $\lim I_n = 0$.

1360. Neka je $I_n = \int_0^1 x^n \arcsin x \, \mathrm{d}x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Izračunati I_n i dokazati da je $\{I_n\}$ monoton i ograničen niz, a zatim odrediti njegovu graničnu vrednost. **b)** Naći $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

O PROGRAMIMA DERIVE I MATHEMATICA

Rešenja mnogih zadataka u ovoj knjizi proverena su pomoću programa *Derive* i *Mathematica*. *Derive* je mali, ali efikasan program za diferenciranje, integraciju, rešavanje tipskih diferencijalnih jednačina i ostale rutinske operacije, sve u simboličkom obliku ("u opštim brojevima"). Izračunavanja u *Deriveu* su moguća sa proizvoljnom tačnošću.

Mathematica radi isto što i *Derive* i mnogo više. Ovo je u stvari jedan programski jezik, koji korisniku dopušta da ugradi svoje algoritme za rešavanje specifičnih problema. Na nekim univerzitetima u svetu, kursevi Matematike se izlažu uz podršku programa *Mathematica*.

Ovakvi programi, naravno, nisu svemoćni. Oni nas, u stvari, oslobađaju od rutinskih poslova, na sličan način kao što su nas kalkulatori oslobodili od izračunavanja. Ali, da bismo pravilno upotrebili ove programe, moramo znati šta se dešava.

Na primer, ako se postavi problem izračunavanja integrala (videti zadatak 876)

$$I = 2 \int_0^{3a} \frac{\sqrt{x}(3a-x)}{3\sqrt{a}} \sqrt{1 + \frac{(a-x)^2}{4ax}}\, \mathrm{d}x,$$

Mathematica (verzija 2.0) daje besmislen rezultat. Medjutim, ako se podintegralni izraz sredi,

$$I = \frac{1}{3a} \int_0^{3a} (3a-x)(a+x)\, dx\,,$$

dobijamo korektan odgovor $I = 3a^2$.

8.4 Redovi

8.4.1 Opšte osobine redova

1361. Neka su dati divergentni pozitivni redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Šta se može zaključiti o konvergenciji redova

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n) \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \max(a_n, b_n) \ ?$$

1362. Ako je pozitivan red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan, dokazati da je tada i red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ konvergentan. Pokazati na primerima da obrnuto ne važi.

1363. Ako su redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ konvergentni, dokazati da su konvergentni i redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^2 .$$

Rešenje. Neka je $\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right) = c < +\infty$. Primenom nejednakosti $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ dobijamo da je

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n b_n| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + \sum_{n=1}^{m} b_n^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2\right) = c,$$

pa je i red $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|$ konvergentan.

Kako je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \leq 2\left(c + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|\right),$$

zaključujemo da je i drugi red konvergentan.

1364. Ako je red $\sum a_n^2$ konvergentan, dokazati da je i red $\sum \frac{|a_n|}{n}$ konvergentan.

Uputstvo. Primeniti zadatak 1363.

1365. Ako je $\lim na_n = c \neq 0$, dokazati da je tada red $\sum a_n$ divergentan.

1366. Dokazati: Ako je niz a_n monotono opadajući i pozitivan, i ako je red $\sum a_n$ konvergentan, tada je $\lim na_n = 0$.

1367. Dokazati da za svako $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ i za svaki prirodan broj p važi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)\cdots(\alpha+p)}.$$

1368. U zavisnosti od realnog parametra $q \neq 1$ ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^n}}$$

i u slučajevima kada ovaj red konvergira, naći njegovu sumu.

Rešenje. Dati red možemo da predstavimo u obliku

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-q^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-q^{2^n}} \right),$$

odakle se vidi da je n-ta parcijalna suma reda jednaka

$$S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^{2^n}}.$$

Ako ovde pustimo da $n \to +\infty$, dobijamo da je suma reda jednaka $\frac{q}{1-q}$ ako je $|q| < 1$, dok je u slučaju kada je $|q| > 1$, suma reda jednaka $\frac{1}{1-q}$.

1369. Neka su a_n, b_n dati nizovi i neka je $B_n = b_1 + \cdots + b_n$. Dokazati **pravilo parcijalnog sumiranja**:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

8.4.2 Pozitivni redovi

1370. Neka su λ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ pozitivna rešenja jednačine $\operatorname{tg} x = x$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$. Da li konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$?

Rešenje. Nije teško videti da je $(n-1)\pi < \lambda_n < (n-1)\pi + \pi/2$. Prema tome, $\frac{1}{\lambda_n^2} = O(1/n^2)$ i red konvergira na osnovu poredbenog kriterijuma.

1371. Ispitati da li konvergira red

$$\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \cdots$$

Uputstvo. Uočiti da je $\sqrt{2} = 2\cos\pi/4$ i na osnovu toga pokazati da se opšti član reda može napisati u obliku $a_n = 2\sin(\pi/2^{n+1})$.

1372. Neka je $\{a_n\}$ pozitivan i monotono opadajući niz. Dokazati da su redovi

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{i} \quad (B) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

ekvikonvergentni.

Rešenje. Neka je red (B) konvergentan. Niz parcijalnih suma reda (A) je monotono rastući, pa je, za dokaz konvergencije, dovoljno dokazati da je jedan podniz ograničen (videti zadatak 262). Ovo je posledica nejednakosti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{n+1}} \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

i činjenice da su parcijalne sume reda (B) ograničene.

Obrnuto, neka je red (A) konvergentan. Tada iz nejednakosti

$$\frac{1}{2}(4a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^{n+1}a_{2^{n+1}}) \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{n+1}}$$

zaključujemo da je i red (B) konvergentan.

1373. Ispitati konvergenciju reda čiji je n-ti član

$$a_n = \operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2} - \sin\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Rezultat. Razvojem po MACLAURINovoj formuli nalazimo da je $a_n = -\frac{\pi}{4n-2} + o(1/n)$. Red divergira.

1374. Za koje $\alpha \in \mathbf{R}$ konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!)}{n^\alpha}$?

Rešenje. Za dovoljno veliko n važe nejednakosti

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{\log(n!)}{n^\alpha} < \frac{\log(n^n)}{n^\alpha} = \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} = v_n .$$

Kako red $\sum v_n$ konvergira za $\alpha > 2$ (integralni kriterijum), dati red takođe konvergira za $\alpha > 2$ na osnovu poredbenog kriterijuma. Red $\sum u_n$ divergira za $\alpha \leq 2$, tako da i dati red divergira za $\alpha \leq 2$.

1375. Da li je red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+1)} - 1\right)$ konvergentan?

Rešenje. Imamo da je

$$n^{1/(n^2+1)} - 1 = \exp\left(\frac{\log n}{n^2+1}\right) - 1 = O\left(\frac{\log n}{n^2+1}\right) = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right) .$$

Na osnovu integralnog kriterijuma, zaključujemo da red $\sum \frac{\log n}{n^2}$ konvergira, tako da i dati red konvergira na osnovu poredbenog kriterijuma.

1376. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{n^a} - 1\right)$ konvergira za $a < -1$ i da divergira za $a \geq -1$.

1377. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(\sin(1/n)))^2}$ divergira.

1378. Neka je $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$. Da li konvergira red $\sum a_n$?

Rešenje. Kako je

$$a_n > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2(n+1)} ,$$

dati red divergira.

1379. Ispitati da li konvergira red $\sum a_n$, gde je

a) $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$, **b)** $a_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$, **c)** $a_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$.

Rezultat. Sva tri reda konvergiraju.

1380. Ako se iz harmonijskog reda $\sum \frac{1}{n}$ izostave svi članovi $1/n$ takvi da broj n u dekadnom zapisu sadrži devetku, tada red sastavljen od preostalih članova konvergira. Dokazati.

Rešenje. Celih brojeva na segmentu $[10^{m-1}, 10^m - 1]$ čiji dekadni zapis ne sadrži devetku ima $8 \cdot 9^{m-1}$ (svaki od ovih brojeva ima m cifara; za prvu cifru ima 8 mogućnosti, a za svaku od preostalih $m-1$ ima 9 mogućnosti). Ako je S zbir reda opisanog u zadatku, tada je

$$S \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{8 \cdot 9^{m-1}}{10^{m-1}} = 80,$$

odakle sleduje da je suma reda konačna, pa je red konvergentan.

1381. Ako je pozitivan red $\sum a_n$ konvergentan, dokazati da postoji monotono neopadajući niz b_n, $\lim b_n = +\infty$, takav da i red $\sum a_n b_n$ konvergira.

Primedba. Prema ovom rezultatu, ne postoji najslabije konvergentan red, što znači da ne postoji ni najbolji kriterijum konvergencije pozitivnih redova.

1382. Neka je f neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na $[a, +\infty)$ za neko $a > 0$, tako da red $\sum f(n)$ konvergira. Dokazati da važe sledeće nejednakosti za ostatak reda posle n-tog člana:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (n > a).$$

Rešenje. Neka je F primitivna funkcija za datu funkciju f na $[a, +\infty)$. Iz pretpostavki o funkciji f imamo da je

$$f(k) \leq F(k) - F(k-1) \leq f(k-1), \qquad (k > a),$$

i sumiranjem ovih nejednakosti za $k = n+1, \ldots n+m$ dobijamo

$$(1) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+m} f(k) \leq F(n+m) - F(n) \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} f(k).$$

Ako u poslednjim nejednakostima pustimo da $m \to +\infty$, dobijamo tražene nejednakosti (U desnoj nejednakosti u (1) treba uvesti smenu $n \mapsto n+1$).

1383. Koliko članova reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ treba sabrati da bi greška izračunavanja sume bila manja od 10^{-3} ?

Rešenje. Na osnovu zadatka 1382, imamo da je

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2},$$

tj.

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Odavde nalazimo da treba sabrati najmanje 1000 članova. Pri tome će greška (tj. ostatak posle hiljaditog člana) biti u granicama između $1/1001 = 0.99 \cdot 10^{-3}$ i 10^{-3}.

1384. Pretpostavimo da treba izračunati približnu vrednost broja π sumiranjem redova[1]

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{ili} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Ako se u oba reda sumira isti broj prvih članova, koji red daje manju grešku?

1385. Neka je f neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija na $[1, +\infty)$, takva da red $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ divergira. Dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx + C + o(1), \quad (n \to +\infty),$$

za neko $C \in \mathbf{R}$.

Primenom ovog rezultata, izvesti jednakost kojom se definiše EULERova konstanta iz zadatka 919.

Rešenje. Neka je $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\,dt$. Prema pretpostavkama zadatka imamo da je

$$0 \leq f(k) - (F(k+1) - F(k)) \leq f(k) - f(k+1), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sumiranjem ovih nejednakosti za $k = 1, 2, \ldots, n$, dobija se

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n+1) \leq f(1) - f(n+1) < f(1).$$

Prema tome, niz

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n+1)$$

[1] Vrednosti ovih suma nalaze se iz teorije FOURIERovih redova.

je ograničen, a takođe je i monotono neopadajući (po konstrukciji). Neka je $C = \lim x_n$. Tada je $x_n = C + o(1)$ $(n \to +\infty)$, odakle se dobija tražena jednakost.

Ako izvedenu jednakost primenimo na $f(x) = 1/x$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n+1) + C + o(1) = \log n + C + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) + o(1)$$
$$= \log n + C + o(1),$$

gde je C EULEROva konstanta.

Primedba. Ako se sumira samo od nekog n_0, važi analogna formula:

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx + C + o(1).$$

1386. Neka je

$$\zeta(1+s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+s}}, \quad (s > 0). \tag{1}$$

Dokazati da je

$$\zeta(1+s) = \frac{1}{s} + \gamma + o(1), \qquad (s \to 0_+),$$

gde je γ EULEROva konstanta.

Primedba. Funkcija ζ, definisana pomoću (1) naziva se **Riemannova zeta funkcija**. Kako je red sa desne strane u (1) konvergentan za svako $s > 0$, a divergentan za $s \leq 0$, domen ove funkcije (po s) je $(0, +\infty)$. Zeta funkcija nije elementarna funkcija i njene vrednosti se mogu tačno izračunati samo u nekim tačkama (npr. $\zeta(2) = \pi^2/6$, videti zadatak 1384).

Rešenje. Neka je $r_n(s)$ ostatak reda u (1) posle n-tog člana. Primenom nejednakosti izvedenih u zadatku 1382, sa funkcijom $f(x) = 1/n^{1+s}$, nalazimo

$$\frac{1}{s(n+1)^s} \leq r_n(s) \leq \frac{1}{sn^s}.$$

Kako je $\zeta(1+s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{1+s}} + r_n(s)$, imamo da je

$$L_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1+s}} + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{(n+1)^s} - 1\right) \leq \zeta(1+s) - \frac{1}{s}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1+s}} + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{n^s} - 1\right) = D_n(s).$$

Ako sada, za fiksirano n, pustimo da $s \to 0_+$, dobijamo da je

$$\lim_{s\to 0_+} L_n(s) \le \liminf_{s\to 0_+}\left(\zeta(1+s)-\frac{1}{s}\right) \le \limsup_{s\to 0_+}\left(\zeta(1+s)-\frac{1}{s}\right) \le \lim_{s\to 0_+} D_n(s).$$

(Ovde pišemo lim inf i lim sup jer apriori ne znamo da li postoji granična vrednost.) Polazeći od definicije izvoda, imamo da je

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(a^s-1) = (a^s)'|_{s=0} = \log a.$$

Prema tome, granične vrednosti za $L_n(s)$ i $D_n(s)$ su

$$\lim_{s\to 0_+} L_n(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1),$$

$$\lim_{s\to 0_+} D_n(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n),$$

odakle nalazimo da je

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1) \le \liminf_{s\to 0_+}\left(\zeta(1+s)-\frac{1}{s}\right)$$
$$\le \limsup_{s\to 0_+}\left(\zeta(1+s)-\frac{1}{s}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n.$$

Kad $n \to +\infty$, leva i desna strana u poslednjim nejednakostima imaju istu graničnu vrednost i to je EULERova konstanta γ. Stoga je

$$\lim_{s\to 0_+}\left(\zeta(1+s)-\frac{1}{s}\right) = \gamma,$$

što je ekvivalentno sa tvrđenjem koje je trebalo dokazati.

1387. Dokazati da je funkcija

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

neprekidna na $(1,+\infty)$ i da ima neprekidne izvode proizvoljnog reda u svakoj tački intervala $(1,+\infty)$.

Rešenje. Red koji se dobija kada se dati red diferencira član po član p puta je

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log^p n}{n^x}.$$

Ovaj red je konvergentan za svako $x > 1$ (poredbeni kriterijum). Iz

$$\frac{\log^p n}{n^x} \leq \frac{\log^p n}{n^{x_0}} \quad \text{za } x \geq x_0$$

zaključujemo da je red (1) uniformno konvergentan u oblasti $(x_0, +\infty)$, za svako $x_0 > 1$ i za svako $p \in \mathbf{N}$.

Neka je sada $p = 1$ i neka je $x > 1$ fiksirano. Izaberimo x_0 tako da je $x > x_0 > 1$. Red (1) je uniformno konvergentan na $(x_0, +\infty)$, pa je

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}.$$

Kako su funkcije $x \mapsto \log n/n^x$ neprekidne u tački x i red uniformno konvergira, i njihova suma je neprekidna funkcija, tj. ζ' je neprekidna funkcija u tački x. Kako je $x > 1$ proizvoljno, zaključujemo da je ζ' neprekidna funkcija na $(0, +\infty)$.

Matematičkom indukcijom može se dalje dokazati da je $\zeta^{(p)}$ neprekidna funkcija, za svako $p \in \mathbf{N}$.

8.4.3 Redovi proizvoljnog znaka

1388. Ispitati konvergenciju redova

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n}$.

Rezultat. Red pod a) konvergira; red pod b) divergira.

1389. Da li je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + k^2})$ konvergentan?

1390. U zavisnosti od $p \in \mathbf{R}$, ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

Rezultat. Konvergira apsolutno za $p > 1$, uslovno za $1/2 < p \leq 1$, divergira za $p \leq 1/2$.

1391. a) Ispitati za koje vrednosti parametara p i q red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \left(\frac{(p+1)^2}{2p}\right)^n.$$

konvergira (apsolutno ili uslovno), a za koje vrednosti divergira.

b) Ako je $q = 0$, naći sumu datog reda za one vrednosti p za koje je red apsolut konvergentan.

1392. Dokazati da je, za $p > 0$,

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) = (-1)^n a_n\,, \tag{1}$$

gde je $\{a_n\}$ pozitivan nula niz. Zatim pokazati da za $p \leq 1/2$ red čiji je op član dat izrazom sa leve strane u (1) divergira. Odavde zaključiti da niz a_n ni monotono opadajući za $p \leq 1/2$. Za koje $p > 0$ je ovaj niz monotono opadajući?

Uputstvo. Videti zadatak 954.

1393. Dokazati da red $\sum \sin n^2$ divergira.

1394. Dokazati neposredno da je

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1\,.$$

Rešenje. Oba reda su apsolutno konvergentna. Ako označimo sa a_n i b_n njihove opšte članove, tada je

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,,$$

gde je

$$c_0 = 1\,, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\,, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0\,,$$

imamo da je proizvod dva data reda jednak $c_0 = 1$.

1395. Dokazati da je

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) q^n\,,$$

gde je $|q| < 1$.

1396. Ispitati konvergenciju reda $\sum a_n$, gde je

a) $a_n = n^{1/(n+1)} - (n+1)^{1/n}$ [Konvergira]

b) $a_n = \left(1 - \alpha\frac{\log n}{n}\right)^n$ [Konvergira za $\alpha > 1$, divergira za $\alpha \leq 1$]

1397. Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ realan niz takav da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. Odrediti

$$\lim \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n}.$$

Rešenje. Imamo da je

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = S_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1} + S_n}{n},$$

gde je $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Neka je $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Kao u zadatku 231 nalazimo da je

$$\lim \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1} + S_n}{n} = S,$$

odakle dobijamo da je

$$\lim b_n = \lim S_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - S = 0.$$

1398. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, gde je

$$a_n = a^{-\sum_{i=1}^{n} 1/i}, \qquad a > 0$$

Rešenje. Imamo da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = a^{1/(n+1)} = e^{(\log a)/(n+1)} = 1 + \frac{\log a}{n} + O(1/n^2), \quad (n \to +\infty).$$

Ako je $\log a > 1$, tada red apsolutno konvergira, na osnovu GAUSSovog kriterijuma.

Ako je $0 < \log a \leq 1$, red uslovno konvergira, prema LEIBNIZovom kriterijumu.

Za $\log a < 0$, niz $\{a_n\}$ je monotono rastući za dovoljno veliko n, pa kako je pozitivan, ne može da teži nuli i red divergira.

Konačno, ako je $\log a = 0$, tj. $a = 1$, opšti član reda takođe ne teži nuli i red je divergentan.

Dakle, dati red apsolutno konvergira za $a > e$, uslovno konvergira za $1 < a \leq e$ i divergira za $0 < a \leq 1$.

1399. Neka je dat red $\sum(-1)^{n-1}a_n$, gde za niz pozitivnih brojeva $\{a_n\}$ va

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O(1/n^{1+\varepsilon}), \quad (n \to +\infty)$$

za neko $\varepsilon > 0$. Tada red apsolutno konvergira za $\lambda > 1$ i divergira za $\lambda < 1$. Ako je $\lambda = 1$, tada red apsolutno konvergira za $\mu > 1$, uslovno konvergira za $0 < \mu \leq 1$ i divergira za $\mu < 0$. Dokazati.

1400. Neka je $\{a_n\}$ proizvoljan niz realnih brojeva. Ako red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

konvergira za neko $x_0 \in \mathbf{R}$, dokazati da on konvergira za svako $x > x_0$.

1401. Dokazati da su redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

ekvikonvergentni za sve realne vrednosti $x \neq 0, 1, 2, \ldots$

1402. Dokazati da su redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

ekvikonvergentni za svako $x \neq \pm 1$.

8.4.4 Uniformna konvergencija nizova

1403. Ispitati da li niz funkcija

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

uniformno konvergira: **a)** na konačnom intervalu $[a, b]$, **b)** na $\mathbf{R}$.

Rezultat. **a)** Da. **b)** Ne.

1404. Neka je f funkcija definisana na $[a, b]$ i neka je

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dokazati da niz funkcija f_n konvergira ka funkciji f uniformno na $[a, b]$.

1405. Neka je

$$f_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

pri čemu funkcija f ima neprekidan izvod na (a, b). Dokazati da niz funkcija f_n uniformno konvergira ka funkciji f' na svakom zatvorenom intervalu $[\alpha, \beta]$, gde je $a < \alpha < \beta < b$.

Rešenje. Prema definiciji izvoda, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f'(x)$ za svako $x \in [a, b]$. Dalje, iz LAGRANGEove teoreme proizilazi da je, za svako $n \in \mathbf{N}$,

$$f_n(x) = f'(x + \theta_n(x)/n), \quad 0 < \theta_n(x) < 1.$$

Kako je funkcija f' neprekidna na (a, b), ona je i uniformno neprekidna na svakom zatvorenom intervalu $[\alpha, \beta]$, za $a < \alpha < \beta < b$. Prema tome, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $|f'(u) - f'(v)| < \varepsilon$ za svake dve tačke $u, v \in [\alpha, \beta]$ koje su na rastojanju manjem od δ. Za dovoljno veliko n, $\theta_n(x)/n$ je manje od δ; odavde zaključujemo da za dovoljno veliko n važi da je

$$|f'(x) - f'(x + \theta_n(x)/n)| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |f'(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [\alpha, \beta]),$$

što znači da je niz f_n uniformno konvergentan na $[\alpha, \beta]$.

1406. Dokazati da niz

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right),$$

gde je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, uniformno konvergira na $[a, b]$.

1407. Ako funkcije $u_n(x)$ imaju prekide na $[a, b]$, da li niz $\{u_n(x)\}$ može uniformno konvergirati ka neprekidnoj funkciji na $[a, b]$?

Rešenje. Može. Na primer, neka je $u(x) = 0$ ako je x iracionalan broj i $u(x) = 1$ za $x \in \mathbf{Q}$. Neka je $u_n(x) = u(x)/n$. Tada je $\lim u_n(x) = 0$ i konvergencija je uniformna na svakom intervalu $[a, b]$.

1408. Neka je funkcija f definisana na $\mathbf{R}$ i neka ima izvode proizvoljnog reda, pri čemu niz $f^{(n)}(x)$ konvergira ka nekoj funkciji φ uniformno na svakom konačnom intervalu (a, b). Dokazati da je $\varphi(x) = Ce^x$, gde je C proizvoljna konstanta.

1409. Neka su funkcije f_n definisane i ograničene na $\mathbf{R}$ i neka niz $\{f_n(x)\}$ konvergira ka $\varphi(x)$ uniformno na svakom zatvorenom intervalu $[a, b]$. Da li je tada

$$\lim_{n\to+\infty} (\sup_x f_n(x)) = \sup_x \varphi(x) \ ?$$

Rezultat. Jednakost ne mora da važi. Na primer, ona ne važi ako je $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

8.4.5 Funkcionalni redovi

1410. Dokazati da redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2x\left(n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)e^{-(n-1)^2x^2}\right) \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$$

imaju za $x \in [0,1]$ za sumu neprekidnu funkciju $f(x) \equiv 0$, iako nisu uniformno konvergentni.

1411. Dokazati da sledeći redovi nisu uniformno konvergentni:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ na $(0,+\infty)$,

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ na $(0,1)$.

1412. Naći primer reda koji uniformno konvergira na segmentu $[0,1]$, ali se njegova uniformna konvergencija ne može dokazati primenom WEIERSTRASSovog kriterijuma.

Rešenje. Neka je niz funkcija $x \mapsto u_n(x)$ definisan pomoću

$$u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \quad u_n(x) = 0 \text{ za } x \neq \frac{1}{n}, x \in [0,1].$$

Definišimo funkcionalni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Ako bi ovaj red zadovoljavao dovoljan uslov WEIERSTRASSovog kriterijuma, postojao bi konvergentan i pozitivan red sa opštim članom c_n, tako da je

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall x \in [0,1]) \quad u_n(x) < c_n. \tag{2}$$

Za $x = 1/n$, nejednakost (2) daje

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \quad c_n > \frac{1}{n},$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je red $\sum c_n$ konvergentan. Prema tome, uslov WEIERSTRASSovog kriterijuma nije ispunjen za ovaj red.

Dokazaćemo sada da je red (1) uniformno konvergentan na $[0,1]$.

Definišimo skupove A i B pomoću

$$A = \{x \in [0,1] \mid x = \frac{1}{n} \text{ za neko } n \in \mathbf{N}\}, B = [0,1] \setminus A.$$

Neka je $S_n(x)$ n-ta parcijalna suma posmatranog reda. Nije teško videti da je

$$S_n(x) = \begin{cases} x, & x \in A, n \geq 1/x \,, \\ 0, & x \in B, n \in \mathbf{N} \text{ ili } x \in A, n < 1/x \,. \end{cases}$$

Odavde zaključujemo da je, za svako fiksirano $x \in [0,1]$, suma reda data sa

$$S(x) = \begin{cases} x, & x \in A \,, \\ 0, & x \in B \,. \end{cases}$$

Za $x \in B$, imamo da je $S_n(x) = S(x)$ za svako n. Neka je $x \in A$. Tada je

$$|S_n(x) - S(x)| = \begin{cases} x, & n < 1/x, \\ 0, & n \geq 1/x \,. \end{cases} \tag{3}$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Za $x \in A$ i $0 < x < \varepsilon$, iz (3) nalazimo da je $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ za svako n. Ako je $x \geq \varepsilon$, tada je, za $n \geq 1/\varepsilon$, ova razlika jednaka nuli. Prema tome,

$$(\forall n \geq 1/\varepsilon)(\forall x \in [0,1]) \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \,,$$

iz čega sleduje da je red (1) uniformno konvergentan na $[0,1]$.

1413. Dokazati da je funkcija

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi n^2 x)$$

definisana za $x > 0$ i da za svako $x > 0$ ima konačne izvode proizvoljnog reda.

1414. Neka je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q} \,,$$

gde su p, q nenegativni brojevi od kojih je bar jedan veći od 1.

U žavisnosti od p i q, ispitati neprekidnost funkcije f.

Rezultat. Ako je $p < 1$, $q > 1$, $p + q \leq 2$, tada f ima prekid u nuli. U ostalim slučajevima je neprekidna na $\mathbf{R}$.

1415. Neka je $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 \log^2 n}$ $(x \in \mathbf{R})$. Dokazati da red kojim je definisana funkcija f konvergira za $x \geq 0$ i da divergira za $x < 0$. Zatim ispitati da li funkcija f ima neprekidan izvod na skupu $(0, +\infty)$.

1416. Dokazati da funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$$

ima sve izvode za svako $x \in \mathbf{R}$. Zatim formirati stepeni red čija je suma jednaka datoj funkciji.

Rezultat. $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (e^{2^{2k+1}} - 1)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

1417. Neka je $r_k, k = 1, 2, \ldots$ niz svih racionalnih brojeva segmenta $[0, 1]$. Neka je funkcija f definisana sa

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Dokazati da je funkcija f neprekidna na $[0, 1]$ i da ima konačan izvod u svim iracionalnim tačkama, dok u racionalnim tačkama nema izvod.

1418. Neka je $u(x)$ apsolutna vrednost razlike između x i najbližeg celog broja. Neka je $u_k(x) = \frac{u(4^k x)}{4^k}$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$. Definišimo funkciju f pomoću

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x). \tag{1}$$

Dokazati da je funkcija f neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$, ali nema izvod ni u jednoj tački.

Rešenje. Po definiciji funkcije u, imamo da je $0 \le u(x) \le 1/2$; stoga je $u_n(x) \le 1/(2 \cdot 4^n)$ i red u (1) uniformno konvergira na $\mathbf{R}$ prema WEIERSTRASSovom kriterijumu. Kako su funkcije u_k neprekidne, funkcija f je takođe neprekidna.

Dokažimo da data funkcija nema izvod ni u jednoj tački.

Funkcija u je periodična sa periodom 1 i linearna je u svakom intervalu oblika $[s/2, (s+1)/2]$, gde je s ceo broj. Funkcija u_k je periodična sa periodom $1/4^k$ i u svakom intervalu oblika $[s/(2 \cdot 4^k), (s+1)/(2 \cdot 4^k)]$ ova funkcija je linearna, sa izvodom 1 ili -1 (nacrtati grafik funkcije u_1, na primer!)

Neka je a fiksiran realan broj. Tada za svako n postoji ceo broj s_n takav da je

$$\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \le a < \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}.$$

U svakom od intervala

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}\right] \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

izaberimo tačku x_n takvu da je

$$|x_n - a| = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Očigledno je da $x_n \to a$ kad $n \to +\infty$. Pokazaćemo da ne postoji granična vrednost količnika $(f(x_n) - f(a))/(x_n - a)$ kad $n \to +\infty$.

Zbog periodičnosti funkcije u_k važi jednakost

$$u_k(t + m/4^k) - u_k(t) = 0,$$

za svako $m \in \mathbf{Z}$ i za svako $t \in \mathbf{R}$. Za svako $k > n$ imamo da je

$$|x_n - a| = \frac{1}{4^{n+1}} = m \cdot \frac{1}{4^k},$$

gde je m ceo broj. Prema tome,

$$u_k(x_n) - u_k(a) = 0, \qquad \text{za } k = n+1, n+2, \ldots$$

tako da je

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x_n) - u_k(a)}{x_n - a}.$$

Iz osobina funkcije u_k zaključujemo da je (skicirati sliku)

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(a)}{x_n - a} = \pm 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

tj. ovaj količnik uzima ili vrednost 1 ili vrednost -1. Odavde imamo da je količnik $(f(x_n) - f(a))/(x_n - a)$ jednak zbiru $n+1$-og broja u kome su neki sabirci jednaki $+1$, a neki -1; što se može simbolički zapisati u obliku

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \sum_{k=0}^{n} \pm 1,$$

Nije teško videti da, bez obzira na odnos broja pozitivnih i negativnih sabiraka, poslednja suma je jednaka parnom celom broju ako je n neparno i jednaka neparnom celom broju ako je n parno. Prema tome, ne postoji

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Kako $x_n \to a$ kada $n \to +\infty$, to znači da ne postoji ni

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

odnosno da funkcija f nema izvod u tački a. Kako je a proizvoljan realan broj, funkcija f nema izvod ni u jednoj tački.

Primedba. Ovo je jedna od brojnih poznatih konstrukcija funkcije koja je svuda neprekidna, ali nigde nema izvod. Prvi primer takve vrste dao je BOLZANO 1830., ali je on publikovan tek 1930. WEIERSTRASS je 1870. godine objavio primer funkcije

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gde je $0 < a < 1$, a b je neparan prirodan broj takav da je $ab > 1 + 3\pi/2$. Primer koji smo naveli je u suštini modifikacija WEIERSTRASSovog primera i pripada VAN DER WAERDENu.

8.4.6 Stepeni redovi

1419. Neka je $\tau(n)$ broj delilaca prirodnog broja n. Naći poluprečnik konvergencije reda $\sum \tau(n)x^n$

Rešenje. Kako je $1 \leq \tau(n) \leq n$, imamo da je

$$1 \leq \sqrt[n]{\tau(n)} \leq \sqrt[n]{n},$$

odakle nalazimo da je $\lim \sqrt[n]{\tau(n)} = 1$, pa je poluprečnik konvergencije datog reda jednak 1.

1420. Odrediti interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) x^n$ i ispitati konvergenciju na krajevima tog intervala.

Rezultat. Interval konvergencije je $(-1, 1)$. U tački $x = 1$, red divergira, za $x = -1$ uslovno konvergira.

1421. U zavisnosti od $p \in \mathbf{R}$ ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)^{n+p}} x^{2n}.$$

Rezultat. Poluprečnik konvergencije $R = \sqrt{e}$. Za $x = \pm\sqrt{e}$, red konvergira ako je $p > 3/2$ i divergira za $p \leq 3/2$.

1422. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((2n)!)^p}{(n+1)!} x^n.$$

Zatim naći sumu reda za $p = 0$.

Rezultat. Ako je $p < 1/2$, red apsolutno konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$. Ako je $p = 1/2$, red apsolutno konvergira za $|x| \leq 1/2$ i divergira za $|x| > 1/2$. Ako je $p > 1/2$, red konvergira samo za $x = 0$. Suma reda za $p = 0$ je funkcija data sa

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}, \quad (x \neq 0) \qquad f(0) = 0.$$

1423. Za pozitivne vrednosti parametara a i b, ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}.$$

Rezultat. Red konvergira za $|x| < \max(a, b)$, u ostalim tačkama divergira.

1424. Dat je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^n}{n^p}$ $(p \geq 0)$. U zavisnosti od p i $x \in \mathbf{R}$ ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda, a zatim naći njegovu sumu za $p = 1$.

Rezultat. Ako je $p > 1/2$, red konvergira apsolutno za $|x| \leq 1$. Za $0 \leq p \leq 1/2$, red konvergira apsolutno za $|x| < 1$ i uslovno za $x = 1$, dok za $x = -1$ divergira. Ako je $|x| > 1$, red divergira za svako p. Za $p = 1$, suma reda je

$$f(x) = 2 \log \frac{2}{1 + \sqrt{1 + x}} \qquad x \in [-1, 1].$$

1425. U zavisnosti od parametara $p > 0$ i $q \in \mathbf{R}$, ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(p+1) \cdots (p+n) \left((2n)!!\right)^q x^n.$$

Naći sumu reda za $p = 1, q = -2$ i za $p = 2, q = -1$.

1426. Neka je $a_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n}{n(2n-1)}\right)^p$, gde je p realan broj. Ispitati konvergenciju (uslovnu, apsolutnu, uniformnu) reda $\sum a_n x^n$.

1427. **Hipergeometrijska funkcija** definisana je sa

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n.$$

Ispitati za koje x, α, β, γ navedeni red konvergira.

Rezultat. Za $|x| < 1$ red konvergira apsolutno, za $|x| > 1$ divergira.
Za $x = 1$, apsolutno konvergira ako je $\gamma > \alpha + \beta$ i divergira ako je $\gamma \leq \alpha + \beta$.
Za $x = -1$, red konvergira apsolutno ako je $\gamma > \alpha + \beta$, uslovno ako je $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$, divergira ako je $\gamma - \alpha - \beta \leq -1$.

1428. Dati su niz $\{a_n\}$ i funkcija f:

$$a_n = (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{4^{np}((2n+1)!)^q}, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}.$$

a) U zavisnosti od $p, q \in \mathbf{R}$ ispitati konvergenciju reda $\sum a_n$.
b) Funkciju f razviti u potencijalni red i naći poluprečnik konvergencije tog reda.
c) Koristeći rezultat pod b), naći $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ za $p = q = 1$.

1429. Dokazati da stepeni red $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ konvergira za svako realno x i odrediti njegovu sumu.

1430. Ispitati konvergenciju i naći sumu reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{(2n)!} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2n}.$$

1431. Razviti u stepeni red funkciju datu sa

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Da li se pomoću dobijenog reda može izračunati vrednost funkcije na krajevima intervala konvergencije?

1432. Funkciju f datu sa

$$f(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^2)\, dt$$

razviti u potencijalni red i ispitati njegovu konvergenciju.

1433. Neka je

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{a^m}{1+a^{2m}x^2} \qquad 0 < a < 1,\ |x| < 1\,.$$

Razviti datu funkciju u red po stepenima x.

Rešenje. Za svako fiksirano $m = 0, 1, \ldots$ i za $|x| < 1$ važi razvoj

$$\frac{1}{1+a^{2m}x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a^{2mn} x^{2n}\,.$$

Odavde dobijamo da je

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!} a^{m(2n+1)} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(a^{2n+1}\right)^m}{m!} \right) x^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a^{2n+1}} x^{2n}\,.$$

1434. Razviti u stepeni red funkcije:

a) $\sin(b \cdot \arcsin x)$

$$\left[\, bx + b \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1^2-b^2)(3^2-b^2)\cdots((2n-1)^2-b^2)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad |x| < 1 \,\right]$$

b) $\cos(b \cdot \arcsin x)$

$$\left[\, 1 - \frac{b^2}{2}x^2 - b^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^2-b^2)(4^2-b^2)\cdots((2n)^2-b^2)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad |x| < 1 \,\right]$$

c) $\operatorname{arctg} \dfrac{2x}{2-x^2}$

$$\left[\, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{[n/2]} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}, \quad |x| < \sqrt{2} \,\right]$$

d) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

$$\left[\, 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)!!} x^{2n+2}, \quad |x| \le 1 \,\right]$$

e) $e^x \sin x$

$$\left[\, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n, \quad x \in \mathbf{R} \,\right]$$

f) $\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$

$$\left[\, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n, \quad -1 < x < 1 \,\right]$$

g) $(\operatorname{arctg} x)^2$

$$\left[\, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) \frac{x^{2n}}{n}, \quad |x| \le 1 \,\right]$$

1435. a) Razviti u stepeni red funkciju f datu sa

$$f(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y},$$

i odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

b) Smenom $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ u rezultat pod a), dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{2n-1} = \begin{cases} x, & \text{ako je } |x| \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{ako je } |x| \ge 1. \end{cases}$$

1436. Dokazati formulu

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3} + \cdots\right).$$

Uputstvo. Poći od razvoja funkcije $x \mapsto \log(1+1/x)$ u red po stepenima osnove $1/(2x+1)$.

1437. Ako je P polinom sa celim koeficijentima, dokazati da je

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P(m)}{m!} = k \cdot e, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

1438. Ako je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \qquad -1 < x < 1,$$

dokazati da je

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2) f(x).$$

1439. Funkciju $x \mapsto e^{(x-1)/x}$ razviti u red po stepenima promenljive $1/x$. Za koje $x \in \mathbf{R}$ tako dobijeni red konvergira?

Rezultat. $e^{(x-1)/x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{x^n}$, gde je $a_n = (-1)^n \sum_{m=n}^{+\infty} \dfrac{1}{m!}\binom{m}{n}$.

1440. Neka je f parna funkcija koja koja se u nekoj okolini nule može razviti u potencijalni red. Dokazati da se funkcija $x \mapsto f(\sqrt{x})$ takođe može razviti u potencijalni red.

Odavde izvesti da funkcija $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ ima konačne izvode proizvoljnog reda u nuli.

Rešenje. Ako je f parna funkcija, tada njen MACLAURINov red sadrži samo parne stepene (zadatak 563), pa je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}. \tag{1}$$

Zamenom x sa $\sqrt{x}$, dobijamo

$$f(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Ako je $R > 0$ poluprečnik konvergencije reda (1), tada je R^2 poluprečnik konvergencije reda (2). Prema tome, funkcija $x \mapsto f(\sqrt{x})$ može se razviti u potencijalni red u nekoj okolini nule.

Ako je $f(x) = \cos x$, iz dokazanog zaključujemo da se funkcija $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ može razviti u potencijalni red, što znači da u nuli ima konačne izvode proizvoljnog reda.

1441. Primenom binomnog razvoja izračunati $\sqrt[5]{35}$ sa greškom manjom od 10^{-4}.

Rešenje. Imamo da je

$$\sqrt[5]{35} = 2\left(1 + \frac{3}{32}\right)^{1/5}.$$

Prema tome, treba upotrebiti potencijalni razvoj za funkciju $f(x) = 2(1+x)^{1/5}$ u tački $x = 3/32$:

$$2(1+x)^{1/5} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/5}{n} x^n. \tag{1}$$

Red u (1) je alternativni konvergentan red sa članovima koji monotono opadaju ka nuli. Za takav red, ostatak posle n-tog člana po apsolutnoj vrednosti nije veći od apsolutne vrednosti prvog izostavljenog člana, tj

$$|r_n| \le 2\left|\binom{1/5}{n+1} x^{n+1}\right|, \quad x = 3/32.$$

Odavde dobijamo da je, za $n \ge 2$, ostatak manji od 10^{-4}, tako da se približna vrednost za $\sqrt[5]{35}$ dobija iz

$$\sqrt[5]{35} \approx 2\sum_{n=0}^{2} \binom{1/5}{n} x^n = 2\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32} - \frac{4}{2!5^2}\cdot\frac{3^2}{32^2}\right) = 2.0361.$$

8.4.7 Beskonačni proizvodi*

1442. Kažemo da beskonačan proizvod

$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n \tag{1}$$

konvergira ako postoji konačan i **različit od nule**

$$\lim_{n\to+\infty} P_n, \quad \text{gde je } P_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n .$$

Dokazati:

a) Ako beskonačan proizvod (1) konvergira, tada je

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 1 .$$

b) Beskonačan proizvod (1) konvergira ako i samo ako konvergira red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log p_n$$

i u tom slučaju je vrednost proizvoda (1) jednaka

$$P = e^S, \quad \text{gde je } S = \sum_{n=1}^{+\infty} \log p_n .$$

c) Ako je, za skoro svako n, $p_n > 1$ (ili $p_n < 1$), tada proizvod (1) konvergira ako i samo ako konvergira red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - p_n) .$$

1443. Naći vrednost beskonačnog proizvoda

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) .$$

Rešenje. Imamo da je

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} .$$

Vrednost datog beskonačnog proizvoda je

$$P = \lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2} .$$

1444. Dokazati da za $0 < x < 1$ važi

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}.$$

1445. Dokazati da za $x \in \mathbf{R}$ važe razvoji

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

O programu TEX

Prvi savet koji bi profesor D.S. Mitrinović dao studentima zainteresovanim za naučni rad u matematici, bio je da kupe pisaću mašinu. Pisanje članaka, a da ne govorimo o matematičkim knjigama, bilo je pravi poduhvat. Najsitnija ispravka u tekstu zahtevala bi ponovno kucanje cele stranice. Pisac matematičkog teksta morao je da bude naoružan, pored pisaće mašine, još i makazama, lepkom, indigom i beskrajnim strpljenjem.

Kada su računari, početkom osamdesetih godina, postali svakom dostupni, i kada se sa sistema bušenih kartica prešlo na mnogo udobniji interaktivni rad pred monitorom, pojavili su se različiti sistemi za obradu teksta. Pravo oduševljenje je izazvala pojava programa tipa *ChiWriter*, koji je sa radnih stolova matematičara zauvek uklonio pisaću mašinu i učinio pisanje teksta privlačnijim.

Početkom osamdesetih, matematičar Donald Knuth stvorio je program TEX, a nešto kasnije se pojavila i varijanta LATEX od Leslie Lamporta. Ako je *ChiWriter* zamenio pisaću mašinu, TEX i LATEX su zamenili i slovoslagače i omogućili autorima da na maksimalno udoban način stvaraju matematički tekst.

Da nije bilo LATEXa, ova knjiga, ako bi se uopšte pojavila, izgledala bi sasvim drugačije. Citiranje udaljenih zadataka (na primer, kada u zadatku 39 pominjemo zadatak 607) je teško izvodljivo u klasičnoj pripremi rukopisa, jer se u toku rada na knjizi redosled zadataka često menja. Pravljenje indeksa je, u LATEXu, takođe izuzetno jednostavno.

Mnogi matematički časopisi u svetu pripremaju se za štampu pomoću TEXa ili LATEXa, a autorima se preporučuje da svoje radove, pripremljene na ovaj način, pošalju na disketi ili elektronskom poštom. TEX je tako postao standard za pisanje matematičkih tekstova.

8.5 Nejednakosti

Nejednakosti imaju važnu ulogu u svim oblastima matematičke analize. Neke metode za dobijanje nejednakosti izložili smo u odeljku 3.5.2 a jedan broj zadataka koji se odnose na nejednakosti može se naći u prvoj, trećoj, četvrtoj i petoj glavi. Pored zadataka, u ovom odeljku dajemo i neke važne generalne nejednakosti koje koristimo na raznim mestima u knjizi.

1446. **Cauchyjeva nejednakost**[1]. Ako su a_k i b_k realni brojevi ($k = 1, 2, \ldots n$), dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

sa jednakošću ako i samo ako su nizovi a_k i b_k proporcionalni.

Rešenje. Kako je, za svako $x \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

poslednji kvadratni trinom ima nepozitivnu diskriminantu, odakle se dobija tražena nejednakost. Ako je diskriminanta jednaka nuli, tada postoji neko x za koje je

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = 0,$$

što je moguće ako i samo ako je $a_k x + b_k = 0$ za svako $k = 1, 2, \ldots, n$, tj. ako su nizovi a_k i b_k proporcionalni.

1447. **Cauchyjeva integralna nejednakost.** Neka su funkcije f i g kvadratno integrabilne[2] na $[a, b]$. Dokazati da važi nejednakost

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

sa jednakošću ako i samo ako postoje konstante C_1 i C_2 tako da važi[3]

$$\int_a^b (C_1 f(x) + C_2 g(x))^2\,\mathrm{d}x = 0, \qquad C_1^2 + C_2^2 > 0.$$

[1] Ova nejednakost se u literaturi još naziva i CAUCHY– SCHWARZ–BUNIAKOWSKIeva nejednakost.

[2] Za funkciju f kažemo da je kvadratno integrabilna ako su funkcije f i f^2 integrabilne.

[3] Ako su funkcije f i g neprekidne, tada iz ovog uslova sledi linearna zavisnost ove dve funkcije; ako su samo integrabilne, onda jednakost $C_1 f(x) + C_2 g(x) = 0$ važi za svako $x \in [a, b]$ osim, eventualno, na nekom skupu mere nula.

Rešenje. Uvedimo oznake

$$\alpha = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,, \beta = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,, \gamma = \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Treba dokazati da je

(1) $$\beta^2 \leq \alpha\gamma\,.$$

Posmatrajmo dva moguća slučaja:

1° $\alpha = \gamma = 0$. Dokazaćemo da je tada i $\beta = 0$, što znači da je ispunjena nejednakost (1). Iz nejednakosti $|f(x)g(x)| \leq (1/2)(f^2(x) + g^2(x))$, koja važi za svako x, dobijamo integracijom

$$\beta = \left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\alpha+\gamma}{2} = 0\,,$$

što je i trebalo dokazati.

2° Neka je bar jedan od brojeva α, γ različit od nule, na primer, $\gamma \neq 0$. Integracijom nejednakosti $(f(x) + \lambda g(x))^2 \geq 0$ nalazimo da je

(2) $$\lambda^2\gamma + 2\lambda\beta + \alpha \geq 0 \quad \text{za svako } \lambda \in \mathbf{R}\,,$$

odakle zaključujemo da je diskriminanta kvadratnog trinoma u (2) nepozitivna, tj. $\beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$, čime je dokaz završen.

Uslov za jednakost sledi iz izloženog dokaza.

1448. Dokazati da za kompleksne brojeve a_k i b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ važi nejednakost

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right)\,,$$

1449. **Hölderova nejednakost.** Ako su a_k i b_k nenegativni realni brojevi $(k = 1, 2, \ldots, n)$, i ako je $1/p + 1/q = 1$, gde je $p > 1, q > 1$, dokazati da važi nejednakost

(1) $$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}\,,$$

sa jednakošću ako i samo ako su nizovi a_k^p i b_k^q proporcionalni.

Rešenje. Ako je $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^p = 0$, tada je $a_k = 0$ za svako k, pa u (1) važi jednakost. Na isti način, u (1) važi jednakost i ako je $B = \sum_{k=1}^{n} b_k^q = 0$. Pretpostavimo sada da su obe pomenute sume pozitivne. Ako u YOUNGovoj nejednakosti

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad (p > 1),$$

(videti zadatak 609), stavimo

$$a = \frac{a_k^p}{A}, \quad b = \frac{b_k^q}{B}, \quad 1 \leq k \leq n$$

dobijamo

$$\frac{a_k b_k}{A^{1/p} B^{1/q}} \leq \frac{a_k^p}{pA} + \frac{b_k^q}{qB}.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti za $k = 1, \ldots, n$, imamo da je

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{A^{1/p} B^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dobijena nejednakost je ekvivalentna sa (1).

Kako u YOUNGovoj nejednakosti jednakost važi ako i samo ako je $a = b$, zaključujemo da jednakost u (1) važi ako i samo ako je

$$\frac{a_k^p}{A} = \frac{b_k^p}{B}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

tj. ako i samo ako su nizovi a_k^p i b_k^q proporcionalni.

1450. **Hölderova integralna nejednakost.** Ako su funkcije $|f|^p$ i $|g|^q$ integrabilne na (a, b), gde je $1/p + 1/q = 1$ i $p, q > 1$, dokazati da važi nejednakost

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

1451. **Hölderova nejednakost za nizove.** Neka su $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$ nizovi pozitivnih realnih brojeva, takvi da je $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^p < +\infty$, $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^q < +\infty$, gde je $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 1$. Dokazati da važi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^q\right)^{1/q}.$$

1452. **Minkowskijeva nejednakost.** Ako su a_k i b_k realni brojevi ($k = 1, \ldots, n$) i ako je $p \geq 1$, dokazati nejednakost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Rešenje. Ako je $p = 1$, tada se nejednakost (1) dobija sumiranjem nejednakosti

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Neka je $p > 1$. Primetimo da je dovoljno dokazati (1) za slučaj nenegativnih a_k i b_k, jer je

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/p}.$$

Pretpostavimo stoga da je $a_k, b_k \geq 0$ za svako $k = 1, \ldots, n$ i uočimo jednakost

$$(a_k + b_k)^p = a_k(a_k + b_k)^{p-1} + b_k(a_k + b_k)^{p-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Sumiranjem za $k = 1, \ldots, n$, nalazimo da je

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k + b_k)^{p-1}.$$

Na osnovu HÖLDERove nejednakosti (zadatak 1449), za $1/p + 1/q = 1$ i $p > 1$, imamo da je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)}\right)^{1/q},$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

Sabiranjem poslednje dve nejednakosti i koristeći jednakost $q(p-1) = p$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/q},$$

odnosno, deljenjem sa $\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/q}$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p},$$

što je i trebalo dokazati.

1453. **Minkowskijeva integralna nejednakost.** Neka su funkcije $|f|^p$, $|g|^p$ integrabilne na (a,b), za neko $p \geq 1$. Dokazati nejednakost

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \, dt\right)^{1/p} . \quad (1)$$

1454. **Minkowskijeva nejednakost za nizove.** Neka su $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$ nizovi realnih brojeva takvi da su redovi $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p$ i $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^p$ konvergentni, gde je $p \geq 1$. Dokazati nejednakost

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^p\right)^{1/p} ,$$

Uputstvo. Poći od MINKOWSKIjeve nejednakosti za konačnu sumu od n članova i pustiti da $n \to +\infty$.

1455. **Jensenova nejednakost.** Koristeći se TAYLOROvom formulom sa ostatkom u integralnom obliku (zadatak 842), dokazati:

Ako funkcija f ima neprekidan i nenegativan drugi izvod na intervalu (a,b), tada za svako $x, y \in (a,b)$ i za svako $\lambda \in [0,1]$ važi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) , \quad (1)$$

tj. funkcija f je konveksna na $[a,b]$.

Rešenje. Ako je $x = y$, tada se (1) svodi na jednakost $f(x) = f(x)$. Pretpostavimo sada da je $x < y$. Neka je

$$c = \lambda x + (1-\lambda)y \quad (2)$$

Primenom TAYLOROvog razvoja do prvog stepena u tačkama x i y u okolini tačke c, sa ostatkom u integralnom obliku, dobijamo:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \int_c^x (x-\tau) f''(\tau) \, d\tau , \quad (3)$$

$$f(y) = f(c) + f'(c)(y-c) + \int_c^y (y-\tau) f''(\tau) \, d\tau . \quad (4)$$

Ako jednakosti (3) i (4) pomnožimo redom sa λ i $(1-\lambda)$ i saberemo, dobijamo:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = f(c) + f'(c)\big(\lambda(x-c) + (1-\lambda)(y-c)\big) + \lambda \int_c^x (x-\tau) f''(\tau) \, d\tau + (1-\lambda) \int_c^y (y-\tau) f''(\tau) \, d\tau . \quad (5)$$

Iz (2) imamo da je

$$\lambda(x-c)+(1-\lambda)(y-c)=\lambda x+(1-\lambda)y-c=0\,,$$

tako da iz (5) sleduje

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=f(c)+\lambda\int_x^c(\tau-x)f''(\tau)\,\mathrm{d}\tau+(1-\lambda)\int_c^y(y-\tau)f''(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Kako je $x\le c\le y$ i $f''(\tau)\ge 0$ za svako $\tau\in[x,y]$, obe podintegralne funkcije su nenegativne, pa su i odgovarajući integrali takođe nenegativni. Prema tome,

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\ge f(c)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)\,,$$

što je i trebalo dokazati.

1456. **Jensenova integralna nejednakost.** Ako je f konveksna funkcija i ako je g nenegativna funkcija takva da je $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=1$, dokazati da je

$$f\left(\int_a^b xg(x)\,\mathrm{d}x\right)\le\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1457. Neka je funkcija $x\mapsto f(x)$ neprekidna na intervalu (a,b). Dokazati da je f konveksna na (a,b) ako i samo ako za svako $x,y\in(a,b)$ važi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}\,.$$

1458. Dokazati nejednakosti:

a) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}a<\dfrac{b-a}{\cos^2 b}\quad(0\le a<b<\dfrac{\pi}{2})$,

b) $\dfrac{b-a}{b}<\log\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}\quad(0<a<b)$.

Rešenje. a) Ako je $0\le a<b<\pi/2$, funkcija $x\mapsto\operatorname{tg}x$ ispunjava uslove LAGRANGEove teoreme na $[a,b]$, pa postoji $c\in[a,b]$ takvo da je

$$\frac{\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}a}{b-a}=\frac{1}{\cos^2 c}\,.\qquad(1)$$

Kako je funkcija $x\mapsto\cos^2 x$ monotono opadajuća za $x\in[0,\pi/2)$, iz (1) nalazimo da je

$$\frac{1}{\cos^2 a}<\frac{\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}a}{b-a}<\frac{1}{\cos^2 b}\,,$$

odakle se, množenjem sa $(b-a)$, dobijaju tražene nejednakosti.

Nejednakosti pod b) se dokazuju primenom LAGRANGEove teoreme na funkciju $x \mapsto \log x$.

1459. Neka su funkcije f i g n puta diferencijabilne na $[a,+\infty)$ i neka je $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ za $k = 0,1,2,\ldots,n-1$. Ako je $f^{n}(x) < g^{(n)}(x)$ za svako $x > a$, dokazati da je $f(x) < g(x)$ za svako $x > a$.

Primedba. Ovaj rezultat se najčešće koristi u partikularnom slučaju $n = 1$: Ako je $f(a) = g(a)$ i $f'(x) < g'(x)$ za $x > a$, tada je $f(x) < g(x)$ za $x > a$.

1460. Dokazati da je

$$e^x > 1 + x \qquad (x \neq 0).$$

1461. Dokazati nejednakosti

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n-x+1)n!} \quad (0 < x < n+1)$$

1462. Ako je $x > 0$ i $x \neq 1$, dokazati da važi

$$\frac{\log x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

kao i

$$\frac{\log x}{x-1} \leq \frac{1+x^{1/3}}{x+x^{1/3}}.$$

1463. Ako je $x > 0$, dokazati nejednakosti

$$\frac{2}{2x+1} < \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

1464. Ako je $x, y > 0$, $0 < a < b$, dokazati:

$$(x^a + y^a)^{1/a} > (x^b + y^b)^{1/b}.$$

1465. Dokazati da za $x > 0$ važe nejednakosti

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x .$$

1466. Dokazati da za $x > 0$ važe nejednakosti

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} .$$

Uputstvo. Posmatrati MACLAURINov razvoj funkcije $x \mapsto \sin x$, koji za $x > 0$ ispunjava uslove LEIBNIZovog kriterijuma za alternativne redove.

1467. Dokazati nejednakost

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} > \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbf{R} .$$

Rešenje. Imamo da je

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+n)^2} - \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{2(x+n)^2} + \frac{1}{2(x+n+1)^2} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(x+n)^2(x+n+1)^2} > 0 .
\end{aligned}$$

1468. Neka je $x \in (0, \pi/2)$. Dokazati da je

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} .$$

1469. Neka je data funkcija f sa neprekidnim izvodom f' na $[a, b]$, $a < b$ i neka je $f(a) = 0$. Dokazati da je

$$\left(\sup_{a \le x \le b} |f(x)| \right)^2 \le (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x .$$

1470. Dokazati da za svako $x > 1$ i $\beta \in (0, 1/2)$ važi nejednakost

$$1 + \frac{\beta}{x} \leq \left(1 + \frac{1-\beta}{x}\right)^{2\beta}.$$

Uputstvo. Iskoristiti nejednakost iz zadatka 611.

1471. Poznato je da za svako $n \in \mathbf{N}$, interval

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

sadrži broj e (zadatak 242). U kojoj četvrtini ovog intervala se nalazi e ?

Rezultat. U drugoj četvrtini.

1472. Ako su funkcije $t \mapsto \alpha(t)$ i $t \mapsto \beta(t)$ integrabilne na $[a, b]$ i ako postoji konstanta C takva da je

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + C \int_a^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{za svako } t \in [a, b],$$

dokazati da je

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + C \int_a^t e^{C(t-s)}\beta(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b].$$

8.6 Diferencijalne jednačine

8.6.1 Diferencijalne jednačine prvog reda

1473. Naći geometrijsko mesto prevojnih tačaka integralnih krivih diferencijalne jednačine

(1) $$x^3y' = 1 + 3x^3 - 2x^2y\,.$$

Rešenje. U zadatku 1156 našli smo opšte rešenje date jednačine; iz toga je moguće odrediti traženo geometrijsko mesto. Ovde ćemo pokazati da je geometrijsko mesto prevojnih tačaka moguće odrediti bez rešavanja jednačine. Naime, diferenciranjem obe strane u (1), dobijamo

(2) $$3x^2y' + x^3y'' = 9x^2 - 4xy - 2x^2y'\,.$$

Ako u (2) stavimo $y'' = 0$, dobićemo

(3) $$5x^2y' = 9x^2 - 4xy\,.$$

Eliminacijom y' iz (1) i (3), dobija se

(4) $$y = x + \frac{5}{6x^2}\,,$$

što je jednačina geometrijskog mesta prevojnih tačaka integralnih krivih.

1474. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(x + y^2)y' = y\,.$$

Rešenje. Datu diferencijalnu jednačinu možemo napisati u ekvivalentnim oblicima:

$$(x + y^2)\frac{dy}{dx} = y \iff (x + y^2) = y\frac{dx}{dy}$$

$$\iff \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y \qquad (y \neq 0).$$

Poslednja jednačina je linearna po x. Ako se reši na uobičajeni način, dobija se

(1) $$x = y^2 + Cy \qquad (C \in \mathbf{R}, y \neq 0)$$

Primetimo da je i funkcija $x \mapsto y(x) = 0$ takođe rešenje date jednačine; to je singularno rešenje jer se ne može dobiti iz (1) ni za jednu vrednost konstante C.

Objasniti zašto se u (1) pojavljuje ograničenje $y \neq 0$. Da li je to ograničenje samo formalno, jer smo u izvođenju (1) delili sa y, ili je i suštinsko ? Da li je kriva definisana sa (1) diferencijabilna za $y = 0$?

1475. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{x+y+1}{x+\lambda y-1}$$

za razne vrednosti $\lambda \in \mathbf{R}$.

Uputstvo. Razlikovati slučajeve $\lambda < 0$, $\lambda \in [0,1) \cup (1,+\infty)$, $\lambda = 1$.

1476. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{2x+ay+1}{x-2y+1} \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

Rezultat. U zavisnosti od $a \in \mathbf{R}$, opšte rešenje je dato sa:

1° $a = -4$: $e^{4x-6y}(3x-6y+1)^2 = C$.

2° $a \neq -4$: $\log|x| + C = -\frac{1}{2}\log|2z^2+(a-1)z+2| + J(z)$, gde je

$$z = \left(y+\frac{a+2}{a+4}\right) \Big/ \left(x-\frac{1}{a+4}\right), \; J(z) = \frac{a+1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{2z^2+(a-1)z+2}.$$

Ako je $z_{1,2} = \dfrac{1-a \pm \sqrt{(a-1)^2-16}}{4}$, tada je

$$J(z) = \begin{cases} \frac{2(a+1)}{\sqrt{16-(a-1)^2}}\operatorname{arctg}\frac{4z+a-1}{\sqrt{16-(a-1)^2}}, & a \in (-3,5) \\ \frac{a+1}{2(z_2-z_1)}\log\frac{z-z_2}{z-z_1}, & a \in (-\infty,-4)\cup(-4,-3)\cup(5,+\infty) \\ \frac{a+1}{4(1-z)}, & a = -3 \\ -\frac{a+1}{4(1+z)}, & a = 5 \end{cases}$$

1477. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' - \frac{1}{1-x^3}y^2 + \frac{x^2}{1-x^3}y + \frac{2x}{1-x^3} = 0,$$

ako je poznato da ima jedno partikularno rešenje u obliku $y = ax^2$.

Rezultat. Partikularno rešenje je $y = -x^2$; opšte rešenje je $y = -x^2 + 1/z(x)$, gde je $z(x) = (x^3-1)\left(C + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}\right)$. Ostaje još da se izračuna integral koji se pojavljuje u rešenju.

1478. Odrediti parametre a i b tako da diferencijalna jednačina

$$\frac{ax^2-y^2}{x}\,\mathrm{d}x + (bx+2ay)\,\mathrm{d}y = 0$$

ima integracioni faktor $\frac{1}{x^2+y^2}$. Za tako nađeno a i b odrediti partikularno rešenje $f(x,y)=0$ za koje je $f(c,0)=0$ za dato $c>0$.

1479. Data je diferencijalna jednačina

$$y' = \sqrt{|y|}\,.$$

Pokazati da kroz tačku $(0,0)$ prolaze dve integralne krive ove jednačine, iako je funkcija sa desne strane jednakosti neprekidna.

Rezultat. Kroz $(0,0)$ prolaze integralne krive $y=0$ i $y=(x^2/4)\operatorname{sgn} x$.

8.6.2 Diferencijalne jednačine višeg reda

1480. Odrediti integralne krive jednačine

$$y^{(4)} - a^4 y = 0$$

koje su simetrične u odnosu na y-osu.

Rezultat. $y = C_1 \operatorname{ch} ax + C_2 \cos ax$.

1481. Naći onu integralnu krivu diferencijalne jednačine

$$y'' - 4y = 4e^{-2x}$$

koja ima horizontalnu asimptotu i koja u tački preseka sa y-osom ima tangentu paralelnu pravoj $y=x$. Zatim ispitati i grafički predstaviti ovu krivu.

Rezultat. Tražena kriva je $y = -e^{-2x}(1+x)$

1482. Odrediti integralnu krivu diferencijalne jednačine

$$y'' + 2ay' + b^2 y = e^{-ax}\cos cx \qquad (a,b,c \in \mathbf{R},\ c^2 = b^2 - a^2,\ |b| > |a|)$$

koja ima stacionarnu tačku $(2\pi/c, 1)$.

Rezultat. $y = e^{-ax}\left(e^{2\pi a/c}\cos cx + \left(\frac{a}{c}e^{2\pi a/c} - \frac{\pi}{c^2} + \frac{x}{2c}\right)\sin cx\right)$.

1483. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - (2a+1)y' + a(a+1)y = e^{-x} + x + 1 \qquad (a \in \mathbf{R})\,.$$

Rezultat. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y_h = C_1 e^{ax} + C_2 e^{(a+1)x}\,.$$

Opšte rešenje date jednačine je $y = y_h + y_p$, gde je

$$y_p = \begin{cases} \dfrac{1}{(a+1)(a+2)}e^{-x} + \dfrac{x}{a(a+1)} + \dfrac{a^2+3a+1}{a^2(a+1)^2}, & a \neq 0, -1, -2 \\ \dfrac{1}{2}e^{-x} - \dfrac{x^2}{2} - 2x, & a = 0 \\ -xe^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2, & a = -1 \\ xe^{-x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}, & a = -2 \end{cases}$$

1484. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$a^2y'' + 2ay' + y = \operatorname{ch}\frac{x}{a} \qquad (a \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

Rezultat. $y(x) = \left(C_1 + C_2x + \dfrac{x^2}{4a^2}\right)e^{-x/a} + \dfrac{1}{8}e^{x/a}$.

1485. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + (1+a)y' + ay = x^2 + 1 + xe^{-x} \quad (a \in \mathbf{R}) .$$

Rezultat. Za $a \neq 0$, $a \neq 1$, opšte rešenje je

$$y(x) = C_1e^{-ax} + C_2e^{-x} + \frac{1}{a}x^2 - 2\frac{a+1}{a^2}x + \frac{3+2a+2a^2}{a^3} + \left(\frac{1}{2(a-1)}x^2 - \frac{1}{(a-1)^2}x\right)e^{-x} .$$

Ako je $a = 0$, tada je

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{-x} .$$

Za $a = 1$ dobija se

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} + x^2 - 4x + 7 + \frac{x^3}{6}e^{-x} .$$

1486. Data je diferencijalna jednačina

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x} .$$

Znajući da je linearna funkcija partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine, odrediti opšte rešenje date jednačine. Zatim odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y(-2) = 0, y(1) = 3$.

Rezultat. Opšte rešenje je

$$y(x) = A(x+2) + \frac{B}{x} + \frac{x+2}{2}\log|x| + 1 - \frac{x}{4}.$$

Traženo partikularno rešenje je

$$y_p(x) = \frac{x+2}{2}\log|x| + \frac{1-x}{2} + \frac{3}{x}.$$

Primedba. Za razliku od CAUCHYjevih (početnih) uslova koji su dati u jednoj tački, uslovi za traženje partikularnog rešenja kao u ovom zadatku nazivaju se **konturni uslovi**. Kada se rešavaju diferencijalne jednačine sa više nezavisnih promenljivih, uslovi ovog tipa se zadaju na nekoj konturi, i odavde potiče naziv.

1487. Data je diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad (x^3+1)y'' - 3x^2y' + 3xy = 4(x^3+1)^2 .$$

Odrediti njeno opšte rešenje ako se zna da odgovarajuća homogena jednačina ima partikularno rešenje koje je linearna funkcija.

Rezultat. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y_h(x) = C_1 x + C_2\left(\frac{x^3}{2} - 1\right),$$

a opšte rešenje date jednačine je

$$y_h + 2x^2 + \frac{x^5}{2}.$$

1488. Odrediti konstantu a tako da funkcija $y = e^{ax}$ bude partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1) \qquad (1+x)y'' + xy' - y = 0 .$$

Odrediti zatim opšte rešenje jednačine

$$(2) \qquad (1+x)y'' + xy' - y = e^x(1+x)^2 .$$

Rešenje. Zamenom u datu jednačinu dobijamo $a = -1$. Prema tome, funkcija $x \mapsto e^{-x}$ je partikularno rešenje diferencijalne jednačine (1). Drugo partikularno rešenje dobijamo primenom LIOUVILLEove formule:

$$y_2 = e^{-x}\int e^{2x}\exp\left(-\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x .$$

Rešavanjem integrala dobijamo $y_2 = x$, pa je opšte rešenje jednačine (1) dato sa

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x \, .$$

Opšte rešenje jednačine (2) dobija se metodom varijacije konstanti i glasi

$$y(x) = (e^x + A)x + \left(-\frac{x^2}{2} + B\right) e^{-x} = y_h + xe^x - \frac{x^2}{2} e^{-x}.$$

1489. Data je diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad (1 - 4x^2)y'' + 8xy' + (16x^4 - 12x^2 - 2)y = 0 \, .$$

Odrediti $p \in \mathbf{R}$ tako da je $y_p = \exp x^p$ partikularno rešenje jednačine (1), pa zatim naći njeno opšte rešenje . Takođe odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y(1) = e^{-1}$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Rešenje. Pretpostavimo da je partikularno rešenje oblika $y_p = \exp x^p$. Tada je $y_p' = px^{p-1} \exp x^p$, $y_p'' = p(px^{2p-2} + (p-1)x^{p-2}) \exp x^p$. Zamenom ovih izraza u jednačinu (1) i sređivanjem, dobijamo

$$(2) \quad -4p^2x^{2p} + p^2x^{2p-2} + 4p(3-p)x^p + p(p-1)x^{p-2} + 16x^4 - 12x^2 - 2 = 0.$$

Na prvi pogled, jednakost (2) ne može da bude identitet ni za jedno p, jer ima "slobodan član" $16x^4 - 12x^2 - 2$, koji ne zavisi od p. Međutim, to znači da p treba tražiti među takvim brojevima za koje su neke od funkcija $x^{2p}, x^{2p-2}, x^p, x^{p-2}, x^4, x^2, 1$ jednake. Tako dolazimo do mogućnosti $p = 2$, i u tom slučaju jednakost (2) glasi

$$-16x^4 + 4x^2 + 8x^2 + 2 + 16x^4 - 12x^2 - 2 = 0 \, ,$$

što je tačno za svako $x \in \mathbf{R}$. Prema tome, funkcija

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$

je partikularno rešenje date diferencijalne jednačine.

Drugo partikularno rešenje nalazimo primenom LIOUVILLEove formule

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x^2} \int e^{-2x^2} \exp\left(-\int \frac{8x \, \mathrm{d}x}{1-4x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= e^{x^2} \int e^{-2x^2} \exp\left(\log(1-4x^2)\right) \mathrm{d}x \\ &= e^{x^2} \int e^{-2x^2}(1-4x^2) \, \mathrm{d}x = e^{x^2} \int \mathrm{d}(xe^{-2x^2}) \\ &= x\mathrm{e}^{-x^2} \, . \end{aligned} \qquad (3)$$

Prema tome, opšte rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y(x) = C_1 e^{x^2} + C_2 x e^{-x^2} .$$

Traženo partikularno rešenje dobija se iz

$$y(1) = e^{-1} \Rightarrow C_1 e + C_2 e^{-1} = e^{-1} \lim_{n \to +\infty} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 ,$$

odakle je $C_1 = 0, C_2 = 1$, $y(x) = xe^{-x^2}$.

Primedba. U (3) smo uzeli da je

$$-\int \frac{8x \, dx}{1 - 4x^2} = \log(1 - 4x^2) ,$$

mada je, u stvari, vrednost ovog neodređenog integrala jednaka $\log|1 - 4x^2| + C$. Konstantu C ne pišemo jer tražimo samo partikularno rešenje , ali da li je bilo ispravno izostaviti apsolutnu vrednost? Obrazložiti.

1490. Data je diferencijalna jednačina

(1) $$xy'' - (4x^2 + 1)y' + 8x^3 y = 0 .$$

Odrediti parametar a tako da funkcija $y = e^{ax^2}$ bude rešenje date jednačine, i na osnovu toga naći opšte rešenje diferencijalne jednačine (1). Naći zatim opšte rešenje jednačine

(2) $$xy'' - (4x^2 + 1)y' + 8x^3 y = 4x^3 e^{x^2} .$$

Rešenje. Zamenom $y = e^{ax^2}$ u (1), zajedno sa $y' = 2axe^{ax^2}$, $y'' = (2a + 4a^2x^2)e^{ax^2}$, dobijamo

$$4a^2 - 8a + 8 = 0 ,$$

odakle je $a = 1 \pm i$. Prema tome, partikularna rešenja jednačine (1) su

$$y_1 = e^{(1+i)x^2} \text{ i } y_2 = e^{(1+i)x^2} .$$

Ova dva rešenja su linearno nezavisna, jer $y_1(x)/y_2(x) \neq \text{const}$. Opšte rešenje jednačine (1) je

(3) $$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{(1+i)x^2} + C_2 e^{(1-i)x^2} .$$

Da bi se izbegli kompleksni brojevi, rešenje (3) se može napisati u obliku

(4) $$y_h = e^{x^2}(A \cos x^2 + B \sin x^2)$$

(uporediti sa rešenjem jednačine $y'' + 1 = 0$).

Rešenje nehomogene jednačine (2) možemo dobiti metodom varijacije konstanti. Odgovarajući sistem (ne zaboravimo da jednačinu treba podeliti sa x !) glasi

$$C_1' e^{(1+i)x^2} + C_2' e^{(1-i)x^2} = 0$$
$$C_1' \cdot 2x(1+i)e^{(1+i)x^2} + C_2' \cdot 2x(1-i)e^{(1-i)x^2} = 4x^2 e^{x^2},$$

odakle je

$$C_1' = -ixe^{-ix^2}, \quad C_2' = -C_1' e^{2ix^2}.$$

Dalje imamo:

$$C_1(x) = \int \left(-ixe^{-ix^2}\right) dx = \frac{1}{2}\int d(e^{-ix^2}) = \frac{1}{2}e^{-ix^2} + D_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}e^{ix^2} + D_2,$$

gde su D_1 i D_2 proizvoljne konstante. Zamenom u (3) i sređivanjem, dobija se opšte rešenje jednačine (2) u obliku:

$$y(x) = D_1 e^{(1+i)x^2} + D_2 e^{(1-i)x^2} + e^{x^2},$$

odnosno, u trigonometrijskom obliku:

$$y(x) = e^{x^2}(A\cos x^2 + B\sin x^2) + e^{x^2}.$$

Odavde primećujemo da je funkcija $x \mapsto e^{x^2}$ jedno partikularno rešenje homogene jednačine. Da smo to uspeli da pogodimo na početku, postupak varijacije konstanti ne bi bio potreban.

Šta se dobija ako se metod varijacije konstanti primeni na rešenje homogene jednačine u trigonometrijskom obliku (4) ?

1491. Data je diferencijalna jednačina

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0.$$

Odrediti a tako da je $x \mapsto e^{ax}$ partikularno rešenje date jednačine, a zatim naći njeno opšte rešenje.

Rezultat. $a = \pm i$; $y = C_1 e^{ix^2} + C_2 e^{-ix^2} = A\cos x^2 + B\sin x^2$.

1492. Data je diferencijalna jednačina

$$2xy'' + y' - 2y = 3e^{-\sqrt{x}}.$$

Transformisati datu jednačinu uvodeći novu promenljivu smenom $x = t^2$, pa zatim naći njeno opšte rešenje.

Rešenje. Smenom $x = t^2$ nalazimo

$$y' = \frac{\dot{y}}{2t}\,,\quad y'' = \frac{t\ddot{y} - \dot{y}}{4t^3}\,.$$

Zamenom u datu diferencijalnu jednačinu, dobijamo diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$\ddot{y} - 4y = 6e^{-t}\,, \qquad t = \sqrt{x}\,,$$

čije je opšte rešenje

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 2e^{-t}\,,$$

pa je

$$y(x) = C_1e^{2\sqrt{x}} + C_2e^{-2\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}}\,.$$

1493. Uvođenjem smene $x = t^3$ rešiti diferencijalnu jednačinu

$$9x\sqrt[3]{x}y'' + 6\sqrt[3]{x}y' - y = 0\,.$$

Zatim odrediti integralnu krivu date jednačine koja prolazi kroz tačku $(0, 1)$ i koja je simetrična u odnosu na y-osu.

1494. Uvođenjem smene $t = \operatorname{tg} x$ rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''\cos^4 x - y'\sin 2x\cos^2 x - y = 0\,.$$

Rezultat. $y = C_1e^{\operatorname{tg} x} + C_2e^{-\operatorname{tg} x}$.

1495. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''\sin x - y'\cos x - y\sin^3 x = 0\,.$$

Rezultat. $y = C_1e^{\cos x} + C_2e^{-\cos x}$.

1496. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''\cos x + y'\sin x - y\cos^3 x = 0\,.$$

Rezultat. $y = C_1e^{\sin x} + C_2e^{-\sin x}$.

1497. Data je diferencijalna jednačina

$$y'' + y'\operatorname{ctg} x + 2y = 0\,.$$

Transformisati jednačinu smenom $t = \cos x$, a zatim je rešiti.

1498. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y=0$$

uvođenjem smene $x=\operatorname{tg}t$.

1499. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$yy''+4y^2=\frac{1}{2}y'^2\,, \tag{1}$$

a zatim naći ono partikularno rešenje $y(x)$ koje zadovoljava uslove $y(0)=1$, $y'(0)=2\sqrt{2}$.

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti na dva načina, a zatim ćemo uporediti dobijena rešenja. Data jednačina je **nelinearna**, i opšte metode za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina ovde se ne mogu primeniti.

I način: Kako je

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'=\frac{yy''-y'^2}{y^2}\,,$$

oblik jednačine (1) sugeriše da ispitamo da li bi u ovoj jednačini mogla da se uvede nova funkcija smenom $u=y'/y$.

Ako oduzmemo y'^2 od obe strane jednačine (1), a zatim podelimo obe strane sa y^2, dobijamo

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}+4=-\frac{1}{2}\cdot\frac{y'^2}{y^2}\,. \tag{2}$$

Uvođenjem smene $u=y'/y$, dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$u'+4=-\frac{1}{2}u^2. \tag{3}$$

Funkciju u nalazimo iz (3), rešavanjem jednačine koja razdvaja promenljive:

$$\frac{\mathrm{d}u}{8+u^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{2}\iff u=2\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\left(C_1-x\sqrt{2}\right).$$

Dalje imamo da je

$$\frac{y'}{y}=2\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\left(C_1-x\sqrt{2}\right)\iff y=C_2\exp\left(2\sqrt{2}\int\operatorname{tg}\left(C_1-x\sqrt{2}\right)\,\mathrm{d}x\right),$$

odakle dobijamo

$$y=C_2\cos^2(C_1-x\sqrt{2})\,,$$

što je opšte rešenje date jednačine. Konstante koje određuju traženo partikularno rešenje nalazimo iz

$$\begin{aligned} y(0)=1&\Rightarrow C_2\cos^2C_1=1\\ y'(0)=2\sqrt{2}&\Rightarrow C_2\cos C_1\sin C_1=1\end{aligned} \tag{4}$$

Rešenje sistema (4) je $C_1 = \pi/4 + k\pi$ $(k \in Z)$, $C_2 = 2$. Prema tome, traženo partikularno rešenje je

$$y = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\sqrt{2}\right) .$$

U rešenju za C_1 figuriše proizvoljan ceo broj k. Da li se za razne vrednosti k dobijaju različita partikularna rešenja?

II način: Ako se obe strane date jednačine (1) diferenciraju po x, dobija se linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$y''' + 8y' = 0 . \tag{5}$$

Rešenja karakteristične jednačine $\lambda^3 + 8\lambda = 0$ su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i2\sqrt{2}$, pa je opšte rešenje diferencijalne jednačine (5) dato sa

$$y = A + B\cos(2\sqrt{2}\,x) + C\sin(2\sqrt{2}\,x) . \tag{6}$$

Funkcija data sa (6) **nije** opšte rešenje jednačine (1). Naime, opšte rešenje diferencijalne jednačine drugog reda ne može da sadrži tri proizvoljne konstante. Međutim, iz (6) se može dobiti opšte rešenje jednačine (1). Primetimo da iz $F'(x) = G'(x)$ i $F(a) = G(a)$ za neko a, sleduje $F(x) = G(x)$ za svako x. Na osnovu toga zaključujemo: Ako funkcija y zadovoljava jednačinu (5) i ako u jednoj tački $x = a$ važi jednakost (1), tj,

$$y(a)y''(a) + 4y^2(a) = \frac{1}{2}y'^2(a) ,$$

tada $y = y(x)$ zadovoljava i jednačinu (1) za svako x. Stavimo $a = 0$. Ako je y definisano sa (6), tada je

$$y(0) = A + B \ , \ y'(0) = -2\sqrt{2}C \ , \ y''(0) = -8B . \tag{7}$$

Zamenom (7) u (1) dobija se, posle sređivanja,

$$A^2 = B^2 + C^2 . \tag{8}$$

Prema tome, funkcija y, definisana sa (6) će biti rešenje date diferencijalne jednačine ako je ispunjen uslov (8), pa je opšte rešenje jednačine (1) dato sa

$$y = B\cos(2\sqrt{2}\,x) + C\sin(2\sqrt{2}\,x) \pm \sqrt{B^2 + C^2} . \tag{9}$$

Koristeći se osobinama trigonometrijskih funkcija, može se pokazati da su rešenja (9) i (1499) ekvivalentna.

1500. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1 - y^2)y'' = 2y'(1 + y') ,$$

koje zadovoljava početne uslove $y(0) = 0, y'(0) = -1$.

Rešenje. Uvedimo smenu $p = y'$. Tada je

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}$$

i data diferencijalna jednačina postaje

$$(1) \qquad (1-y^2)p\frac{dp}{dy} = 2p(1+p)\,.$$

Jedno rešenje jednačine (1) je $p = 0$, tj, $y = C$, ali ovo rešenje ne zadovoljava početne uslove. Iz jednačine

$$(1-y^2)\frac{dp}{dy} = 2(1+p)$$

nalazimo da je

$$1+p = C\frac{1-y}{1+y}.$$

Iz uslova $y'(0) = p(0) = -1$ i $y(0) = 0$, dobija se $C = 0$; stoga je $1+p = 0$, tj, $p = y' = -1$, pa je $y(x) = -x + B$, odakle se, ponovo koristeći uslov $y(0) = 0$ dobija partikularno rešenje $y(x) = -x$.

1501. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$yy'' - y'^2 = y^2 \log y\,.$$

Rešenje. **I način:** Ako datu jednačinu napišemo u obliku

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \log y\,,$$

vidimo da je pogodna smena $z = \log y$, pomoću koje se dobija

$$z'' = z\,.$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x}\,,$$

odakle se dobija opšte rešenje date jednačine:

$$(1) \qquad y(x) = \exp(C_1e^x + C_2e^{-x})\,.$$

II način: Ako uvedemo smenu $y' = p$, $y'' = p\,dp/dy$, dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^2\log y, \quad \text{tj.} \quad \frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = (y\log y)\frac{1}{p}\,.$$

Ovo je BERNOULLIjeva jednačina po p, koja se smenom $u = p^2$ transformiše u linearnu jednačinu po u:

$$\frac{du}{dy} - \frac{2}{y}u = 2y\log y ,$$

čije je rešenje

$$u = p^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2(C + (\log y)^2) . \tag{2}$$

Pomoću još jedne integracije, iz (2) dobijamo opšte rešenje koje je ekvivalentno sa (1).

1502. Naći ono rešenje diferencijalne jednačine

$$yy'' - y'^2 = y^4 ,$$

koje zadovoljava uslove $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Rešenje. Smenom $y' = p$, $y'' = p\,dp/dy$ u datoj jednačini, dobijamo

$$py\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4 \quad \text{tj.} \quad \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = \frac{y^3}{p} .$$

Ovo je BERNOULLIjeva jednačina po p, sa nezavisno promenljivom y. Smenom $p^2 = z$, svodimo je na linearnu jednačinu:

$$z' - \frac{2z}{y} = 2y^3 ,$$

čije se opšte rešenje bez teškoća dobija u obliku

$$z = y^2(C_1 + y^2) .$$

Sada idemo unatrag: Iz

$$\frac{dy}{dx} = p = \pm y\sqrt{C_1 + y^2}$$

i iz uslova $y'(0) = 0, y(0) = 1$, dobijamo da je $C_1 = -1$. Dalje, integracijom imamo

$$\pm\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \int dx .$$

Smenom $y = 1/t$, integral sa leve strane svodi se na tablični integral, pa se dobija

$$\mp \arcsin\frac{1}{y} = x + C_2 . \tag{1}$$

Iz uslova $y(0) = 1$ imamo $C_2 = \mp\pi/2$, tako da iz (1) dobijamo $y = \dfrac{1}{\cos x}$ (u oba slučaja).

1503. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(y'')^2 + (y')^2 = 1$.

Rezultat. Opšte rešenje je $y = C_1 \sin x \pm \sqrt{1 - C_1^2} \cos x + C_2$, singularno rešenje $y = \pm x$.

1504. Pokazati da se diferencijalna jednačina

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

gde su f i g proizvoljne neprekidne funkcije, može napisati u STURM–LIOUVILLEovom obliku

$$(P(x)y')' + Q(x)y = 0.$$

Rešenje. Ako obe strane date jednačine pomnožimo sa $P(x) = \exp\left(\int f(x)\,dx\right)$, dobijamo

$$y'' \exp\left(\int f(x)\,dx\right) + f(x)y' \exp\left(\int f(x)\,dx\right) + yg(x) \exp\left(\int f(x)\,dx\right).$$

Ako ovde stavimo $Q(x) = g(x) \exp\left(\int f(x)\,dx\right)$, dobijamo

$$(P(x)y')' + Q(x)y = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

1505. Data je diferencijalna jednačina

(1) $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Napisati datu jednačinu u STURM–LIOUVILLEovom obliku kao u zadatku 1504.

b) Ako su P_i i P_j rešenja jednačine (1) za $n = i, j$ respektivno, dokazati da je

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)\,dx = 0 \quad \text{za } i \neq j.$$

1506. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x((y'')^2 + 1) = 2y'y''.$$

1507. Neka je $L(y) = x^2y'' - (x^2 + 4x)y' + (2x + 6)y$.

a) Rešiti diferencijalnu jednačinu $L(y) = 0$ ako je poznato da ima jedno partikularno rešenje u obliku polinoma.

b) Rešiti jednačinu $L(y) = x^5$.

Rezultat. Partikularno rešenje u obliku polinoma je $y_p = x^2$. Jednačina $L(y) = 0$ ima opšte rešenje $y = C_1x^2 + C_2x^2e^x$; opšte rešenje jednačine $L(x) = x^5$ je $y = C_1x^2 + C_2x^2e^x - \frac{x^4}{2} - x^2(x+1)$.

1508. Naći jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + xy' - y = 0,$$

a zatim naći njeno opšte rešenje. Da li postoji partikularno rešenje date jednačine koje zadovoljava uslove

$$y'(0) = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0\ ?$$

8.6.3 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova

1509. Naći rešenja jednačine

$$xy'' - y = 0$$

koja se mogu razviti u stepeni red.

Rešenje. Neka je y rešenje date jednačine i neka je

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ako x pripada intervalu konvergencije ovog stepenog reda, tada je

$$y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Zamenom ovih izraza u diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Da bismo mogli da primenimo metod neodređenih koeficijenata, potrebno je da u obe sume imamo iste stepene promenljive x. Ako u prvoj sumi uvedemo smenu $n = m + 1$, dobijamo

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m(m+1)a_{m+1} x^m - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

ili, u obliku jedne sume,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n+1)a_{n+1} - a_n\big)x^n - a_0 = 0.$$

Odavde nalazimo da je

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n(n+1)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Prema tome,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(n-1)} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)^2(n-2)} = \cdots = \frac{a_1}{n\big((n-1)!\big)^2},$$

pri čemu je a_1 proizvoljno. Traženo rešenje diferencijalne jednačine je dato sa

$$y = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\big((n-1)!\big)^2} \qquad (a_1 \in \mathbf{R}).$$

Dobijeni red konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$.

1510. Primenom stepenih redova rešiti diferencijalnu jednačinu

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Rešenje. Neka je $y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Zamenom u datu jednačinu dobijamo

$$x\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - (x+n)\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + n\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0,$$

odnosno, posle jednostavnih transformacija,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k(k+1)a_{k+1} - k a_k - n(k+1)a_{k+1} + n a_k)x^k + n(a_0 - a_1) = 0.$$

Iz ove jednakosti zaključujemo da za svako $k = 1, 2, \ldots$ važi

$$k(k+1)a_{k+1} - k a_k - n(k+1)a_{k+1} + n a_k = 0, \quad \text{tj.}$$

$$(k-n)((k+1)a_{k+1} - a_k) = 0.$$

Odavde je $k = n$ ili $(k+1)a_{k+1} = a_k$, pa je

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{a_0}{k!}, & k \le n \\ \text{proizvoljno} & k = n+1 \\ \dfrac{(n+1)!}{k!}a_{n+1}, & k > n+1 \end{cases}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k x^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + a_{n+1}x^{n+1} + (n+1)!a_{n+1} \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + C \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (C = a_{n+1}(n+1)!)\,. \end{aligned}$$

Ovako dobijeno y sadrži dve proizvoljne konstante, pa je to opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

Zadatak i rešenje predložio je dr Slobodan Simić.

1511. Odrediti rešenje diferencijalne jednačine

$$x(1+x)(2+(2-p)x)y'' + ((p^2-p-2)x^2 - 4x - 2)y' + 2p(1+(2-p)x)y = 0\,,$$

$(p \in \mathbf{R})$, koje može da se razvije u stepeni red.

Rezultat. $y = C_1x^2 + C_2\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}x^k = C_1x^2 + C_2(1+x)^p\,.$

1512. Pomoću stepenih redova naći rešenje diferencijalne jednačine

$$(6x^2 - 5x + 1)y'' + 2(12x - 5)y' + 12y = 0$$

koje ispunjava uslove $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$.

Rezultat. $y = \sum_{n=0}^{+\infty}(3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n)x^n = \dfrac{3}{1-2x} - \dfrac{2}{1-3x}\,.$

1513. Koristeći se razvojem u stepeni red, odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(x^2 - x + 1)y'' + (4x - 2)y' + 2y = 0,$$

a zatim odrediti (u konačnom obliku) ono partikularno rešenje za koje važi $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Rezultat. Opšte rešenje je $y = \dfrac{C_1(1-x) + C_2 x}{1 - x + x^2}$. Traženo partikularno rešenje se dobija za $C_1 = 0, C_2 = 1$.

Primedba. Diferencijalne jednačine u zadacima 1512 i 1513 mogu se rešiti i direktno, ako se uoči da su one ekvivalentne sa

$$((6x^2 - 5x + 1)y)'' = 0, \quad \text{odnosno sa} \quad ((x^2 - x + 1)y)'' = 0.$$

1514. Primenom stepenih redova rešiti diferencijalnu jednačinu

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

Uputstvo. Tražeći rešenje u obliku stepenog reda, pokazati da je jedno partikularno rešenje dato sa

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \cos\sqrt{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

Drugo partikularno rešenje može se dobiti primenom LIOUVILLEove formule.

1515. Dokazati da je funkcija

$$y = J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

partikularno rešenje jednačine

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

1516. Pomoću razvoja u stepeni red, naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(1 - x^2)y'' - xy' - y = 0.$$

Rezultat. Opšte rešenje je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, gde je

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1+2^2}{4!}x^4 + \frac{(1+2^2)(1+4^2)}{6!}x^6 + \cdots$$

$$y_2 = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2(1+3^2)}{5!}x^5 + \frac{2(1+3^2)(1+5^2)}{7!}x^7 + \cdots$$

1517. Data je diferencijalna jednačina

$$(1-x^2)y''-xy'=0\,.$$

Primenom stepenih redova odrediti ono partikularno rešenje za koje je $y(0)=1$, $y'(0)=0$, a zatim odrediti opšte rešenje date jednačine.

Rezultat. Opšte rešenje je $y=C_1+C_2\arcsin x$.

1518. Da li jednačina

$$x^2y''+(x^2-x)y'+2y=0$$

ima rešenje $y\not\equiv 0$ koje se može razviti u stepeni red ?

Rešenje. Nema. Naime, ako pretpostavimo da je $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, zamenom u jednačinu dobijamo

$$2a_0+a_1x+(2a_2+a_1)x^2+(5a_3+2a_2)x^3+\cdots=0\,,$$

odakle dobijamo da je $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=0\ldots$

1519. Dati su diferencijalna jednačina

$$y''+y'+py=(3-4x)e^x$$

i stepeni red

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+n}{n!}x^n\,.$$

a) U zavisnosti od $p\in\mathbf{R}$ naći rešenja date jednačine.

b) Ispitati konvergenciju datog reda i naći njegovu sumu $f(x)$. Zatim odrediti p tako da funkcija $y=f(x)$ bude rešenje date jednačine.

Rezultat. b) $f(x)=e^{2x}+xe^x$, $p=-6$.

1520. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''+2xy'+4y=0$$

u obliku stepenog reda. Na osnovu toga odrediti jednu smenu nepoznate funkcije u konačnom obliku, pomoću koje se data jednačina transformiše u linearnu jednačinu prvog reda.

1521. Naći dva linearno nezavisna rešenja diferencijalne jednačine

$$2x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$$

u obliku stepenog reda.

1522. Naći u obliku stepenog reda partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

za koje je $y(0) = 1$.

1523. Naći dva linearno nezavisna partikularna rešenja diferencijalne jednačine

$$y'' - xy' + ay = 0 \qquad a \in \mathbf{R},$$

u obliku stepenog reda. Posebno razmotriti slučaj kada je a ceo broj.

8.7 Razni zadaci

8.7.1 Granične vrednosti

1524. Ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$ i ako je $f([a,b]) \subset [a,b]$, dokazati da f ima bar jednu nepokretnu tačku na $[a,b]$.

Rešenje. Neka je $F(x) = f(x) - x$. Funkcija F je neprekidna na $[a,b]$ i važi

$$F(a) = f(a) - a \geq 0\,, \quad F(b) = f(b) - b \leq 0\,.$$

Prema tome, funkcija F ima bar jednu nulu na $[a,b]$ i to je nepokretna tačka funkcije f.

1525. Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b), pri čemu je $f([a,b]) \subset (a,b)$ i $f'(x) \neq 1$ za $x \in (a,b)$, tada na $[a,b]$ postoji jedinstvena nepokretna tačka funkcije f.

Rešenje. Na osnovu zadatka 1524, funkcija f ima bar jednu nepokretnu tačku na $[a,b]$. Pretpostavimo da postoji još jedna nepokretna tačka. Tada funkcija $F(x) = f(x) - x$ ima dve nule u $[a,b]$, te na osnovu ROLLEove teoreme, postoji tačka $c \in (a,b)$ tako da je $F'(c) = 0$, tj. $f'(c) = 1$, što je protivno pretpostavci da je $f'(x) \neq 1$.

Primedba. Uporediti sa 3.2.4.

1526. Definišimo niz funkcija f_n pomoću

$$f_1(x) = \sin x\,, \qquad f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x))\,, \quad n = 2,3,\ldots$$

Ako je $x \in (0,\pi)$, dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

kao i da je

$$f_n(x) \sim \sqrt{3n} \qquad (n \to +\infty)\,.$$

Uputstvo. Iskoristiti nejednakosti iz zadatka 1466

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\,, \quad x > 0\,.$$

1527. Date su infinitezimale

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arcsin(\log t)}{t}\,\mathrm{d}t\,, \quad g(x) = (x-1)^a \quad (x \to 1)\,.$$

Odrediti $a \in \mathbf{R}$ tako da infinitezimale budu istog reda.

Rezultat. Infinitezimale će biti istog reda ako je

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \frac{\arcsin(\log t)}{t}\,dt}{(x-1)^a} = C\,, \tag{1}$$

gde $C \neq \pm\infty$ i $C \neq 0$.

Konačna i različita od nule granična vrednost dobija se samo za $a = 2$ i tada je $C = 1/2$.

1528. Odrediti realne brojeve a, b, c, d, tako da

$$\Delta(x) = e^x - a\cos x - b\cos 2x - c\sin x - d\sin 2x$$

bude beskonačno mala veličina najvećeg mogućeg reda u odnosu na x kad $x \to 0$.

Rešenje. Neka je

$$\Delta(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Ako je nekoliko prvih koeficijenata u ovom razvoju jednako nuli, recimo $a_0 = a_1 = \cdots a_{k-1} = 0, a_k \neq 0$, tada ćemo imati da je

$$\Delta(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots = x^k(a_k + a_{k+1}x + \ldots)\,;$$

i $\Delta(x) = O(x^k)$ kad $x \to 0$.

Kako imamo 4 neodređena parametra, možemo da izjednačimo sa nulom koeficijente uz x^0, x^1, x^2 i x^3, i da proverimo da li je koeficijent uz x^4 jednak nuli.

Koristeći MACLAURINove razvoje (do x^4) funkcija koje se pojavljuju u izrazu za $\Delta(x)$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots\right) - a\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)\\ &\quad -b\left(1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} - \cdots\right) - c\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) - d\left(2x - \frac{8x^3}{6} + \cdots\right)\\ &= (1 - a - b) + (1 - c - 2d)x + \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + 2b\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{c}{6} + \frac{4d}{3}\right)x^3\\ &\quad + \left(\frac{1}{24} - \frac{a}{24} - \frac{2d}{3}\right)x^4 + \cdots \qquad (1)\end{aligned}$$

Izjednačavanjem sa nulom prva četiri koeficijenta, dobijamo sistem jednačina čije je rešenje :

$$a = \frac{5}{3},\ b = -\frac{2}{3},\ c = \frac{5}{3},\ d = -\frac{1}{3}\,. \tag{2}$$

Sa ovako određenim a, b, c, d, koeficijent uz x^4 u (1) je jednak $5/12$, pa je $\Delta(x) = O(x^4)$, i to je najveći mogući red ove beskonačno male veličine.

1529. Neka je $\{f_n\}$ niz monotono rastućih funkcija definisanih na $\mathbf{R}$ i takvih da je skup brojeva $\{f_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ ograničen za svako $x \in \mathbf{R}$.

a) Dokazati da postoji jedan podniz $\{g_n\}$ datog niza, tako da je niz $\{g_n(x)\}$ konvergentan za svako $x \in \mathbf{Q}$.

b) Za $x \in \mathbf{R}$, neka je $f(x) = \overline{\lim}\, g_n(x)$, gde je g_n niz čija je egzistencija utvrđena pod a). Dokazati da je funkcija f monotono rastuća i da $g_n(x)$ konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački x u kojoj je funkcija f neprekidna.

c) Dokazati da niz $\{g_n\}$ sadrži jedan podniz koji je konvergentan u svakoj tački $x \in \mathbf{R}$.

1530. Neka je $I_n = \int_0^1 x^n \arcsin x \, \mathrm{d}x$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

a) Izračunati I_0. Dokazati da je $\{I_n\}$ monoton i ograničen niz i odrediti njegovu graničnu vrednost.

b) Izračunati $\lim nI_n$.

Rezultat. a) $I_0 = \pi/2 - 1$; $\lim I_n = 0$; b) $\lim nI_n = \pi/2$.

1531. Ako je funkcija f neprekidna na $[0, 1]$ i na tom segmentu ima neprekidan prvi izvod, dokazati da je

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

8.7.2 Izvodi

1532. Neka je funkcija f nepekidna na $[a, +\infty)$ i diferencijabilna na $(a, +\infty)$, pri čemu je $f'(x) > l$ za neko $l > 0$. Neka je $f(a) < 0$. Dokazati da jednačina $f(x) = 0$ ima jedan i samo jedan realan koren na intervalu $(a, a - f(a)/l)$.

1533. Neka je funkcija f definisana i neprekidna na nekom otvorenom intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Definišimo

$$f_1(x) = \lim_{t \to x} \frac{1}{t - x} \int_x^t \frac{f(u) - f(x)}{u - x}\, \mathrm{d}u,$$

u onim tačkama x u kojima postoji konačna granična vrednost sa desne strane.

Ako u tački x postoji $f'(x)$, dokazati da je $f_1(x) = f'(x)$. Pokazati na primeru da obrnuto ne važi, tj. da je moguće da postoji $f_1(x)$, a da ne postoji $f'(x)$.

1534. Nazovimo funkciju f_1 definisanu u zadatku 1533 **generalisanim izvodom** funkcije f. Dokazati:

a) Ako funkcija f ima lokalni ekstremum u tački a i ako u toj tački ima generalisani izvod $f_1(a)$, tada je $f_1(a) = 0$.

b) Ako f ima generalisani izvod f_1 u svakoj tački intervala (a, b), tada postoji $c \in (a, b)$ tako da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f_1(c) .$$

1535. Data je funkcija $f(x) = (\operatorname{arsh} x)^2$.

a) Dokazati da je

$$(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) - 1 = 0 . \tag{1}$$

b) Polazeći od ove jednakosti, ili na drugi način, odrediti $f^{(n)}(0)$.

Rešenje. b) Funkcija f može se razviti u MACLAURINov red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \qquad (a_n = f^{(n)}(0)) . \tag{2}$$

Nalaženjem izvoda f' i f'' iz (2) i zamenom u (1), dobijamo

$$a_2 - 1 + (a_3 + a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+2}}{n!} + \frac{a_n}{(n-2)!} + \frac{a_n}{(n-1)!} \right) x^n = 0 . \tag{3}$$

Iz (3) dobijamo jednakosti

$$a_2 = 1, \qquad a_{n+2} + n^2 a_n = 0 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Neka je n neparan broj, $n = 2k - 1$. Kako je $f'(0) = 0$, imamo da je $a_1 = 0$, pa iz (4) zaključujemo da je $a_{2k+1}=0$ za svako $k = 1, 2, \ldots$.

Za $n = 2k, k = 1, 2 \ldots$, iz (4) dobijamo da je $a_{2k} = (-1)^{k+1} ((2k - 2)!!)^2$.

Prema tome, izvodi funkcije f u nuli su

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 1, 3, 5, \ldots \\ (-1)^{(n/2)+1} ((n-2)!!)^2 & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

1536. Koristeći se razvojem u stepene redove, odrediti n–ti izvod funkcije $x \mapsto e^{x^2}$ u proizvoljnoj tački $x \in \mathbf{R}$.

Rešenje. Polazeći od razvoja

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

nalazimo da je

$$\left(e^{x^2}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(x^{2k}\right)^{(n)}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{n} n!}{k!} x^{2k-n}$$
$$= n! \sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{+\infty} \frac{1}{k!} \binom{2k}{n} x^{2k-n},$$

jer je $\binom{2k}{n} = 0$ za $n > 2k$, tj. za $k < \frac{n}{2}$.

8.7.3 Funkcije, integrali i redovi

1537. Neka je

$$F_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Dokazati da je

$$F_n(x+y) = e^{-y} \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} F_{n-k}(x).$$

1538. Funkcija f definisana je sa

$$f(x) = \int_1^x 2t\big(\log(t^2-1)+1\big)\ \mathrm{d}t \quad (x > 1), \qquad f(-x) = f(x)\ .$$

Odrediti f, a zatim ispitati funkciju $y = f(x)$ i nacrtati njen grafik.

Rezultat. $f(x) = (x^2-1)\log(x^2-1)$ $(x \neq \pm 1)$; $f(\pm 1) = 0$.

1539. Odrediti a i b tako da kriva čija je jednačina

$$y(x) = \int_x^{+\infty} (t-a)(t-b)e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

dodiruje x-osu u tački čija je apscisa jednaka 1. Zatim ispitati tako dobijenu krivu.

Rešenje. Kriva dodiruje x-osu u tački $x = 1$ ako i samo ako je $y(1) = 0$ i $y'(1) = 0$. Iz ovih uslova dobija se $a = 1$, $b = 3$.

Ovako dobijena kriva ima jedinu nulu za $x = 1$, i u toj tački kriva dodiruje x-osu. Izvod funkcije je

$$y'(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x}\ ,$$

pa funkcija ima minimum u $x = 1$ i maksimum u $x = 3$. Drugi izvod je

$$y''(x) = (x^2 - 6x + 7)e^{-x} ,$$

odakle se dobijaju dve prevojne tačke: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$.

1540. Data je funkcija

$$y = f(x) = (a - x)\sqrt{1 - x^2} \qquad (a > 1) .$$

a) Odrediti ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije f.

b) Izračunati integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{f(x)} .$$

Rezultat. **a)** Funkcija ima maksimum za $x = \dfrac{x - \sqrt{a^2 + 8}}{4}$. Prevojne tačke su ona rešenja jednačine

$$x^3 = \frac{3}{2}x - \frac{a}{2}$$

u kojima drugi izvod menja znak. Funkcija ima jednu prevojnu tačku za $a \leq \sqrt{2}$ i tri prevojne tačke za $a \in [1, \sqrt{2})$.

b) $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

1541. Neka je

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1} .$$

Ispitati datu funkciju, a zatim izračunati veličinu površine koju ograničava kriva $y = f(x)$ i pozitivni deo x-ose.

Rezultat. Funkcija je parna. Lokalni minimum za $x = 0$, maksimumi za $x = \pm 1$. Obostrana horizontalna asimptota $x = 0$. Prevojne tačke za $x = \pm\sqrt{(12 \pm \sqrt{12})/6}$. Veličina tražene površine je $2^{-3/2}\pi$.

1542. Data je funkcija

$$y = f(x) = \frac{\log x}{x^2} .$$

a) Ispitati datu funkciju i nacrtati njen grafik.

b) Naći TAYLOROV polinom četvrtog stepena za ovu funkciju u okolini tačke 1.

c) Dokazati da veličina površine između date krive, x-ose i pravih $x = 1$ i $x = a$ $(a > 1)$, teži konačnoj vrednosti kad $a \to +\infty$.

Rezultat. a) Jedina nula funkcije je $x = 1$. Funkcija ima maksimum u $x = \sqrt{e}$, i prevojnu tačku $x = e^{5/6}$. Za $x > e^{5/6}$ funkcija je konveksna, inače je konkavna.

b) $T_4(t) = t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 - \frac{77}{12}t^4 \quad (t = x - 1)$.

c) Veličina tražene površine je $P(a) = 1 - \frac{1}{a}(\log a + 1)$; $\lim_{a \to +\infty} P(a) = 1$.

1543. Ispitati funkciju datu sa

$$y = f(x) = x^3 e^{-x^2/2}.$$

Zatim izračunati veličinu površine koju ograničavaju data kriva, x-osa i prava $x = a$ $(a > 0)$. Da li postoji $\lim_{a \to +\infty} S(a)$?

Rezultat. Veličina površine koja se traži u zadatku je

$$S(a) = \int_0^a x^2 e^{-x^2/2} x \, dx = 2 - 2e^{-a^2/2}(1 + \frac{a^2}{2}),$$

dok je $\lim_{a \to +\infty} S(a) = 2$.

1544. Luk krive

$$y = \frac{\log|x| + 1}{x},$$

x–osa i prava $x = a$ $(a > 1/e)$ ograničavaju deo ravni. Za koju vrednost a je površina tog dela ravni jednaka 4 ?

Rešenje. Data funkcija je ispitana u zadatku 634. Oslanjajući se na rezultate koji su tamo izvedeni, zaključujemo da je veličina tražene površine data sa

$$P(a) = \int_{1/e}^a \frac{\log x + 1}{x} \, dx = \frac{1}{2}\log^2 a + \log a + \frac{1}{2}.$$

1545. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = f(x) = \log(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Zatim izračunati površinu $P(a)$ ograničenu lukom krive f, pravim linijama $x = a$ $(1 < a < \sqrt{2})$ i $x = \sqrt{2}$, i x-osom. Naći $\lim_{a \to 1_+} P(a)$.

Rezultat. $P(a) = \frac{1}{2}\log\frac{a-1}{a+1} - a\log(a^2 - 1) - \frac{1}{2}\log(3 - \sqrt{2}) + 2a - 2\sqrt{2}$,

$\lim_{a \to 1_+} P(a) = +\infty$.

1546. a) Ispitati krivu

$$y = \frac{|3-x| \pm \sqrt{1+x}}{1-x}, \quad (x > 1).$$

b) Izračunati veličinu površine koju ograničavaju data kriva i prave $x = 2$ i $x = 4$.

Rezultat. b) Veličina površine je

$$4(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}\log\frac{14\sqrt{6}+35-10\sqrt{10}-8\sqrt{15}}{3}.$$

1547. a) Nacrtati krivu $y = e^{-x}\sin x$ i izračunati veličinu površine S_n koju ograničavaju data kriva i odsečak x-ose od $x = n\pi$ do $x = (n+1)\pi$.

b) Dokazati da veličine S_n obrazuju opadajuću geometrijsku progresiju.

c) Naći zapreminu V_0 tela koje nastaje obrtanjem površine S_0 oko x-ose.

Rezultat. a) $S_n = \frac{1}{2}e^{-n\pi}(1+e^{-\pi})$, c) $V_0 = \frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})$.

1548. Data je funkcija

$$y = f(x) = e^{-x}\sqrt{\sin x} \qquad (x \geq 0).$$

Izračunati zbir zapremina svih tela koja se dobijaju kada površine ograničene krivom $y = f(x)$ i x-osom rotiraju oko x-ose.

Rezultat. $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$.

1549. Izračunati zbir zapremina svih tela koja se dobijaju kada površine ograničene krivom

$$y = f(x) = e^{-x}\sqrt{\cos x} \qquad (x \geq 0)$$

i x-osom, rotiraju oko x-ose.

Rezultat. $\frac{\pi}{5}\left(2 + e^{-\pi} + \frac{e^{-3\pi}}{1-e^{-2\pi}}\right)$.

1550. Kriva C je zadata jednačinom

(1) $$x^3 - 3x^2 + xy^2 + y^2 = 0.$$

a) Ispitati krivu C i nacrtati njen grafik.

b) Luk date krive, y-osa i kriva $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ograničavaju jednu površinu koja leži u prvom kvadrantu. Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem ove površine oko x-ose.

Rezultat. $V = 4\pi(3 - 2\log 2)$.

1551. Ispitati funkciju

$$y = f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} - (x-4)^{1/3} ,$$

a zatim naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko y-ose površine ograničene delom krive $y = f(x)$ i koordinatnim osama.

Rešenje. Data funkcija je definisana za svaku realnu vrednost argumenta x. Granične vrednosti su

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty .$$

Funkcija nema asimptota. Iz $f(x) = 0$ dobija se jednačina $x^2 - 16x + 64 = 0$, koja ima jedno dvostruko realno rešenje $x = 8$. Prema tome, $f(8) = 0$, i funkcija u toj tački ne menja znak, pa je $f(x) > 0$ za svako $x \neq 8$. Prvi izvod je

$$y' = \frac{2}{3\cdot 4^{2/3}x^{1/3}} - \frac{1}{3(x-4)^{2/3}} .$$

Odavde zaključujemo da funkcija ima povratnu tačku u $x = 0$, gde je levi izvod jednak $-\infty$, a desni $+\infty$. U tački $x = 4$ je i levi i desni izvod jednak $-\infty$. Prvi izvod je jednak nuli za $x_1 = 2$ (maksimum, $y_{\max} = f(2) = 2^{2/3} + 2^{1/3} \approx 1.89$) i za $x_2 = 8$ (minimum, $y_{\min} = 0$). Vrednost funkcije u nuli je $y(0) = 4^{1/3} \approx 1.58$.

Drugi izvod je

$$y'' = -\frac{1}{9\cdot 2^{1/3}x^{4/3}} + \frac{2}{9(x-4)^{5/3}} .$$

Jedna prevojna tačka je rešenje jednačine

$$16x^4 = (x-4)^5 .$$

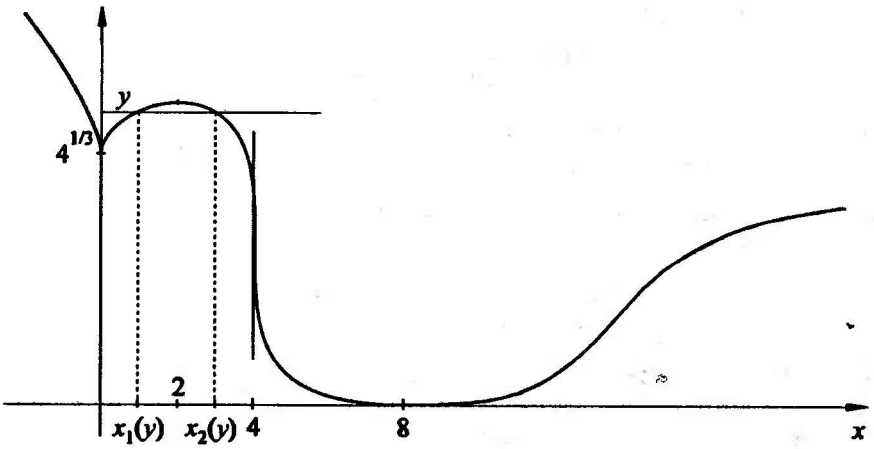
Skiciranjem grafika funkcija $x \mapsto 16x^4$ i $x \mapsto (x-4)^5$, nalazimo da ova jednačina ima samo jedno rešenje, koje je veće od 4. Numeričkim metodama se dobija prevojna tačka $x_3 \approx 31.5$. Međutim, zbog prekida drugog izvoda u $x = 0$ i $x = 4$, imamo da je f konveksna ($y'' > 0$) za $x \in (4, x_3)$ i konkavna u ostalim tačkama u kojima je definisana.

Grafik funkcije je prikazan na slici 46

U drugom delu deo zadatka traži se veličina zapremine tela koje nastaje rotacijom oko y-ose površine ograničene ovom krivom i koordinatnim osama. To je deo krive od $x = 0$ do $x = 8$. Primenom formule za zapreminu rotacionog tela, imamo

$$V = \pi \int_0^{y(2)} x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \pi \int_{y(0)}^{y(2)} x_1^2(y)\,\mathrm{d}y , \tag{1}$$

gde su $x_1(y)$ i $x_2(y)$ rešenja jednačine $f(x) = y$ levo odnosno desno od prave $x = 2$ (videti grafik). Međutim, eksplicitni oblik funkcija $x(y), x_1(y), x_2(y)$ nije moguće naći. Zbog toga integrale po y u (1) moramo svesti na integrale po x. Primetimo



Slika 46. *Uz zadatak 1551.*

da je:

$$\int_0^{y(2)} x_2^2(y)\,dy = \int_8^2 x^2 \frac{dy}{dx}\,dx = -\int_2^8 x^2 y'(x)\,dx\,,$$

$$\int_{y(0)}^{y(2)} x_1^2(y)\,dy = \int_0^2 x^2 \frac{dy}{dx}\,dx = \int_0^2 x^2 y'(x)\,dx\,.$$

Odavde je

$$V = -\pi \int_0^8 x^2 y'(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Izračunavanjem integrala (parcijalnom integracijom ili kao binomni diferencijal), dobijamo da je

$$V = \pi \frac{144}{7} \sqrt[3]{4}\,.$$

Primedba. U ovom zadatku postoji nekoliko važnih tačaka: Najpre, pri ispitivanju funkcije, potrebno je uočiti specifičnosti tačaka $x = 0$ i $x = 4$. Zatim, bez formule (2) pomoću koje se zapremina tela koje nastaje rotacijom površine oko y-ose izražava integralom po x, bi bilo nemoguće odrediti V.

1552. Kriva C je definisana jednačinom

$$(y - x)^2 = x^3\,. \tag{1}$$

a) Nacrtati krivu C.

b) Kriva C i prava $x = 1$ grade krivolinijski trougao. Izračunati površinu P tog trougla i zapreminu V obrtnog tela koje nastaje rotacijom trougla oko x-ose.

Rezultat. **b)** $P = \frac{4}{5}$, $V = \frac{8\pi}{7}$.

1553. Naći krivinu $K(x)$ krive $y = 4x^3/a^2$ $(a \neq 0)$ u tački x. Zatim odrediti a tako da srednja vrednost krivine na segmentu $[0,1]$ bude jednaka krivini u tački $x = 1/2$.

Rešenje. Kako je $y' = 12x^2/a^2$, $y'' = 24x/a^2$, imamo da je

$$K(x) = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{24a^4x}{(a^4+144x^4)^{3/2}}.$$

Srednja vrednost krivine na segmentu $[0,1]$ je

$$\bar{K} = \int_0^1 K(x)\,\mathrm{d}x = 24a^4 \int_0^1 \frac{x}{(a^4+144x^4)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}},$$

gde je uvedena smena $t = 12x^2/a^2$. Poslednji integral se rešava smenom $t = (y^2-1)^{-1/2}$ (kao binomni diferencijal), pri čemu se dobija

$$\bar{K} = \frac{12}{\sqrt{a^4+144}}.$$

Iz uslova da srednja vrednost krivine treba da bude jednaka krivini u $x = 1/2$, dobijamo

$$\frac{12}{\sqrt{a^4+144}} = \frac{12a^4}{(a^4+9)^{3/2}},$$

odakle sleduje

$$(b+9)^3 = b^2(b+144) \qquad (b = a^4).$$

Rešavanjem ove (kvadratne!) jednačine dobija se samo jedno pozitivno rešenje za b:

$$b = a^4 = \frac{27+9\sqrt{61}}{26} \Rightarrow a = \pm\sqrt[4]{\frac{27+9\sqrt{61}}{26}}.$$

1554. Naći sve neprekidne i pozitivne funkcije f za koje važi

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x}.$$

Rešenje. Ako je f pozitivna i neprekidna funkcija, takva je i funkcija $1/f$, pa su obe funkcije integrabilne; funkcije $\sqrt{f}$ i $\sqrt{1/f}$ su kvadratno integrabilne na

$[0,1]$. Iz CAUCHYjeve integralne nejednakosti (zadatak 1447) primenjene na ove dve funkcije sleduje

$$(1) \qquad 1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Jednakost u 1 nastupa ako i samo ako su funkcije $\sqrt{f}$ i $1/\sqrt{f}$ linearno zavisne, tj. ako postoji konstanta c takva da za svako $x \in [0,1]$ važi

$$\sqrt{f(x)} = c\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,,$$

odakle je $f(x) = c$.

Prema tome, jedina pozitivna i neprekidna funkcija za koju data jednakost važi je funkcija identički jednaka pozitivnoj konstanti.

1555. Dokazati da je $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Uputstvo. Poći od

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \int_0^1 e^{-x\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x\log x)^k}{k!}\,\mathrm{d}x\,.$$

1556. Odrediti (ako postoji)

$$\lim_{x\to-\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n\,.$$

Uputstvo. Pokazati da je, za $a > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-a}{n}\right)^n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-at}}\,,$$

i zatim pokazati da je granična vrednost integrala kad $a \to +\infty$ jednaka 0.

8.7.4 Wallisova i Stirlingova formula. Izračunavanje broja π.

1557. Dokazati formulu WALLISa:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\,.$$

Rešenje. Za $0 < x < \pi/2$ i $n \in \mathbf{N}$, važe nejednakosti

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

odakle je

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx,$$

tj. (videti zadatak 834)

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Odavde se dobija

$$x_n = \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n} = y_n.$$

Kako je

$$0 < y_n - x_n = \frac{1}{2n} x_n < \frac{\pi}{4n} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

zaključujemo da je

$$\frac{\pi}{2} = \lim x_n = \lim y_n,$$

što je i trebalo dokazati.

Primedba. WALLISova formula daje mogućnost izračunavanja broja π pomoću racionalnih aproksimacija. Prvih nekoliko članova niza $2x_n$ je:

$$\frac{8}{3}, \frac{128}{45}, \frac{512}{175}, \cdots$$

Ovaj niz sporo konvergira. Za izračunavanje broja π koriste se brže konvergentni postupci, kao u zadacima 1559– 1561.

1558. Polazeći od razvoja funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ u stepeni red (zadatak 1023a), dokazati da je

$$\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Primedba. Ovaj razvoj je poznat pod nazivom LEIBNIZov red.

1559. Polazeći od razvoja funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ u stepeni red, dokazati da je

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots\right).$$

1560. Polazeći od formule

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y, \qquad (xy < 1)$$

i uzimajući da je $x = 1/2$, $y = 1/3$, dokazati formulu

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \cdots\right).$$

1561. Dokazati formulu MACHINa:

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \cdots\right)$$

Uputstvo. Ako stavimo da je $\alpha = \operatorname{arctg}(1/5)$ i da je $\beta = \operatorname{arctg}(1/239)$, tada je $\pi = 16\alpha - 4\beta$.

1562. Dokazati formulu STIRLINGa:

$$n! = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \qquad (0 < \theta_n < 1).$$

Rešenje. Koristeći se razvojem funkcije $x \mapsto \log(1+x)$ u stepeni red, dobijamo razvoj

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}, \qquad |x| < 1.$$

Ako ovde stavimo $x = 1/(2n+1)$, gde je n prirodan broj, imamo razvoj

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}.$$

Iz poslednje jednakosti nalazimo da je

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right) = 1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

odakle dobijamo da je (videti i zadatak 612):

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Posmatrajmo niz $\{x_n\}$ definisan sa

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}.$$

Imamo da je

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}.$$

Iz izvedenih nejednakosti sleduje da je

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+1}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}{e^{\frac{1}{12n}}}.$$

Prema tome, niz x_n je opadajući i ograničen, dok je niz $x_n e^{-1/12n}$ rastući i ograničen. Očigledno je da oba niza imaju istu graničnu vrednost c; kako je, za svako $n \in \mathbf{N}$,

$$x_n e^{-1/12n} < c < x_n,$$

postoji neko $\theta_n \in (0,1)$ tako da je

$$c = x_n e^{-\theta_n/12n}, \quad \text{tj.} \quad x_n = c e^{\theta_n/12n}.$$

S obzirom na definiciju niza x_n, odavde dobijamo da je

$$n! = c\frac{n^{n+1/2}}{e^{n-\frac{\theta_n}{12n}}}. \tag{1}$$

Ostaje još da se odredi vrednost konstante c. Ako u WALLISovoj formuli (zadatak 1557)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{2n+1}$$

stavimo, na osnovu (1), da je

$$n! = c\frac{n^{n+1/2}}{e^{n-\frac{\theta_n}{12n}}}, \quad (2n)! = c\frac{(2n)^{2n+1/2}}{e^{2n-\frac{\theta'_n}{24n}}},$$

dobijamo

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} c^2 \frac{n}{2} e^{(4\theta_n-\theta'_n)/12n}\frac{1}{2n+1} = \frac{c^2}{4},$$

odakle je $c = \sqrt{2\pi}$. Zamenom ove vrednosti u (1), dobijamo traženu formulu.

Primedba. STIRLINGova formula se često koristi u asimptotskom obliku

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \qquad (n \to +\infty).$$

1563. Ispitati konvergenciju reda $\sum a_n x^n$, gde je

$$a_n = \frac{(n^2-1)!}{e^{n^2} n^{n+1}((n-1)!)^{2n}}.$$

Uputstvo. Primenom STIRLINGove formule pokazati da je

$$a_n \sim \frac{1}{n^2 e (2\pi)^{n-1/2}} \qquad (n \to +\infty)$$

odakle je $R = 2\pi$ poluprečnik konvergencije datog reda.

1564. Koristeći STIRLINGovu formulu ili na drugi način, dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \log \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right) = \frac{1}{2}(1 - \log 2).$$

1565. Za koje vrednosti $p \in \mathbf{R}$ konvergira red $\sum a_n$, gde je

$$a_n = \frac{n!}{(n+1)^{n+p}} e^n \ ?$$

Rešenje. Primenom STIRLINGove formule imamo, kad $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} b_n &\sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}}{(n+1)^{n+p}} e^n = \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2}}{n^{n+p}(1+1/n)^{n+p}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}(1+1/n)^{n+p}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}}{e} \cdot \frac{1}{n^{p-1/2}}. \end{aligned}$$

Primenom poredbenog kriterijuma nalazimo da red konvergira za $p > 3/2$ i da divergira za $p \leq 3/2$.

Rešiti zadatak i primenom GAUSSovog kriterijuma.

8.7.5 Cantorov skup*

1566. Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je **skup mere nula** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji familija intervala ukupne dužine ε ili manje, tako da je skup A podskup unije pomenutih intervala.

Dokazati da je skup $\mathbf{N}$ mere nula, dok skup $(0,1)$ nije mere nula.

Rešenje. Za dato $\varepsilon > 0$, neka je A_n interval dužine $\varepsilon/2^n$ koji sadrži prirodan broj n; na primer,

$$A_n = (n - \varepsilon/2^{n-1}, n + \varepsilon/2^{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Tada je $\mathbf{N} \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, pri čemu je ukupna dužina intervalâ jednaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon .$$

Prema tome, skup $\mathbf{N}$ jeste mere nula.

Interval $(0,1)$ ne može se pokriti intervalima ukupne dužine manje od 1, pa ovaj skup nije mere nula.

1567. Dokazati da je svaki prebrojiv skup realnih brojeva skup mere nula.

1568. Neka je F_0 interval $[0,1]$. Podelimo F_0 na tri jednaka dela i odstranimo srednji deo; tako dobijeni skup označimo sa F_1:

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] .$$

Na svakom od dva dobijena zatvorena intervala primenimo isti postupak odstranjivanja srednjeg dela; dobijeni skup označimo sa F_2:

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] .$$

Nastavljanjem ovog postupka do beskonačnosti, dobijamo niz skupova

$$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \ldots$$

Neka je

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n .$$

Skup F se naziva CANTOROvim skupom.

Dokazati da CANTOROv skup ima sledeće osobine:

a) Skup F je neprazan i zatvoren skup.

b) $x \in F$ ako i samo ako je

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \qquad a_k \in \{0, 2\}$$

c) card $F = c$,

d) Skup F je mere nula.

Rešenje. **a)** Iz konstrukcije skupa F sleduje da tačke koje su krajevi odstranjenih intervala,

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \ldots$$

pripadaju skupu F. Prema tome, F je neprazan skup. Kako je F presek zatvorenih skupova F_n $(n = 0, 1, \ldots)$, zaključujemo da je F zatvoren skup.

b) Svaki realan broj u $[0, 1]$ može da se napiše u sistemu sa osnovom 3 na sledeći način:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \qquad a_k \in \{0, 1, 2\} \tag{1}$$

Primetimo da ovaj razvoj nije jednoznačan; na primer,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots \\ &= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots \end{aligned}$$

Prema tome, treba dokazati da brojevi koji ostaju u skupu F imaju bar jedan razvoj tipa (1) u kome se ne pojavljuje jedinica ni na jednom mestu, i da svi takvi brojevi ostaju u skupu F. Ovo sleduje iz konstrukcije skupa F. Naime, skup F_1 se dobija kada se iz intervala $[0, 1]$ ukloni interval $(1/3, 2/3)$, tj. svi elementi koji u razvoju (1) imaju jedinicu na prvom mestu (za $k = 1$). Dalje, F_2 se dobija kada se iz F_1 uklone svi elementi koji u razvoju imaju jedinicu na drugom mestu, itd. Prema tome, skup F sadrži one i samo one elemente koji u razvoju (1) nemaju jedinice.

c) Da bismo dokazali da skup F ima kardinalni broj c, primetimo da se, na osnovu rezultata pod b), svakom $x \in F$ može jednoznačno pridružiti jedan niz koji odgovara razvoju (1):

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (a_i \in \{0, 2\}). \tag{2}$$

Prema zadatku 16, kardinalni broj skupa svih nizova oblika (2) jednak je c, pa je i card $F = c$.

d) Kako je

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots \frac{2^n}{3^n} + \cdots = 1,$$

zbir dužina svih intervala, odstranjenih pri konstrukciji CANTOROvog skupa, jednak je 1. Za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^k} > 1 - \varepsilon.$$

Za nađeno n, ukupna dužina intervala od kojih se sastoji skup F_n manja je od ε. Kako je $F \subset F_n$, zaključujemo da se, za svako $\varepsilon > 0$, skup F može pokriti intervalima čija je ukupna dužina manja od ε. Prema tome, skup F je mere nula.

1569. Dokazati da broj 1/4 pripada CANTOROvom skupu F.

1570. Neka je skup A sastavljen od tačaka 0 i 1 i od onih tačaka skupa F koje su krajevi intervala odstranjenih pri konstrukciji skupa F kao u zadatku 1568:

$$A = \left\{0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots\right\}$$

Neka je $B = F \setminus A$. Dokazati da je

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\} = [0, 2]\,.$$

1571. Neka je funkcija φ_0 definisana na CANTOROvom skupu F na sledeći način: Ako je

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\,, \qquad a_k \in \{0, 2\},$$

tada je

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}\,, \qquad b_k = a_k/2\,, k = 1, 2, \dots$$

a) Odrediti $\varphi_0(x)$ za $x = 0, 1/3, 2/3, 1/4, 1$.

b) Dokazati da je $\varphi_0(a) = \varphi_0(b)$ ako i samo ako su tačke a i b krajevi jednog od intervala koji se odstranjuju iz $[0, 1]$ pri konstrukciji CANTOROvog skupa.

c) Dokazati da funkcija φ_0 preslikava skup F na interval $[0, 1]$, tj. da za svako $y \in [0, 1]$ postoji $x \in F$ tako da je $\varphi_0(x) = y$.

1572. Definišimo CANTOROvu funkciju $x \mapsto \varphi(x)$ za $x \in [0, 1]$ na sledeći način: Ako $x \in F$, neka je $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, gde je funkcija φ_0 definisana u zadatku 1571. Ako $x \in [0, 1] \setminus F$, tada $x \in (a, b)$, gde je (a, b) neki od intervala koji su odstranjeni iz $[0, 1]$ pri konstrukciji CANTOROvog skupa. U ovom slučaju definišemo $\varphi(x) = \varphi_0(a) = \varphi_0(b)$. Dokazati:

a) Funkcija φ je monotono neopadajuća i neprekidna funkcija na $[0, 1]$.

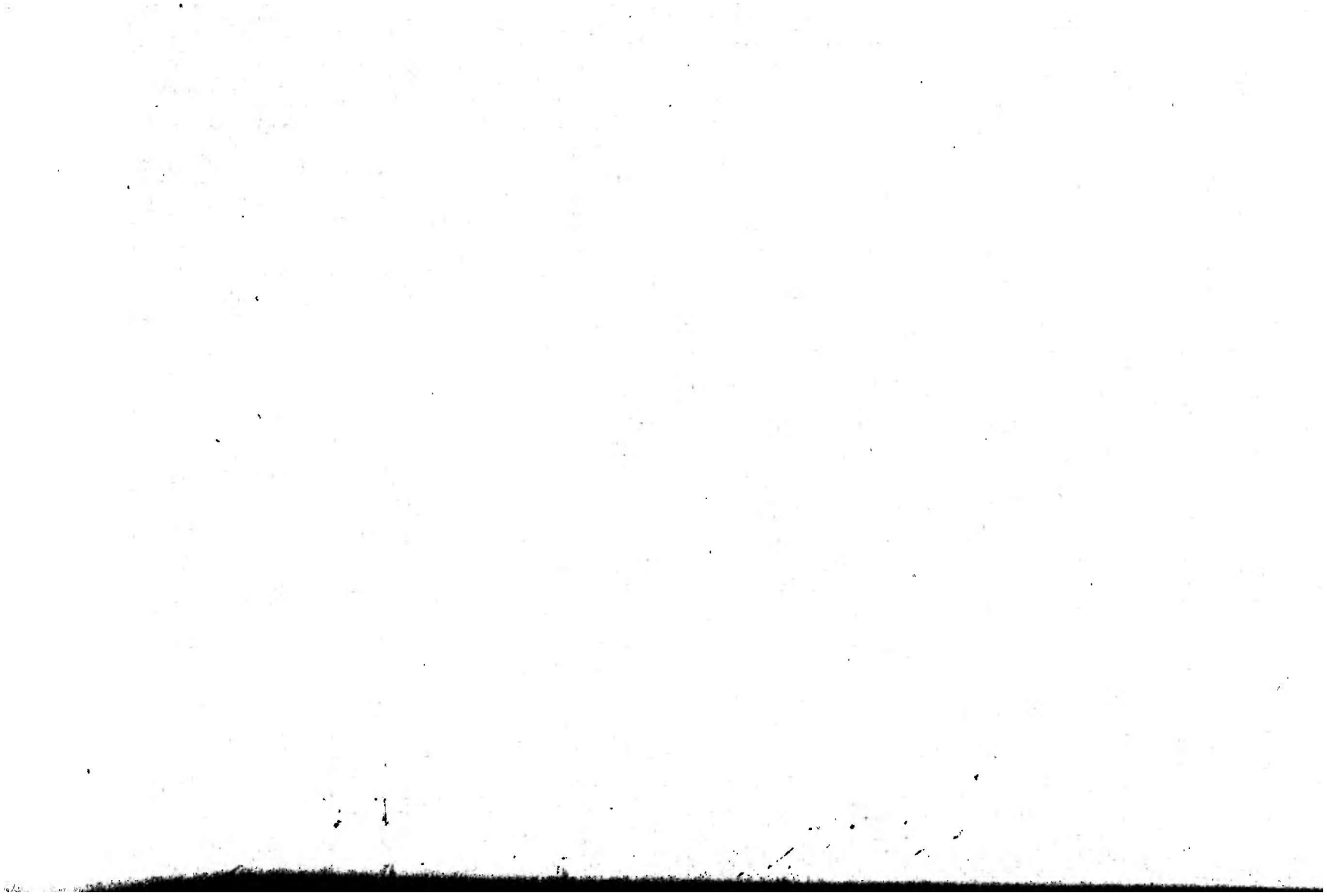
b) Funkcija φ je diferencijabilna svuda osim na skupu F koji je mere nula, i $\varphi'(x) = 0$ za $x \in [0, 1] \setminus F$.

Primedba. Kako je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$, neprekidna kriva φ spaja tačke $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Ukupna dužina svih segmenata od kojih je sastavljena kriva $y = \varphi(x)$ jednaka je 1. S druge strane, dužina duži koja spaja tačke $(0, 0)$ i $(1, 1)$ jednaka je $\sqrt{2} > 1$. Kako je to moguće, kada je duž najkraći put između dve tačke?

1573. Dokazati da je CANTOROva funkcija φ integrabilna na $[0, 1]$ i izračunati

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Odrediti primitivnu funkciju funkcije φ.



Spisak ilustracija

"Trodimenzionalne" ilustracije proizvedene su iz programa *Mathematica*, pomoću zadate jednačine.

Na strani xiv:

$$z = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{300}(1+\sin^2 5x+\sin^2 7y)\right)\cdot\left(\cos\frac{x^2+y^2}{20}\right)^{g(x,y)},$$

gde je

$$g(x,y) = 1+249\exp(-x^2-y^2), \qquad x\in[-17,17],\ y\in[-17,17].$$

Slika na strani 60 dobijena je transformacijom ikosaedra pomoću naredbe
`Show[Graphics3D[Stellate[Icosahedron[ ]]]]` ,
pošto je prethodno učitana datoteka `Polyhedra.m`.

Na strani 150:

$$x=\cos u\cdot(5+u\cos v),\ y=\sin u\cdot(5+u\cos v),\ z=u\sin v,\quad u\in[0,2\pi],\ v\in[0,2\pi].$$

Na strani 280:

$$z=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},\qquad x\in[-0.3,0.05],\quad y\in[-0.4,0.1].$$

Na strani 394:

$$x=\cos u\cdot(5+u\cos v),\quad y=\sin u\cdot(5+u\cos v),\quad z=u\cdot(g(u)+\sin v),$$

gde je

$$g(u)=3(1+20e^{-u}),\qquad u\in[\pi/8,29\pi/4],\quad v\in[0,2\pi].$$

Na strani 470 (torus):

$$x = \cos u \cdot (3 + \cos v), y = \sin u \cdot (3 + \cos v), z = \sin v\,, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi].$$

Na strani 516:

$$\begin{aligned} x &= (5 + \cos(4u)\cos(4v))\cos u \cdot \cos v \\ y &= (5 + \cos(4u)\cos(4v))\cos u \cdot \sin v, \\ z &= (5 + \cos(4u)\cos(4v))\sin u\,, \end{aligned}$$

gde je $u \in [-\pi/2, \pi/2], v \in [0, 2\pi]$.

Na strani 562:

$$z = \sin \frac{2x + 3y}{5} \cdot \sin x \cdot \sin y\,, \qquad x \in [-10, 10], \quad y \in [-10, 10].$$

Literatura

[1] Aljančić S. *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Beograd 1968.

[2] Bell E.T. *Veliki matematičari*, Zagreb 1972.

[3] Cvetković D.M., Kocić V.Lj., Lacković I.B., Merkle M.J., Radosavljević Z.S., Simić S.K., Vasić P.M. *Matematika 1 – Algebra*, Beograd 1992.

[4] Demidovič B.P. *Sbornik zadač i upražnenii po matematičeskomu analizu*, Moskva 1972.

[5] Fihtengol'c G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija*, Moskva 1970

[6] Klein F. et al. *Famous Problems*, New York 1980.

[7] Lelong-Ferrand J. *Exercices résolus d'analyse*, Paris 1977.

[8] Ljaško U.U. et al. *Matematičeskii analiz v primerah i zadačah*, Kiev 1975, č. 1 i č. 2.

[9] Matveev N.M. *Sbornik zadač i upražnenii po obiknovenim differencial'nim uravneniayam*, Minsk 1970.

[10] Mitrinović D.S. *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima, II*, Beograd 1989.

[11] Mitrinović D.S., Tošić D.Đ., Janić R.R. *Specijalne funkcije – Zbornik zadataka i problema*, Beograd 1972.

[12] Mitrinović D.S., Vasić P.M. *Analitičke nejednakosti*, Beograd 1970.

[13] Mitrinović D.S., Vasić P.M. *Diferencijalne jednačine – zbornik zadataka i problema*, Beograd 1972.

[14] Scott J.F. *A History of Mathematics*, London 1969.

[15] Spiegel M.R. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Calculus*, New York 1963.

[16] Struik D.J. *A Concise History of Mathematics*, New York 1948.

[17] Šilov G.E. *Matematičeskii analiz – funkcii odnogo peremennogo*, t. 1–2, Moskva 1969.

Indeks

Aditivnost 341
aksioma kompletnosti 7
Arhimedova spirala 175
asimptote 239
astroida 176, 272

Bernoullijeva lemniskata 272
beskonačnost (∞) 6
beskonačno male veličine 136
  istog reda 136
  ekvivalentne ($\sim$) 136
B(p, q), Beta funkcija 379
bijekcija 14
binomni razvoj 220
Bolzano–Weierstrassov stav 94
Briggs, Henry 576
broj
  algebarski 5
  konačan 6
  kompleksan 25
    algebarski oblik 25
    imaginarni deo 25
    konjugovano kompleksan 25
    realni deo 25
    trigonometrijski oblik 25
  prost 13
  transcendentan 5
Budistički sveštenik 135

Cantorova funkcija 691
Cauchy, Augustin Louis 443
ci x, integralni kosinus 379
cikloida 272
cosec x, kosekans 28

Derive (program) 602, 618

Dekartov list 270
dg, stepen polinoma 23
diferencijal 170, 499
  reda n 200, 500
  invarijantnost 171, 505
diferencijalna jednačina
  Bernoullijeva 520
  Clairautova 536
  Eulerova 560
  homogena (prvog reda) 519
  homogena 544
  Lagrangeova 536
  Laplaceova parcijalna 509
  linearna prvog reda 520
  nehomogena 544
  nelinearna 662
  koja razdvaja promenljive 519
  obična 517
  parcijalna 515
  Riccatijeva 537
  u totalnom diferencijalu 539
dijametar skupa 476
domen funkcije 14

e (broj) 84, 95
ekvikonvergentni redovi 396
element
  maksimalni 6
  minimalni 6
eksponent 23
exp (oznaka) 47
ekstremum 229
epicikloida 272
Erf(x) 379
Euler, Leonard 317
Eulerova konstanta 412, 624

Eulerove smene 318
evolventa kruga 272

Fermat, velika teorema 24
Fibonaccijev niz 564
fiksna tačka 105
formula
  binomna 24
  Eulerova 28
  Leibnizova 198
  Liouvilleova 544
  Maclaurinova 204
  Moivreova 26
  Newton–Leibnizova 340
  Stirlingova 686
  Taylorova 203
  Wallisova 684
funkcija (za funkciju koja ima ime, videti pod tim imenom)
  eksplicitno definisana 22
  eksponencijalna 47
  elementarna 53
    definisanje pomoću redova 451
  hiperbolička 51
  implicitna 504
  implicitno definisana 22
  integrabilna 334
  inverzna 14
  kompleksna 54
  monotono neopadajuća 14
  monotono nerastuća 14
  neelementarna 379
  neparna 14
  ograničena 14
  parametarski definisana 22
  parna 14
  periodična 14
  racionalna 23
    prava 303
    nesvodljiva 303
  stepena 23
funkcija greške, Erf 383
funkcija koja je svuda neprekidna a nigde diferencijabilna 634

$\Gamma(x)$, Gama funkcija 379
Gaussova kriva 263, 382
generalisani izvod 676
glavna vrednost
  nesvojstvenog integrala 357
  višeznačne funkcije 58
granica skupa
  donja 6
  gornja 6
granična vrednost
  niza 61
  funkcije 114
greška
  relativna 176
  u Taylorovoj formuli 203

Heavisideova funkcija 17

Indeks niza 61
inf, infimum
  niza 81
  funkcije 145
  skupa 7
infinitezimala 136
integracija
  binomnog diferencijala 318, 525
  iracionalnih funkcija 318
  parcijalna 299, 352
  pomoću redova 468
  trigonometrijskih funkcija 322
integracioni faktor 539
integralna kriva 518
integralna suma 334
  donja i gornja 335
ispitivanje funkcija 241, 679
  broja nula 247
iteracija 106
izolovana tačka 99
izvod 151
  beskonačan 164
  inverzne funkcije 152
  logaritamski 162
  reda n 190
  složene funkcije 152

Jedinstveno 20

jednačina
funkcionalna 683
Cauchyjeva 600
algebarska 613
jednakost funkcija 15
deo po deo 15

Kardinalni broj 1
kontrakcija 105, 183, 487
kriterijum konvergencije redova
Abelov 420
Abelov, uniformne konvergencije 434
D'Alembertov 407
Bertrandov 408
Cauchyjev 397, 408
Cauchyjev, uniformne konvergencije 434
Dirichletov 420
Dirichletov, uniformne konvergencije 434
Gaussov 408
integralni 407
Kummerov 408
Leibnizov 420
poredbeni 407, 413
Raabeov 408
Weierstrassov 434
krivina 683
poluprečnik 598
kvadratura 519
kompozicija funkcija 15
konačan oblik 519
koordinate, polarne 25
kugla 475
otvorena 475
zatvorena 475
kvadratni koren 15

Lančanica 268
LaTeX 643
L'Hospitalovo pravilo 185
li x, integralni logaritam 379
$\underline{\lim}$, lim inf, limes inferior
niza 96
funkcije 121
$\overline{\lim}$, lim sup, limes superior
niza 96
funkcije 121
linearnost 341
logaritam, prirodni 48
lokalna aproksimacija 204

Maclaurin, Collin 228
Maksimum
skupa 6
lokalni, funkcije 229
Mathematica (program) 618
metrički prostor 471
kompletan 483
metod
crtanja grafika po etapama 245
Ostrogradskog 312
polovljenja intervala 243, 582
Rolleov 277
varijacije konstanti 545
metrika
diskretna 473
Euklidska 472
ekvivalentne metrike 476
uniformne konvergencije 487
uobičajena 472
minimum
skupa 6
lokalni, funkcije 229
Mitrinović, D.S. 643

Nejednakost
između aritmetičke i geometrijske sredine 11
između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine 12
Bernoullijeva 10
Cauchyjeva 644
integralna 644
Hölderova 645
integralna 646
za nizove 646
Jensenova 648
integralna 649

Minkowskijeva 647
integralna 648
za nizove 648
trougla 9
za integrale 341
za kompleksne brojeve 26
u metričkim prostorima 472
Youngova 236
nema promenljiva 334
neodređen izraz (kod graničnih vrednosti) 67
nepokretna tačka 105, 673
u metričkim prostorima 487
neprekidnost
funkcije 116
uniformna 147, 183
niz 61
Cauchyjev 101, 483, 498
divergentan 66
konvergentan 62
nula niz 62
ograničene varijacije 103
prostih brojeva 13
sa dva indeksa 498
norma 491
Euklidska 491
normala 169

O, o (veliko i malo o – simboli) 136
oblast definisanosti 14
okolina, ε–okolina 62, 475
beskonačnosti 122
operator 488
ortogonalnost trigonometrijskih funkcija 348
ostatak reda 396
ostatak u Taylorovoj formuli
Cauchyjev oblik 203
integralni oblik 376
Lagrangeov oblik 203
Peanoov oblik 203
procena 209

Paradoks sa kuglicama 2
parcijalna suma reda 396
parcijalni izvodi 499
period funkcije 14
π (broj) 177, 684
podela intervala 334
ekvidistantna 336
norma podele 334
podniz 94
podpokrivač skupa 482
pokrivač skupa 482
polinom 23
analitičke osobine 274
Laguerreov 199
Legendreov 199
koren reda k 23
racionalni koreni, teorema 23
Taylorov 203
poredak 6
povratna tačka 681
pravilo parcijalnog sumiranja 620
prekid funkcije
druge vrste 142
otklonjiv 142
prve vrste 142
prekidi izvoda 180
prevojna tačka 234
primitivna funkcija 281
priraštaj 168

$\bar{\mathbf{R}}$ (oznaka) 6
radijan 27
Ramanujan, Srinivasa 602
rastojanje tačke od skupa 476
razvoj
binomni 205, 452
potencijalni 216
Taylorov 203
red
apsolutno konvergentan 424
brojni (numerički) 396
divergentan (primer) 426
funkcionalni 434
harmonijski 400
Maclaurinov 450
stepeni (potencijalni) 444
poluprečnik konvergencije 444

interval konvergencije 444
uslovno konvergentan 424
restrikcija domena 15
rešenje
Cauchyjevo 520
diferencijalne jednačine pomoću kvadratura 519
jedinstveno 20
opšte 518
partikularno 518
singularno 518
Riemannova zeta funkcija 625
rotaciono telo 385

sec x, sekans 28
si x , integralni sinus 379
skoro svi 62
skup
Cantorov 689
kompaktan 482
kompletan 104, 483
u metričkom prostoru 483
mere nula 688
ograničen 6, 476
odozdo 6
odozgo 6
otvoren
prebrojiv 2
zatvoren 475
slika skupa 14
inverzna 14
slobodni član 544
smena promenljive
u neodređenom integralu 282
u određenom integralu 344
linearna 288
spirala
Arhimedova 272
logaritamska 272
hiperbolička 272
sredina
aritmetička 11
aritmetičko–geometrijska 92
geometrijska 11
harmonijska 12
srednja vrednost funkcije 363
stacionarna tačka 229
sup, supremum
niza 81
funkcije 145
skupa 7

$\sim$ 136
Tablica znaka 18
tačka nagomilavanja 99, 482
tangenta 168
Taylor, Brook 228
teorema
Abelova 445
Cauchyjeva 179
Fermatova
o jedinstvenosti Taylorovog polinoma 216
o jedinstvenosti stepenog reda 451
Lagrangeova 178, 649
o dva žandara 75
Rolleova 178
Stolzova 76
TEX 643

Ugao
između krivih 169, 599
polarni 25
umetnuti intervali 93
uslov
konturni 657
početni 520

v.p. (oznaka) 357
vrste prekida 142

Wronskijan 544

$\zeta(x)$, Riemannova zeta funkcija 625
zbir beskonačne geometrijske progresije 71
zlatni presek 564

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНВ. БР. 27673
БИБЛИОТЕКА